Na prawach rękopisu
do użytku służbowego

INSTYTUT ENERGOELEKTRYKI POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ
Raport serii SPRAWOZDANIA Nr

LABORATORIUM TEORII I TEHCNIKI STEROWANIA
INSTRUKCJA LABORATORYJNA

ĆWICZENIE Nr 1

SPOSOBY OPISU UKŁADU AUTOMATYKI
STEROWANIE DYSKRETNE OBIEKTEM CIĄGŁYM
MODEL CYFROWY OBIEKTU CIĄGŁEGO

Mirosław Łukowicz

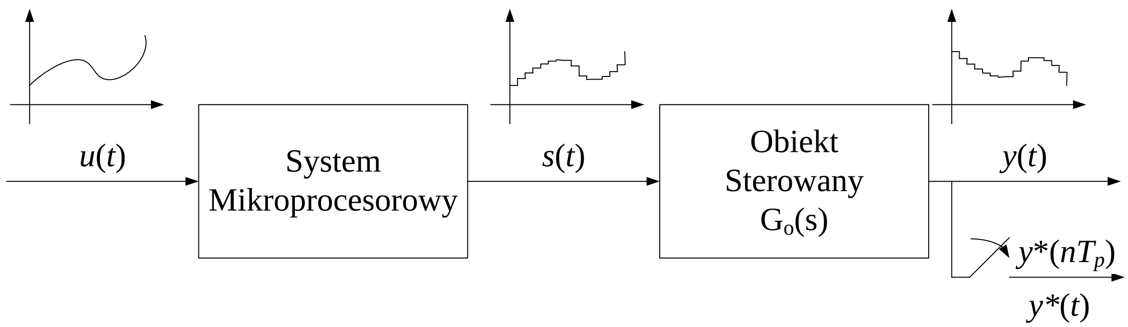
Słowa kluczowe:
transmitancja, przestrzeń stanów, okres próbkowania, ekstrapolator.

WROCŁAW 2008

1. Wstęp

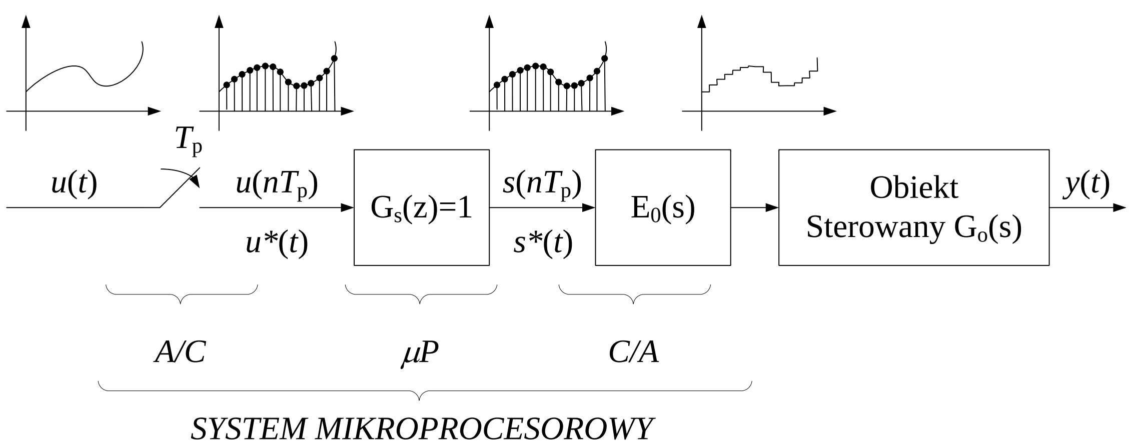
Modelowanie procesu sterowania komputerowego ma swe podwaliny w teorii układów impulsowych. Jest ona z powodzenie stosowana w syntezie algorytmów sterowania oraz dyskretnej symulacji układów ciągłych.

