
Eugeniusz Rosołowski

**Analiza algorytmów cyfrowych zabezpieczeń
elektroenergetycznych**

Wrocław 1992



Eugeniusz ROSOŁOWSKI

Analysis of digital algorithms
applied in power system protection

Eugeniusz Rosołowski

**Analiza algorytmów
cyfrowych zabezpieczeń
elektroenergetycznych**



Recenzenci
Wilibald WINKLER
Adam ZUCHOWSKI

Redaktor naukowy
Jacek MALKO

Opracowanie redakcyjne i korekta
Alina KACZAK

© Copyright by Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1992

Wydanie poprawione

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

ISSN 0324-976x

Nakład 200+70 egz. Ark. wyd. 12,25. Ark. druk 10¹/₄. Papier offset. kl. III, 70 g. B1.
Oddano do druku w styczniu 1992 r. Druk ukończono w lutym 1992 r.
Zakład Graficzny Politechniki Wrocławskiej. Zam. nr 71/92

$\nu = \omega_1 T = 2\pi/N$ - kąt między dwiema próbkami, mierzony w odniesieniu do fazona składowej podstawowej sygnału,

$q = \omega/\omega_1$ - względna pulsacja sygnału,

x_s - składowa kwadraturowa (prostopadła) fazona,

x_c - składowa synfazowa (bezpośrednia) fazona,

$x(k)$ - k -ta wartość sygnału dyskretnego,

$i(k), u(k)$ - dyskretne wartości przebiegu prądu lub napięcia,

T_a, T_{ak} - stałe czasowe zanikania składowych aperiodycznych,

I, I_a, I_k, I_{ak} - amplitudy odpowiednich składowych prądu,

U, U_a, U_k, U_{ak} - amplitudy odpowiednich składowych napięcia,

P - moc czynna,

Q - moc bierna,

Z - impedancja,

$X(\omega)$ - charakterystyka widmowa amplitudy przebiegu x ,

$X(j\omega)$ - charakterystyka widmowa zespolona przebiegu x ,

$X^*(j\omega)$ - wielkość zespolona sprzężona,

\underline{y} - sygnał zespolony (fazor),

A - macierz stanu ($M \times M$),

$\underline{X} = \{x_j\}$ - wektor parametrów modelu ($1 \times M$) (wektor stanu),

$\hat{\underline{X}} = \{\hat{x}_j\}$ - wektor estymat parametrów modelu ($1 \times M$),

$\underline{Y} = \{y_j\}$ - wektor pomiarów ($1 \times K$) (wektor wyjścia),

$\hat{\underline{Y}} = \{\hat{y}_j\}$ - wektor estymat pomiarów ($1 \times K$),

$G = \{g_{ij}\}$ - macierz wagowa ($K \times K$),

$H = \{h_{ij}\}$ - macierz bazowa modelu ($K \times M$) (macierz pomiaru),

H_G - macierz modelu, zmodyfikowanego zgodnie z macierzą wagową G ,

H_i - i -ty wiersz macierzy H ,

$\underline{V} = \{v_j\}$ - wektor błędów pomiarowych ($1 \times K$) (wektor zakłóceń pomiaru),

$\underline{W} = \{w_j\}$ - wektor zakłóceń stanu (procesu) ($1 \times M$),

K - macierz (wektor) wzmocnienia,

$\underline{\xi} = \{e_j\}$ - wektor błędów estymacji pomiarów,

$\tilde{\underline{X}} = \{\tilde{x}_j\}$ - wektor błędów estymacji parametrów modelu sygnałowego,

R - macierz kowariancji zakłóceń pomiaru,

Q - macierz kowariancji zakłóceń procesu,

P - macierz kowariancji błędów estymacji,

I - macierz jednostkowa,

σ^2 - wariancja błędu,

z^{-1} - operator opóźnienia o 1 próbek.

STOSOWANE SYMBOLE

A^T - macierz transponowana,

A^{-1} - macierz odwrotna,

$\dot{y}(t) = dy(t)/dt$ - operacja różniczkowania,

$\text{INT}(a)$ - część całkowita,

$i \text{ mod } j$ - reszta z dzielenia i (mod j),

$E(x)$ - wartość oczekiwana,

$\text{cov}(X) = E\{X X^T\}$ - kowariancja (macierz kowariancji),

$\text{var}(x) = E(x^2)$ - wariancja.

1. WSTĘP

Zapewnienie niezawodnego dostarczania energii elektrycznej oraz ograniczenie strat związanych z ewentualnymi awariami - to podstawowe zadanie układów automatyki i zabezpieczeń elektroenergetycznych. Niezwykle odpowiedzialne funkcje, jakie pełnią te układy, stawiają duże wymagania w stosunku do ich projektantów. Rozwój technologii systemów mikroprocesorowych i metod cyfrowego przetwarzania sygnałów stworzył nowe możliwości w dziedzinie zarówno zakresu zadań wypełnianych przez wspomniane układy, jak i sposobu ich realizacji. Intensywne prace w tej dziedzinie są prowadzone już ponad dwadzieścia lat [100], [108].

W strukturze zabezpieczeń elektroenergetycznych można wyróżnić dwa zasadnicze elementy: człon pomiarowy, zbierający informacje o stanie nadzorowanych parametrów systemu, oraz człon decyzyjny, który po przetworzeniu tej informacji podejmuje decyzję z przewidzianego zakresu działań. Zastosowanie techniki komputerowej do realizacji zadań zabezpieczeń zmienia koncepcje funkcjonowania obu wymienionych elementów, a także sposób i zakres współdziałania zabezpieczeń z innymi układami automatycznego sterowania i nadzoru systemu elektroenergetycznego. W niniejszej pracy zanalizowano procedury związane z pomiarem wielkości elektrycznych w członach pomiarowych zabezpieczeń wykonanych w technice mikroprocesorowej.

Cyfrowa realizacja pomiaru zmienia zasadniczo podejście do analizy i projektowania zabezpieczeń elektroenergetycznych. Wpływa na to z jednej strony odmienna struktura układu i jakościowo inne rozwiązania techniczne, a z drugiej - nowe procedury pomiarowe. Charakterystyczna jest przy tym ewolucja algorytmów pomiarowych. W pierwszych rozwiązaniach bazowano na procedurach realizowanych w układach analogowych, podczas gdy najnowsze algorytmy są tworzone według teorii cyfrowego przetwarzania sygnałów.

Zasadniczym etapem w procesie przygotowania do podjęcia decyzji przez zabezpieczenie jest pomiar wielkości elektrycznych, które charakteryzują stan nadzorowanego obiektu. Są to tzw. wielkości kryterialne zabezpieczeń. Ze względu na charakter procesów zachodzących w systemie elektroenergetycznym, wielkości te są w większości przypadków odnie-

sione do podstawowej składowej przebiegu prądu i napięcia lub jej harmonicznych.

Podstawowa trudność syntezy poprawnych algorytmów pomiaru wielkości kryterialnych zabezpieczeń wynika ze sprzeczności wymagań, jakie te algorytmy powinny spełniać. Główne z nich to: szybkość pomiaru oraz jego dokładność.

Postulat krótkiego czasu reakcji zabezpieczenia na zakłócenie w nadzorowanym obiekcie wynika z jego podstawowej funkcji, która jest uwarunkowana technologicznymi charakterystykami systemu elektroenergetycznego. W przypadku zabezpieczeń podstawowych chodzi przede wszystkim o zachowanie stabilności systemu elektroenergetycznego oraz ograniczenie zniszczeń wywołanych zwarciami. Uważa się, że w sieciach najwyższych napięć uwarunkowany w ten sposób czas identyfikacji zakłócenia nie powinien przekraczać okresu podstawowej harmonicznej. W niektórych przypadkach przedział ten jest jeszcze mniejszy, gdyż ograniczają go właściwości toru pomiarowego (np. nasycanie się przekładników prądowych).

Dokładność pomiaru jest jednym z zasadniczych parametrów mających wpływ na selektywność zabezpieczenia. Podstawowym problemem, jaki musi być w tym przypadku rozwiązany, jest estymacja wielkości kryterialnych zabezpieczenia w warunkach dużych zakłóceń, z możliwie minimalnym błędem. Należy przy tym zauważyć, że dokładność ta musi być utrzymana w warunkach bardzo dużych zmian sygnałów wejściowych.

Efektywność wybranej metody estymacji w dużej mierze zależy od trafnego określenia modelu obserwowanego procesu i zakłóceń. Oznacza to wydzielenie w sygnale wejściowym cech, które mogą być opisane parametrami modelu, i określenie charakteru pozostałych cech sygnału, które tworzą zakłócenie. Wybór jest dokonywany między dwoma podejściami do rozwiązania tego problemu.

Pierwsze z nich zakłada stacjonarny model procesu i zakłóceń, a parametry tego modelu są wyznaczone według rekursywnej lub nierekursywnej metody najmniejszych kwadratów. Na jej podstawie opracowano wiele efektywnych algorytmów, które mogą być sprowadzone również do rachunkowo oszczędnej postaci. Algorytmy te są mało wrażliwe na zakłócenia wówczas, gdy mierzona wielkość jest określana na podstawie zbioru próbek sygnału wejściowego z przedziału (okna pomiarowego) o długości zbliżonej do okresu podstawowej harmonicznej. Teoretyczne uzasadnienie stosowania tej metody w obszarze zabezpieczeń elektroenergetycznych oraz jej ograniczenia podano w fundamentalnej pracy [148].

Druga metoda zakłada w ogólnym przypadku probabilistyczny niestacjonarny model zakłóceń, a model sygnałowy jest określony w postaci równań stanu, co w porównaniu z poprzednim podejściem umożliwia w sposób

bardziej adekwatny odzwierciedlić dynamikę procesu. Estymacja parametrów modelu sygnałowego jest w tym przypadku dokonywana według rekursywnego algorytmu metody najmniejszych kwadratów, który przy określonych założeniach zapewnia filtrację optymalną [2]. Takie podejście umożliwia najpełniejsze spożytkowanie informacji apriorycznej o obserwowanym procesie i występujących zakłóceniach. Pozwala także ustalić początkowe parametry estymacji statystycznie najbliższej spodziewanego rezultatu. Wymaga jednak obszernych badań w celu uzyskania wiarygodnych probabilistycznych charakterystyk procesu i zakłóceń. W dodatku, charakterystyki te nie zawsze mogą być użyte w odniesieniu do innych obiektów. Zastosowanie tej metody estymacji sygnałów w zabezpieczeniach cyfrowych zapoczątkowały prace [38], [39].

Obie wspomniane metody podlegają ciągłej ewolucji i doskonaleniu z punktu widzenia ich zastosowania w konkretnych warunkach. Rozpatrywane są przy tym różnorodne kryteria oceny, takie jak:

- zdolność tłumienia określonych składowych zakłócających (w modelach probabilistycznych - wariancja błędów estymacji),
- czas pomiaru,
- arytmetyczna złożoność algorytmu,
- koszt realizacji.

Należy zauważyć, że w automatyce elektroenergetycznej chodzi nie tylko o dokładny pomiar obserwowanych wielkości, ale o pewne i szybkie wyodrębnienie obszarów pracy (awaryjny - normalny) nadzorowanego obiektu. W związku z tym, niekiedy mogą być czynione ustępstwa w stosunku do dokładności pomiaru na rzecz szybkości oceny mierzonej wielkości.

Zróznicowane wymagania w odniesieniu do algorytmów pomiarowych oraz złożoność zjawisk przejściowych, występujących podczas zakłóceń w poszczególnych obiektach elektroenergetycznych, sprawia, że dziedzina ta podlega nadal dynamicznemu rozwojowi.

Prace ostatniego dziesięciolecia doprowadziły do powstania metod cyfrowego przetwarzania sygnałów, specyficznych dla szybkich pomiarów w elektroenergetyce. Charakterystyczne są tu między innymi algorytmy o zmiennej długości okna pomiarowego, łączące prostotę metod nierekursywnych z dużą szybkością procedur rekursywnych [142], [163]. Inne prace zmierzają do uproszczenia algorytmów opartych na filtrze Kalmana z zachowaniem cech estymacji optymalnej [89]. Obserwuje się także rozwój metod adaptacyjnego przetwarzania sygnałów [42].