Rozważmy hipotetyczny system mikroprocesorowy, którego zadaniem jest powielenie ciągłego sygnału wejściowego na wyjście, przy czym sygnał wyjściowy będzie dyskretyzowany w czasie, oraz będzie ciągły w poziomie, tzn. będzie mógł przyjmować dowolne wartości ze zbioru liczb rzeczywistych. Ogólny schemat takiego sytemu przedstawiony jest na rys. 1.



Rys. 1. Dyskretne sterowanie obiektem ciągłym ze sterownikiem o transmitancji G(z)=1.

W syntezie algorytmu sterowania wymagana jest często znajomość modelu dyskretnego obiektu ciągłego, w którym uwzględniony jest proces formowania sygnału wyjściowego z przetwornika C/A. W takich rozważaniach pomocny może być rys. 2, w którym przedstawiono kolejno procesy przetwarzania sygnału wejściowego.



Rys. 2. Model matematyczny procesu dyskretnego sterowania obiektem ciągłym ze sterownikiem o transmitancji G(z)=1.

Ciągły sygnał wejściowy jest próbkowany przez impulsator, którego model matematyczny opisany jest następująca zależnością:

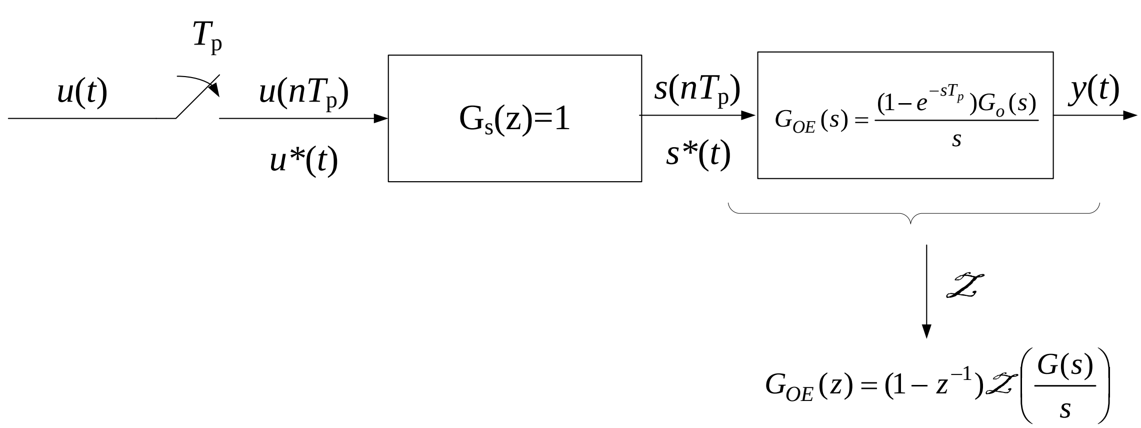
$$u^*(t) = u(t)\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t - nT_p) = \sum_{n=0}^{\infty}u(nT_p)\delta(t - nT_p) \tag{1}$$

Z zależności tej wynika, że sygnał za impulsatorem jest zestawieniem impulsów Dirac'a, czyli impulsów o nieskończonej wysokości i nieskończenie krótkim czasie trwania oraz polach powierzchni pod wykresami impulsów równym współczynnikom $u(nT_p)$. Pomiędzy impulsami sygnał przyjmuje wartość zero. W związku z tym informacja w tym sygnale ukryta jest w postaci pól powierzchni poszczególnych impulsów Diraca generowanych przez impulsator. Współczynniki te są następnie przetwarzane przez mikroprocesor a właściwie algorytm (program w nim pracujący) reprezentowany przez odpowiednią transmitancję impulsową $G_s(z)$. Sygnał wyjściowy algorytmu przetwarzającego ma taką samą naturę, jak sygnał wejściowy, tzn. jest ciągiem impulsów Diraca, ale o zmienionych przez ten algorytm współczynnikach, czyli polach powierzchni pod impulsami.