Mnogość powstających metod pomiaru wielkości kryterialnych, przy wzrastających wymaganiach w stosunku do tych układów, stwarza wiele trudności w ocenie ich przydatności do określonego zastosowania.

Niniejsza praca dotyczy analizy algorytmów cyfrowego przetwarzania sygnałów, stosowanych w członach pomiarowych zabezpieczeń cyfrowych do

estymacji wielkości kryterialnych. Dokonano podziału błędów związanych z pomiarem tych wielkości oraz przedstawiono metody oceny ich wartości, a także sposoby eliminacji. Uwzględniono przy tym zarówno specyficzne cechy modeli sygnałowych, jak i estymatorów. Zasadnicza część pracy jest poprzedzona gruntowną analizą źródeł błędów wynikających z zastosowanej metody pomiarowej. Wiąże się to z potrzebą klasyfikacji istniejących algorytmów pomiarowych. Dokonano również analizy podstawowych błędów, związanych z implementacją algorytmów w konkretnym układzie mikroprocesorowym.

Algorytmy współczesnych zabezpieczeń cyfrowych są w zdecydowanej mierze tworzone na podstawie metod cyfrowego przetwarzania sygnałów, co wiąże się, między innymi, z dyskretnym (a nie ciągłym) przedstawieniem odpowiednich zależności. W pracy jest stosowany taki właśnie zapis. Związki, które w układach ciągłych są przedstawiane równaniami różniczkowo-całkowymi, przyjmują w tym przypadku postać równań różnicowych. Takie podejście, zdaniem autora, umożliwiło uzyskanie jednorodnego, spójnego opisu dużej grupy algorytmów stosowanych w zabezpieczeniach cyfrowych, tworząc jednocześnie wygodny matematyczny aparat ich syntezy i analizy.

2. ŹRÓDŁA BŁĘDÓW ALGORYTMÓW ZABEZPIECZENIOWYCH

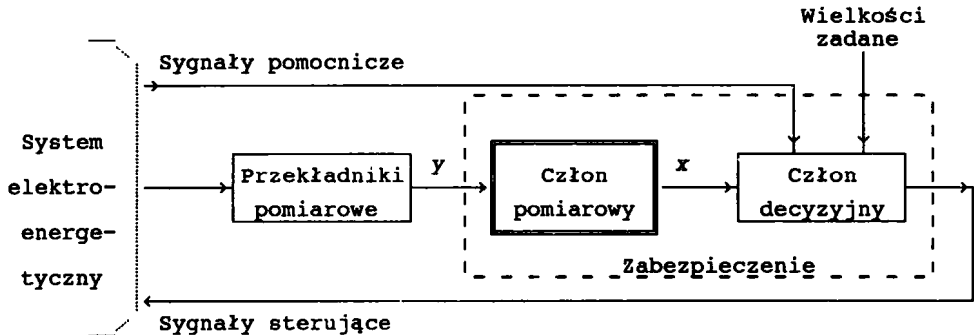
2.1. Struktura zabezpieczenia cyfrowego

Zabezpieczenia elektroenergetyczne są układami, których celem jest identyfikacja miejsca i rodzaju zakłócenia w nadzorowanym systemie elektroenergetycznym oraz podjęcie decyzji odnośnie do likwidacji ewentualnej awarii. Ogólna struktura zabezpieczenia jest przedstawiona na rys. 2.1.

Sygnal wyjściowy zabezpieczenia jest określany w członie decyzyjnym na podstawie wyniku porównania wielkości kryterialnej x z wielkością odniesienia po uwzględnieniu warunków dodatkowych. Wielkość kryterialna x odpowiada określonej wielkości fizycznej w nadzorowanym obiekcie, np. amplitudzie prądu lub napięcia, mocy itp., która w sposób najpełniejszy i łatwy do oceny może określić granice rozdzielające obszary pracy normalnej i awaryjnej tego obiektu. Wielkość ta jest określana w członie pomiarowym.

Pojęcie dokładności pracy zabezpieczenia odbiega od kryteriów stosowanych w odniesieniu do typowych układów pomiarowych lub systemów sterowania. Od zabezpieczenia wymaga się niezawodnej identyfikacji awarii lub przedziałów niebezpiecznej pracy systemu elektroenergetycznego oraz podjęcia automatycznych działań, które mają na celu ograniczenie

skutków awarii oraz jej rozprzestrzeniania się. Podstawowymi parametrami określającymi efektywność funkcjonowania zabezpieczeń są: selektywność, szybkość działania, czułość i niezawodność [130], [170]. Właściwości te są wzajemnie powiązane i w dużej mierze zależą od dokładności toru pomiarowego zabezpieczenia, którego podstawowymi elementami są przekładniki pomiarowe i człon pomiarowy (rys. 2.1).

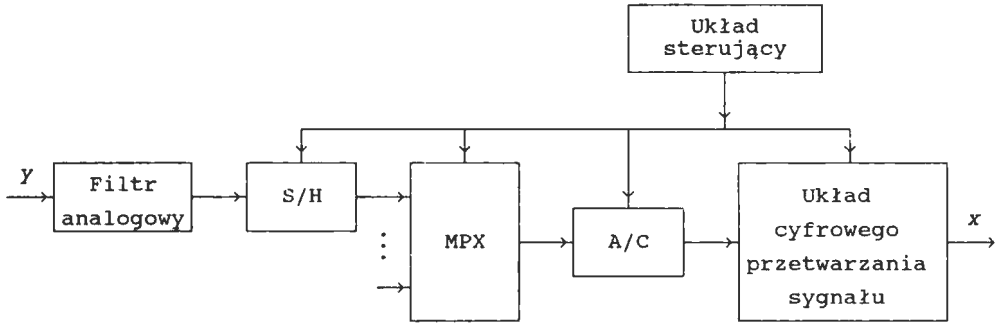


Rys. 2.1. Struktura zabezpieczenia elektroenergetycznego
Fig. 2.1. Block diagram of the power system protection