W rzeczywistym układzie regulacji obiekt ciągły jest sterowany najczęściej sygnałem schodkowym wyprowadzanym z systemy μP poprzez przetwornik C/A. Proces ten można zamodelować podając impulsy Diraca napływające z algorytmu sterowania na ekstrapolator zerowego rzędu, którego transmitancja ciągła jest następująca:

$$G_{E0}(s) = \frac{1 - e^{-sT_p}}{s} \tag{2}$$

Interpretacja działania ekstrapolatora zerowego rzędu jest taka, że wydobywa on informację zawartą w polach powierzchni pod impulsami w procesie całkowania ciągłego. Ponieważ interesuje nas sterowanie sygnałem o wartości zakodowanej w ostatnim impulsie, należy ten impuls scałkować i odjąć wynik wszystkich całkowań poprzednich. Należy być świadomym, że jest to model matematyczny procesu, który przebiega w przetworniku C/A i musi być uwzględniony podczas procesu syntezy algorytmu sterowania. Proces ten mógłby być pominięty, gdyby obiekt ciągły był sterowany z komputera impulsami Diraca, a tak w rzeczywistości nie jest. Ponieważ ekstrapolator zerowego rzędu jest w swej naturze ciągły, można jego transmitancję połączyć z transmitancją rozpatrywanego obiektu jak na rys. 3.



Rys. 3. Model matematyczny procesu dyskretnego. Sterowanie obiektem ciągłym ze sterownikiem o transmitancji G(z)=1.

Model dyskretny obiektu i ekstapolatora zerowego rzędu otrzymuje się przez bezpośrednie znalezienie transformaty $\mathscr{Z}$ szeregowego połączenia ekstrapolatora i obiektu, co daje w efekcie zależność:

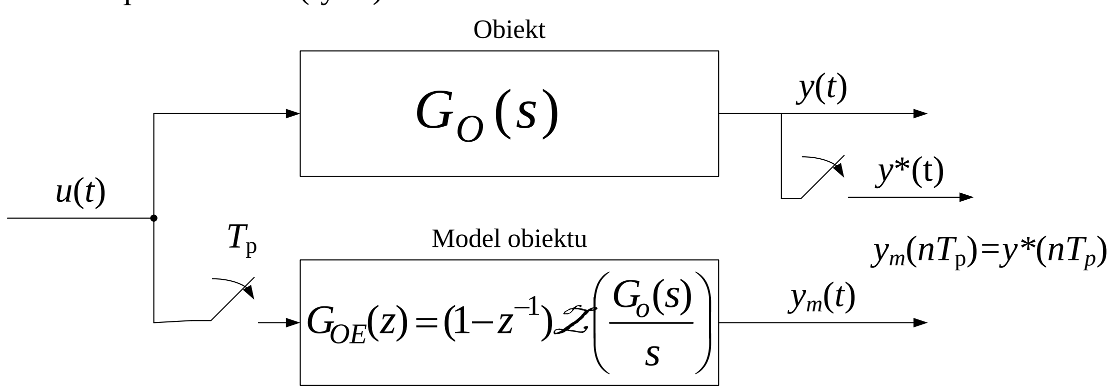
$$G_{OE}(z) = (1 - z^{-1})\mathscr{Z}\left(\frac{G_O(s)}{s}\right) \tag{3}$$

gdzie transformatę $\mathscr{Z}\left(G(s) = \frac{G_O(s)}{s}\right)$ można policzyć np. z metody residuów zgodnie z następującą formułą:

$$G(z) = \sum_{k=1}^{n_b} \frac{1}{(r_k - 1)!} \left\{ \frac{d^{r_k - 1}}{ds^{r_k - 1}} \left[(s - s_k)^{r_k} G(s) \frac{z}{z - e^{sTp}} \right] \right\} \Bigg|_{s = s_k} \tag{4}$$

gdzie n_b jest liczbą różnych biegunów $G(s)$, przy czym wielokrotność poszczególnych biegunów jest równa r_k, z czego wynika, że $n = \sum_{k=1}^{n_b} r_k$.