Przekładniki pomiarowe mogą wprowadzić znaczny błąd w torze pomiarowym zabezpieczeń. W spotykanym zakresie zmienności mierzonych wielkości, przekładniki pomiarowe rozpatruje się zazwyczaj jako elementy nieliniowe. Dotyczy to zwłaszcza przekładników prądowych. Najbardziej istotne dla pracy zabezpieczenia są błędy związane z procesem przejściowym w przekładnikach oraz błędy wynikające z ich nieliniowości [157]. Z punktu widzenia procedur realizowanych w członie pomiarowym, procesy zachodzące w przekładnikach pomiarowych można rozpatrywać łącznie ze zjawiskami w nadzorowanym systemie. W pracy nie prowadzi się analizy błędów przekładników pomiarowych oraz sposobu ich korekcji.

Podstawowym elementem toru pomiarowego zabezpieczenia jest człon pomiarowy. Jest to przetwornik zamieniający wielkość dostępną pomiarowo y (prąd lub napięcie) na wielkość kryterialną x (rys. 2.1). Struktura członu pomiarowego zabezpieczenia cyfrowego jest pokazana na rys. 2.2. Nie odbiega ona zasadniczo od struktury typowego cyfrowego układu pomiarowego. Układ próbkująco-pamiętający (S/H) jest umieszczony zwykle przed multiplekserem analogowym (MPX), co umożliwia jednoczesne próbkowanie wielu mierzonych sygnałów.

Z punktu widzenia rozważań prowadzonych w pracy, najistotniejsze znaczenie ma blok cyfrowego przetwarzania sygnału. W tym bloku jest realizowany podstawowy algorytm zabezpieczenia. Układ ten jest zwykle wykonany w postaci wieloprocessorowego systemu cyfrowego [100].



Rys. 2.2. Struktura członu pomiarowego zabezpieczenia cyfrowego
 Fig. 2.2. Block diagram of the power protection measuring digital subsystem

2.2. Błędy członu pomiarowego zabezpieczeń cyfrowych

Jak wspomniano, zadaniem członu pomiarowego zabezpieczenia jest określenie wielkości kryterialnej x . W sensie metrologicznym oznacza to przetworzenie dostępnej wielkości wejściowej y w wielkość x (rys.2.2). W pierwszym etapie syntezy algorytmu pomiarowego, wielkość wejściowa y jest reprezentowana przez wyidealizowaną wartość y' , w której nie uwzględnia się zakłóceń. W ten sposób funkcja członu pomiarowego jest określona operacją, która definiuje obiekt pomiaru [169]:

$$x(t) = F\{y'(t)\} , \quad (2.1)$$

gdzie: operator $F\{\cdot\}$ oznacza postulowane równanie przetwarzania członu pomiarowego.

W przypadku zabezpieczeń cyfrowych mamy do czynienia z dyskretną procedurą pomiarową:

$$x(k) = F\{y'(k)\} \quad (2.2)$$

Operator $F\{\cdot\}$ oznacza przetwarzanie idealne, którego praktyczna realizacja jest z różnych względów niemożliwa. Mają na to wpływ niezbędne z powodów techniczno-ekonomicznych uproszczenia procedury pomiarowej, a także zakłócenia w nadzorowanym systemie, objawiające się w postaci innego niż założono sygnału wejściowego oraz w samym członie pomiarowym (rys. 2.3). Zatem, zamiast procedury (2.2) wynik pomiaru będzie określony przez następującą zależność:

$$\hat{x}(k) = F_r\{y'(k), v(k), w(k)\} , \quad (2.3)$$

gdzie: $F_r\{\cdot\}$ - operator rzeczywistego przetwarzania.

Należy podkreślić, że w ogólnym przypadku operatory $F\{\cdot\}$, $F_r\{\cdot\}$ nie są funkcjami, w związku z czym, np. ich argumenty mogą być przesunięte w czasie.

Pomiar według zależności (2.3) jest obarczony błędem, którego wartość chwilowa jest określona następująco:

$$\tilde{x}(k) = \hat{x}(k) - x(k) \quad (2.4)$$

Przedmiotem pracy jest analiza i ocena błędów związanych przede wszystkim z cyfrowym przetwarzaniem sygnałów w członie pomiarowym. Błędy w pozostałych elementach toru pomiarowego będą analizowane jedynie z punktu widzenia ich wpływu na wybór podstawowego algorytmu pomiarowego. Nie są również rozpatrywane błędy na skutek starzenia lub działania czynników losowych na układ pomiarowy.

Człon pomiarowy zabezpieczenia cyfrowego jest przetwornikiem pomiarowym, w którym sygnał wyjściowy jest określony w rezultacie następujących działań:

- normalizacji amplitudy sygnału wejściowego oraz jego filtracji (analogowej);
- dyskretyzacji w czasie oraz w poziomie;
- wykonania cyfrowego algorytmu pomiarowego w układzie o znanych parametrach.

Podział źródeł błędów jest uzależniony od sposobu i celu ich dalszej analizy. Z punktu widzenia projektowania oraz analizy pracy zabezpieczeń w różnych stanach systemu elektroenergetycznego uzasadnione jest wyszczególnienie następujących grup błędów:

- a) błędy aparaturowe, których źródłem są czynniki fizyczne;
- b) błędy algorytmiczne, których źródłem jest przyjęta metoda pomiarowa;
- c) błędy wynikające ze struktury zabezpieczenia.

Pierwsze z nich są związane z charakterystykami analogowych i cyfrowych przetworników użytych do budowy członu pomiarowego. Podstawowe z nich to:

- graniczna częstotliwość próbkowania i przetwarzania A/C,
- długość słowa przetwornika A/C,
- długość słowa rejestrów operacyjnych i pamięci procesora.

Błędy algorytmiczne są związane z założoną procedurą pomiarową (algorytmem pomiaru wielkości kryterialnej). Procedura ta jest określana na podstawie przyjętego modelu zjawisk w nadzorowanym systemie (modelu sygnału odniesienia) oraz wymaganej funkcji zabezpieczenia.

Błędy wynikające ze struktury zabezpieczenia są związane z przyjętą koncepcją określania miejsca i charakteru zakłócenia oraz sposobu i zakresu zbierania informacji. Na przykład, błąd oszacowania miejsca

zwarcia w nadzorowanej linii można znacznie zredukować, jeśli pomiar będzie prowadzony na obu jej końcach. Ograniczenie liczby i zakresu pomiarów jest podyktowane czynnikami techniczno-ekonomicznymi. Analiza takich błędów wykracza poza kategorie metrologiczne, ma natomiast ścisły związek ze wspomnianą techniczną doskonałością zabezpieczenia. Czynniki te nie będą bezpośrednio analizowane w niniejszej pracy.

Inny podział błędów może wynikać z czysto metrologicznego podejścia do analizy działania członu pomiarowego. Prowadzi to do określenia jego charakterystyk metrologicznych, takich jak na przykład klasa niedokładności [103]. W elektroenergetyce stosuje się je w odniesieniu do układów pomiarowych, wspomagających prowadzenie ruchu w systemie lub do rozliczeń ekonomicznych. Z powodów, o których wspomniano na początku niniejszego rozdziału, w stosunku do układów automatyki zabezpieczeniowej takie podejście nie jest stosowane.

Konsekwencją tych założeń jest uproszczenie definicji błędów. Przede wszystkim nie uwzględnia się takich parametrów, jak: temperatura, czas eksploatacji urządzenia oraz inne czynniki środowiskowe, nie związane bezpośrednio z obserwowanym procesem. Wynika stąd również ograniczenie liczby źródeł błędów, które będą rozpatrywane w dalszej części pracy.

Zależność (2.3) jest zdefiniowana w stosunku do warunków odniesienia, które zazwyczaj oznaczają ustalony obszar pracy nadzorowanego systemu i układu pomiarowego. Błąd ze wzoru (2.4) zależy wówczas od czynników losowych i tzw. błędu wzorcowania [103]. W przypadku procedury cyfrowego przetwarzania sygnałów błąd wzorcowania można łatwo wyeliminować.

Pomiar wykonywany przez zabezpieczenie jest z natury rzeczą pomiarem dynamicznym. Wprawdzie mierzone są takie "statyczne" wielkości, jak wartość skuteczna prądu lub napięcia, jednak właściwości dynamiczne całego układu istotnie wpływają na dokładność pomiaru z punktu widzenia jego zastosowania. Zatem zamiast równania (2.3) należałoby stosować odpowiednią procedurę dynamiczną, która "nadaża" za zmianami mierzonej wielkości. Jeśli jednak procedura (2.3) została wzorcowana (wyskalowana) w stosunku do stanu ustalonego mierzonej wielkości, to każda jej zmiana spowoduje wystąpienie dynamicznego błędu pomiaru.

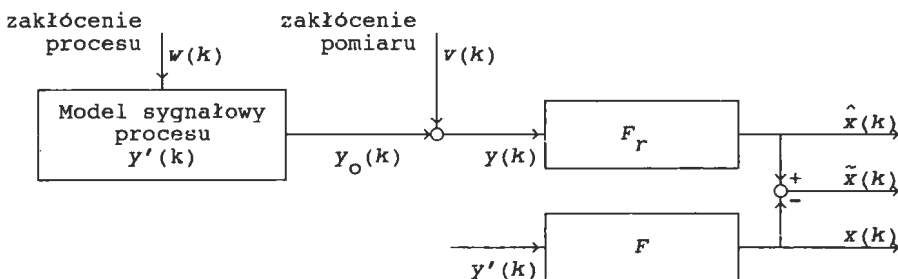
Spotkać można wiele różnych definicji błędu dynamicznego [72], [103], [169]. Ponieważ w rozważanym przypadku z założenia mamy do czynienia z pomiarem dynamicznym, więc można przyjąć, że błąd dynamiczny jest określony przez zależność (2.4). Oznacza to, że wartość chwilowa błędu dynamicznego jest różnicą między wynikiem operacji zrealizowanej (2.3) a zdefiniowanym obiektem pomiaru (2.2).

W wielu rozważanych dalej algorytmach, przy braku zakłóceń,

występuje stan ustalony mierzonej wielkości. Wówczas błąd dynamiczny można określić względem stanu ustalonego odpowiedzi:

$$\tilde{x}_d(k) = \hat{x}(k) - x_{ust}(k) \quad (2.5)$$

Ta uproszczona definicja błędu ułatwia analizę dużej klasy rozważanych w pracy algorytmów. Zakłada się przy tym, że w warunkach odniesienia procedury $F_r\{\cdot\}$ i $F\{\cdot\}$ dają jednakowy wynik dla sygnału ustalonego: $\{x_{ust}(k) = F_r\{y(k)\} = F\{y(k)\}\}_{k \rightarrow \infty}$. Na rysunku 2.3 przedstawiono model zakłóceń pomiaru sygnałów zabezpieczeniowych.



Rys. 2.3. Model zakłóceń pomiaru sygnałów zabezpieczeniowych
Fig. 2.3. Representation of errors in power system protection measurements

Stosowane są także inne miary błędu dynamicznego, takie jak: błąd maksymalny lub średniokwadratowy [169].

2.3. Modele matematyczne sygnałów wejściowych zabezpieczeń

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że charakter procedury pomiarowej i dokładność pomiaru w istotny sposób zależą od modelu sygnału wejściowego oraz występującego zakłócenia. Z punktu widzenia analizy procedur pomiarowych stosowanych w zabezpieczeniach (a również w układach sterowania), pomiar można rozpatrywać jako identyfikację parametrów modelu sygnałowego. Takie określenie może być dopuszczone, jeśli analiza algorytmu będzie rozszerzona o badanie adekwatności przyjętego modelu do sygnału rzeczywistego. Oznacza to, że model sygnałowy procesu powinien odzwierciedlać podstawowe jego cechy, idealizując je. W ten sposób konkretna realizacja procesu może być opisana modelami procesu i zakłóceń. Model sygnałowy jest również ściśle powiązany z charakterem wielkości kryterialnych zabezpieczenia.