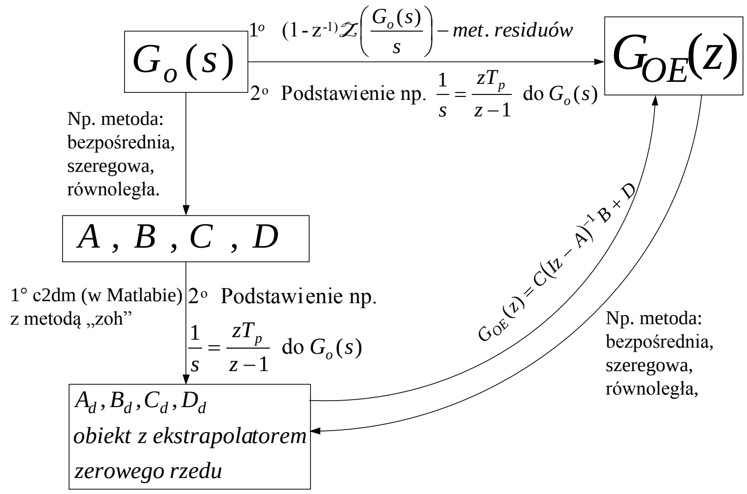
Podanie sygnału na wejście obiektu oraz tak zaprojektowanego modelu obiektu powinno dać na wyjściu obiektu sygnał ciągły „gładki”, natomiast na wyjściu modelu sygnał ciągły o wartościach równych wartościom sygnału wyjściowego z obiekty, ale tylko w chwilach próbkowania (rys 4).



Rys. 4. Odpowiedź obiektu i jego modelu na pobudzenie dowolnym sygnałem wejściowym.

Skoro odpowiedzi obiektu i jego modelu są takie same, to zaprojektowany algorytm sterowania dla modelu powinien równie dobrze pracować dla obiektu ciągłego. W związku z tym korzystnie jest posługiwać się podczas syntezy algorytmu sterowania dyskretnym modelem obiektu np. w postaci równań stanu.

Rożne sposoby otrzymania dyskretnego modelu stanowego obiektu ciągłego reprezentowanego transmitancją $G_o(s)$ przedstawiono na rys. 5.



Rys. 5. Drogi przejścia z transmitancji ciągłej obiektu na dyskretne równania stanu i transmitancję impulsową modelu obiektu z ekstrapolatorem zerowego rzędu.

Najprostszym sposobem otrzymania dyskretnego modelu stanowego obiektu jest znalezienie najpierw modelu stanowego ciągłego, a następnie przejście na model stanowy dyskretny korzystając z odpowiedniej funkcji w Matlabie, np. c2d („continuous to discrete transformation with method”, gdzie metoda „zoh” czyli „zero-order-hold” odpowiada zastosowaniu ekstrapolacji zerowego rzędu).

Model stanowy ciągły można zaprojektować korzystając z jednej z metod wyszczególnionych na rys. 5. Dla przypomnienia poniżej zestawiono kroki działania w metodzie bezpośredniej.

Niech będzie dana transmitancja obiektu, dla którego należy znaleźć opis w przestrzeni zmiennych stanu

$$G(s)=\frac{b_l s^l + b_{l-1}s^{l-1}+\ldots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0} \qquad l<n \tag{5}$$

Podzielmy licznik i mianownik przez s^n. Wówczas otrzymamy

$$G(s)=\frac{b_l s^{l-n}+b_{l-1}s^{l-n-1}+\ldots+b_1 s^{1-n}+b_0 s^{-n}}{1+a_{n-1}s^{-1}+\ldots+a_1 s^{1-n}+a_0 s^{-n}}=\frac{Y(s)}{U(S)} \tag{6}$$