W zależności od sposobu opisu błędów pomiarowych i zjawisk związanych z generacją sygnałów dzieli się modele sygnałowe na dwie następujące grupy:

- deterministyczne,
- stochastyczne.

W modelu deterministycznym zarówno sygnał odniesienia, jak i zakłócenie są zdeterminowanymi funkcjami czasu o poszukiwanych parametrach. Ze względu na charakter procesów przejściowych, występujących podczas zakłóceń w systemie elektroenergetycznym, najbardziej szczegółowe modele tej grupy mają zazwyczaj strukturę różną dla prądu i napięcia. Przebieg prądu może być wyrażony następującym równaniem:

$$i(t) = I_1 \cos(\omega_1 t - \psi_1) + I_a \exp(-t/T_a) + \sum_{k=2}^n I_k \cos(\omega_k t - \psi_k) + \sum_{j=2}^m I_{aj} \exp(-t/T_{aj}) \cos(\omega_j t - \psi_j), \quad (2.6)$$

gdzie: m, n - liczba odpowiednich składowych oscylacyjnych prądu.

W przebiegu napięcia zazwyczaj nie występuje składowa aperiodyczna.

Konieczność uzyskania szybkiej odpowiedzi członu pomiarowego zabezpieczeń wymaga stosowania uproszczonych modeli sygnałowych. Większość algorytmów pomiarowych opiera się na założeniu, że zasadnicza informacja o stanie nadzorowanego obiektu jest zawarta w podstawowej harmonicznej sygnału prądu lub napięcia. Model sygnałowy może być w tym przypadku określony w postaci fazora wymuszającej składowej harmonicznej:

$$y_O(t) = X \exp\{j(\omega_1 t - \psi)\} = X \cos(\omega_1 t - \psi) + j X \sin(\omega_1 t - \psi) \quad (2.7)$$

Fazę sygnału (2.7), określoną kątem ψ , wygodnie jest rozdzielić na dwie składowe:

$$\psi = \varphi - \alpha,$$

gdzie: α - kąt wskazujący na moment obserwacji przebiegu (punkt odniesienia),

φ - faza sygnału względem tego punktu odniesienia.

Jeśli model mierzonego sygnału y odpowiada części rzeczywistej fazora (2.7), to otrzymamy:

$$y_O(t) = X \cos(\omega_1 t - \varphi + \alpha) = x_S \sin(\omega_1 t + \alpha) + x_C \cos(\omega_1 t + \alpha), \quad (2.8)$$

gdzie: $x_S = X \sin(\varphi)$,

$$x_C = X \cos(\varphi).$$

Składniki prawej strony równania (2.8) są określone przez składowe ortogonalne, odpowiednio: synfazową (x_C) oraz kwadraturową (x_S) względem sygnału y [165].

Model sygnału wejściowego y może być w podobny sposób rozszerzony o dodatkowe wielkości uwzględniające składową aperiodyczną oraz wyższe

harmoniczne. Liczba składników równania (2.8) jest często nazywana rzędem modelu sygnałowego.

Modele stochastyczne są określane przez charakterystyki probabilistyczne. Ich forma bywa różnorodna, jednak w rozpatrywanych tutaj zagadnieniach modele stochastyczne są określane na wzór modeli deterministycznych, z tym że niektóre ich parametry mają charakter losowy. W związku z tym często nazywa się je modelami quasi-deterministycznymi (gdy model stochastyczny powstał przez stochastyczne uzmiennienie jakiegoś parametru modelu deterministycznego [133], [165]).

W ogólnym przypadku model stochastyczny przedstawia mierzony sygnał w postaci sumy sygnału użytecznego (odniesienia) $y_0(t)$ oraz sygnału błędu $v(t)$:

$$y(t) = y_0(t) + v(t) \quad (2.9)$$

Sygnał użyteczny $y_0(t)$ jest przedstawiany modelem deterministycznym lub probabilistycznym o znanej strukturze i nieznanymi parametrach. Sygnał błędu jest przedstawiany modelem probabilistycznym. Zazwyczaj zakłada się, że modelem sygnału błędu jest szum biały normalny. Sygnał ten jest stacjonarny, ma zerową wartość średnią i charakteryzuje się rozkładem normalnym o znanej wariancji σ^2 :

$$E\{x(t)\} = 0, \quad (2.10)$$

$$\text{var}\{v(t)\} = E\{v^2(t)\} = \sigma^2$$

Takie założenia są przyjmowane ze względu na możliwość stosowania bardzo efektywnego algorytmu estymacji optymalnej w postaci filtru Kalmana. Wartość oczekiwana błędu estymacji jest wówczas zerowa, a wariancja błędu zależy od gęstości mocy zakłóceń i czasu pomiaru. Ten model zakłóceń jest również potwierdzony badaniami symulacyjnymi dla dużej klasy obiektów [42], [148]. W przypadku znacznej rozbieżności między widmem empirycznym i założonym modelem można próbować zmieniać strukturę modelu lub godzić się na estymację suboptymalną.

Struktura modelu sygnału użytecznego zależy od charakteru zabezpieczonego obiektu i jest ściśle powiązana z procedurą pomiarową. Na przykład, analogicznie do (2.8), dwustanowy sygnałowy model probabilistyczny jest wyrażony równaniem:

$$y(t) = x_s \sin(\omega_1 t + \alpha) + x_c \cos(\omega_1 t + \alpha) + v(t) \quad (2.11)$$

Sposób uwzględniania zakłóceń procesu $w(t)$ będzie podany w dalszej części pracy.

Zjawiska zachodzące w obiektach elektroenergetycznych są postrzegane jako procesy ciągłe, natomiast procedury pomiarowe zabezpieczeń cyfrowych operują na dyskretnych modelach sygnałowych. Postacie dyskret-

na i ciągła są powiązane znanymi zależnościami wynikającymi z twierdzenia o próbkowaniu [95]. Niektóre techniczne i analityczne aspekty związane z konwersją analogowo-cyfrową będą poruszone w dalszej części pracy.

Model dyskretny można otrzymać przez dyskretyzację czasu w równaniach modelu ciągłego:

$$t_k = kT, \quad t_{k+1} = kT + T, \quad (2.12)$$

gdzie: k - numer próbek.

Dyskretna postać równania (2.11) jest wówczas następująca:

$$y(t_k) = y(k) = x_s \sin(\nu k + \alpha) + x_c \cos(\nu k + \alpha) + v(k), \quad (2.13)$$

gdzie:

$$\nu = \omega_1 T = \frac{2\pi T}{T_1} = \frac{2\pi}{N}$$

W równaniu (2.13) zakłada się równomierne próbkowanie o częstotliwości:

$$f_T = \frac{N \omega_1}{2\pi} = \frac{\omega_1}{\nu} = \frac{1}{T} \quad (2.14)$$

W algorytmach pomiarów cyfrowych są przetwarzane ciągi kolejnych próbek mierzonego sygnału. Jeżeli jest znana długość K takich ciągów, to równanie (2.13) powtarza się dla $k = 0, 1, \dots, K-1$, co wygodnie jest przedstawić w zapisie macierzowym:

$$Y = H X + V, \quad (2.15)$$

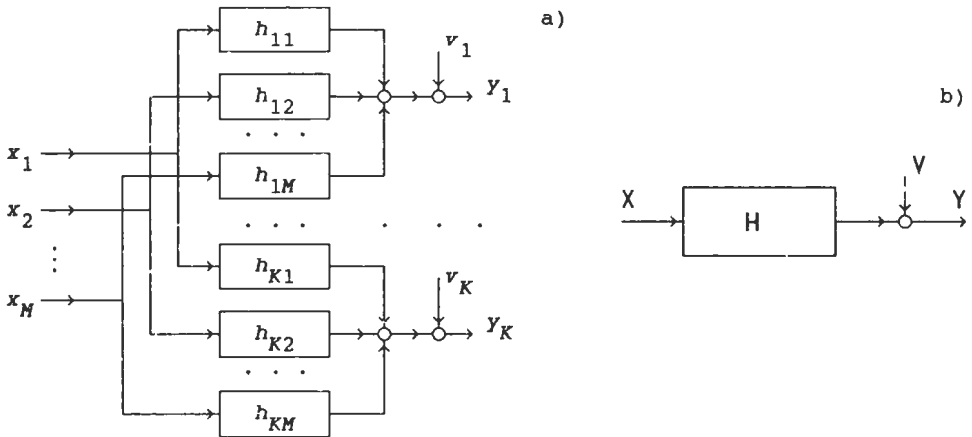
gdzie:

$$\begin{aligned} Y &= [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_K]^T - \text{wektor pomiarów,} \\ X &= [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_M]^T - \text{wektor parametrów modelu,} \\ H &- \text{macierz bazowa modelu } (K \times M) \text{ (macierz modelu),} \\ V &= [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_K]^T - \text{wektor błędów pomiaru,} \\ K &- \text{liczba pomiarów,} \\ M &- \text{liczba parametrów modelu.} \end{aligned}$$

Struktura tego modelu sygnałowego jest przedstawiona na rys. 2.4. Z porównania z rys. 2.3 można wnioskować, że modele procesu generacji sygnału i jego pomiaru są wzajemnie odwrotne.

Model określony równaniem (2.15) jest znany jako ogólny liniowy model regresji [103]. Ze względu na swą postać jest także nazywany modelem o strukturze równoległej (nierekursywnej). Charakteryzuje się on tym, że wiąże ze sobą K kolejnych pomiarów, dla których parametry modelu X są stałe. Dla rozpatrywanego wcześniej modelu dwustanowego równanie (2.15) przyjmuje następującą postać:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \\ \sin(\nu+\alpha) & \cos(\nu+\alpha) \\ \vdots & \vdots \\ \sin(\nu(K-1)+\alpha) & \cos(\nu(K-1)+\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ x_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_K \end{bmatrix} \quad (2.16)$$



Rys. 2.4. Struktura równoległego (nierekursywnego) modelu sygnałowego
Fig. 2.4. Nonrecursive batch processor of a signal model

Jeśli w modelu sygnałowym zostaną uwzględnione również inne składowe, to wyrazi się w odpowiedniej rozbudowie macierzy H oraz wektorów X i V . Na przykład, gdy do modelu zostanie włączona trzecia harmoniczna identyfikowanego sygnału, wówczas równanie (2.13) przyjmie następującą postać:

$$y(k) = x_s \sin(\nu k + \alpha) + x_c \cos(\nu k + \alpha) + x_{s3} \sin(3\nu k + \alpha) + x_{c3} \cos(3\nu k + \alpha) + v(k), \quad k = 0, 1, \dots, K-1 \quad (2.17a)$$

gdzie: x_{s3} , x_{c3} - parametry modelu trzeciej harmonicznej sygnału.

Macierz H modelu sygnałowego jest w tym przypadku zbudowana z następujących wierszy:

$$H_j = [\sin(\nu(j-1)+\alpha) \quad \cos(\nu(j-1)+\alpha) \quad \sin(3\nu(j-1)+\alpha) \quad \cos(3\nu(j-1)+\alpha)] \quad (2.17b)$$

Rekursywna postać równania (2.15) umożliwi uwzględnienie zmiany parametrów procesu dla kolejnych próbek mierzonego sygnału. Model sygnałowy można wówczas opisać za pomocą znanych równań w przestrzeni stanów [2]:

$$X(k+1) = A(k) X(k) + W(k) , \quad (2.18a)$$

$$Y(k) = H(k) X(k) + V(k) \quad (2.18b)$$

Macierz pomiaru H jest często (zwłaszcza w teorii sterowania) oznaczana przez C . Przyjęte oznaczenie jest uzasadnione tym, że macierz ta wywodzi się z macierzy modelu H w nierekursywnej reprezentacji sygnału. Należy jednak zauważyć, że struktura tej macierzy jest w obu przypadkach odmienna. Także liczba pomiarów K w modelach (2.15) i (2.18) ma inne znaczenie, co można dostrzec, porównując rysunki 2.4 i 2.5.