Wprowadzamy nową funkcję E(s) o następującej postaci

$$Y(s)=\underbrace{\frac{U(s)}{1+a_{n-1}s^{-1}+\ldots+a_1 s^{1-n}+a_0 s^{-n}}}_{E(s)}(b_l s^{l-n}+b_{l-1}s^{l-n-1}+\ldots+b_1 s^{1-n}+b_0 s^{-n}) \tag{7}$$

Wówczas sygnał wyjściowy jest równy

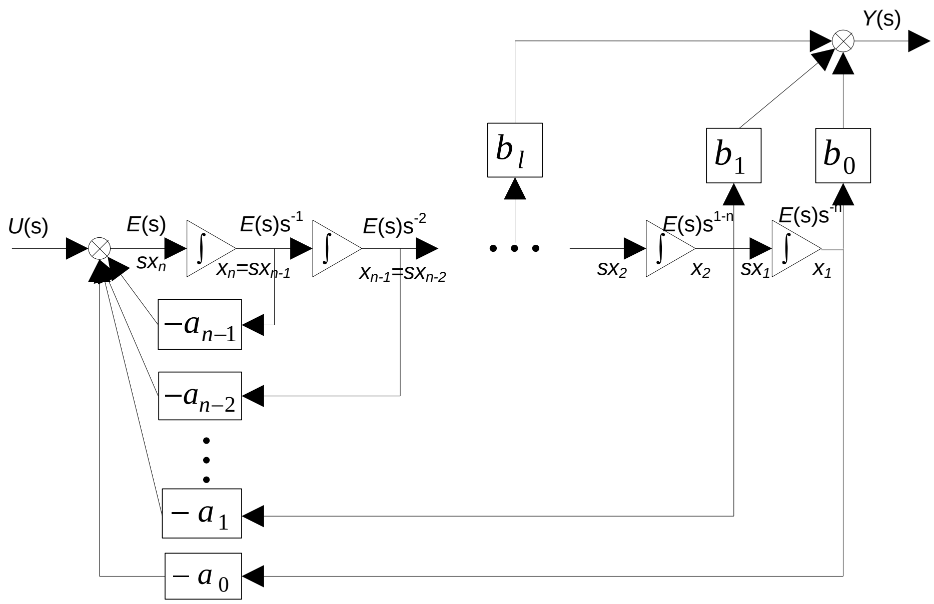
$$Y(s) = E(s)(b_l s^{l-n} + b_{l-1} s^{l-n-1} + \ldots + b_1 s^{1-n} + b_0 s^{-n}) \quad (*) \tag{8}$$

i obowiązują zależności jak następuje:

$$E(s)(1 + a_{n-1} s^{-1} + \ldots + a_1 s^{1-n} + a_0 s^{-n}) = U(s) \tag{9a}$$

$$E(s) = U(s) - E(s)(a_{n-1} s^{-1} + \ldots + a_1 s^{1-n} + a_0 s^{-n}) \quad (**) \tag{9b}$$

Na podstawie równań (*) i (**) można sporządzić schemat blokowy modelu w przestrzeni zmiennych stany jak na rys. 6.



Rys. 6. Schemat blokowy modelu obiektu w przestrzeni stanu otrzymany metodą bezpośrednią.

Po postawieniu $E(s)=sx_n$ można sformułować kolejno równania stanu w następującej postaci

$$\begin{aligned}
sx_1 &= x_2 \\
sx_2 &= x_3 \\
&\vdots \\
sx_{n-1} &= x_n \\
sx_n &= U(s) - a_0 x_1 - a_1 x_2 - \ldots - a_{n-1} x_n
\end{aligned} \tag{10}$$

oraz równanie wyjściowe:

$$Y(s) = b_0 x_1 + b_1 x_2 + \ldots + b_l x_{l+1} \tag{11}$$

Stosując metodę bezpośrednią otrzymujemy macierze modelu o stałej formie jak następuje:

Macierz stanowa:

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \tag{12}
$$

Macierz wejściowa:

$$
B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{13}
$$

Macierz wyjściowa

$$
C = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_l & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \tag{14}
$$

oraz macierz bezpośredniego sprzężenia wyjścia z wejściem

$$
D = [0]. \tag{15}
$$

PROGRAM ĆWICZENIA

1. W Simulink-u zarejestrować odpowiedź obiektu o transmitancji

$$
G_o(s) = \frac{1}{(Ns+1)(Is+1)} \tag{16a}
$$

$$
G_o(s) = \frac{1}{(s+N+jI)(s+N-jI)} \tag{16b}
$$

na skok jednostkowy, gdzie N jest liczbą liter w nazwisku, a I w imieniu. O typie transmitancji zadecyduje prowadzący tzn. dokona wyboru między 16a i 16b.

2. Zakładając, że obiekt ten będzie sterowany dyskretnie w czasie, dobrać odpowiedni okres próbkowania i znaleźć transmitancję dyskretną $G_{OE}(z)$ obiektu z ekstrapolatorem.

3. Znaleźć model obiektu ciągłego w przestrzeni zmiennych stanu.

4. Znaleźć model dyskretny obiektu i ekstrapolatora w przestrzeni zmiennych stanu.

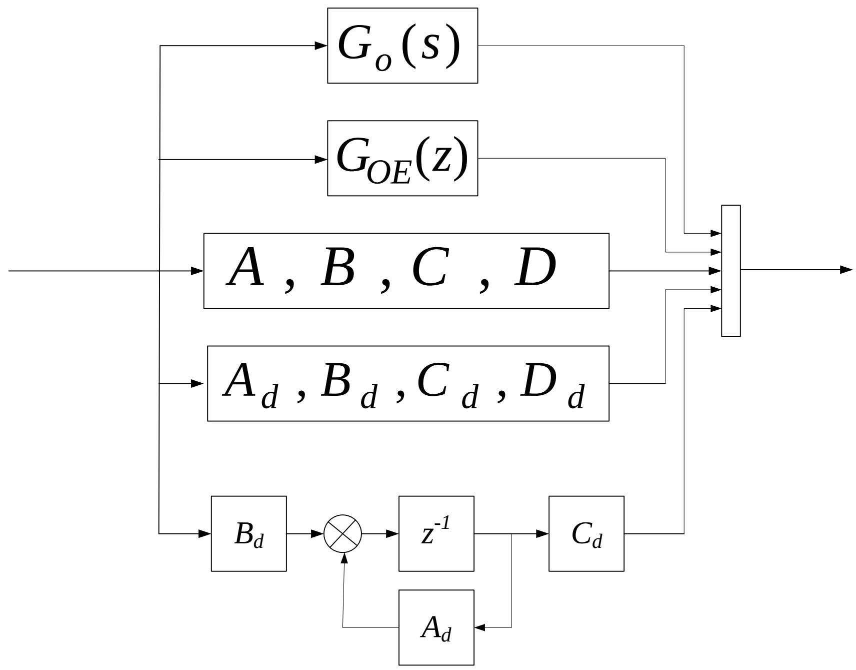
5. Zarejestrować odpowiedź modelu dyskretnego korzystając z odpowiedniego bloczka w Simulink-u oraz zamodelować ten układ korzystając z sumatorów, bloku opóźnienia i odpowiednich wzmocnień macierzowych jak przedstawiono na rys. 7 w ostatnim wariancie.

Uwagi!

1. W sprawozdaniu zamieścić wszelkie obliczenia i wyprowadzenia.

2. Wszystkie kroki w wyprowadzeniach powinny być opisane i uzasadnione „słownie”.

3. Konieczne podać wnioski.



Rys. 7. Wzór schematu do realizacji w Simulink-u.