W przypadku modelu stacjonarnego, macierze $A(k)$, $H(k)$, $W(k)$ i $V(k)$ nie zależą od czasu: $A(k) = A$, $H(k) = H$, $W(k) = W$, $V(k) = V$.

Struktura modelu (2.18) jest pokazana na rys. 2.5. Liczba wyjść jest w rozpatrywanym zastosowaniu równa jedności, a macierz H przekształca się w M -elementowy wektor.

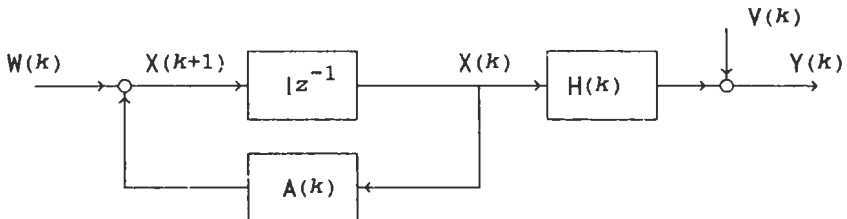
Model stanowy może odnosić się również do systemu deterministycznego. Wtedy wektory losowe $W = V = 0$, natomiast równania przekształcają się do postaci:

$$X(k+1) = A(k) X(k) , \quad (2.19a)$$

$$Y(k) = H(k) X(k) \quad (2.19b)$$

Pominięcie zakłóceń w tych równaniach nie oznacza bynajmniej, że pomiar jest dokładny. Analityczne konsekwencje tych założeń będą rozpatrzone przy okazji syntezy algorytmów pomiarowych.

Struktura macierzy w podanych równaniach zależy od przyjętej liczby stanów oraz od założenia co do stacjonarności modelu.



Rys. 2.5. Struktura rekursywnego modelu sygnałowego
Fig. 2.5. Recursive signal model

W modelu stacjonarnym elementy wektora stanu X są w warunkach ustalonych współrzędnymi fazorów, wirujących z prędkością kątową, odpowiadającą poszczególnym harmonicznym sygnałom. W modelu dwustanowym określają one położenie fazona podstawowej harmonicznej, a macierze modelu mają następującą strukturę:

$$A(k) = A = \begin{bmatrix} \cos(\nu) & \sin(\nu) \\ -\sin(\nu) & \cos(\nu) \end{bmatrix},$$

$$H(k) = H = [0 \quad 1] \quad (2.20)$$

W modelu niestacjonarnym elementy wektora stanu podstawowej harmonicznej przedstawiają współrzędne nieruchomego fazora. Struktura macierzy modelu jest wówczas następująca:

$$A(k) = A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$H(k) = [\sin(\nu k) \quad \cos(\nu k)] \quad (2.21)$$

W obu przypadkach wektor stanu ma postać: $Y(k) = [x_1(k) \quad x_2(k)]^T = [x_s(k) \quad x_c(k)]^T$, a macierz Y jest skalarem przedstawiającym sygnał wyjściowy obserwowanego systemu. Niestacjonarność modelu jest zatem związana z postacią równań stanu - w przypadku (2.21) macierz H jest zmienna w czasie. Ze względu na okresowość jej wyrazów model ten jest niekiedy nazywany cyklostacjonarnym.

Przedstawione modele sygnałowe procesu obserwowanego przez zabezpieczenie są podstawą syntezy odpowiednich procedur pomiarowych, które omówiono w kolejnych rozdziałach pracy. Ze względu na częste odwoływanie się do wymienionych dwóch modeli będą one dalej skrótowo nazywane odpowiednio: **modelem regresji** - o strukturze jak w zależności (2.15) oraz **modelem zmiennych stanu** - o strukturze jak w równaniach (2.18) lub (2.19).

3. ESTYMACJA PARAMETRÓW MODELI SYGNAŁOWYCH

3.1. Wprowadzenie

Ze względu na duże zróżnicowanie procesów przejściowych występujących w czasie zakłóceń w systemie elektroenergetycznym, w charakterze wielkości kryterialnych przyjmuje się różne wielkości fizyczne, na podstawie których można w najlepszy sposób ocenić stan nadzorowanych obiektów. Proces przetwarzania sygnałów pomiarowych w wielkości kryterialne odbywa się zazwyczaj w dwóch następujących etapach:

- wstępne przetwarzanie sygnałów,
- właściwy pomiar wielkości kryterialnych.

Podział ten jest umowny i w dużym stopniu uzasadniony stosowaniem odmiennych metod przetwarzania sygnałów w obu wymienionych etapach.

Wstępne przetwarzanie sygnałów, któremu poświęcony jest bieżący i

następny rozdział, ma na celu kształtowanie odpowiednich charakterystyk częstotliwościowych i dynamicznych całego algorytmu oraz formowanie sygnałów pośrednich o zadanych wzajemnych zależnościach czasowych. Są one powiązane z wielkościami dostępnymi pomiarowo za pomocą modeli sygnałowych. Zatem ta faza przetwarzania sygnałów sprowadza się do oceny (estymacji) parametrów modeli sygnałowych. Parametrami tymi są najczęściej **składowe ortogonalne fazora podstawowej harmonicznej sygnału prądu lub napięcia.**

Ważną cechą charakteryzującą poszczególne metody estymacji jest błąd oceny szukanych parametrów. W większości przypadków stosuje się średniokwadratowe kryterium oceny tego błędu [148]. Wywodząca się stąd **metoda najmniejszych kwadratów (MNK)** jest podstawową procedurą w procesie projektowania cyfrowych estymatorów parametrów sygnałów.

W niniejszym rozdziale przedstawiono zasady syntezy algorytmów wywodzących się z metody najmniejszych kwadratów, w których model pomiarowy jest zapisany w formie równań regresji lub równań stanu.

Wyjściowym założeniem w pierwszym przypadku jest niezmienność parametrów modelu w zbiorze obserwacji (leżących w oknie pomiarowym), na podstawie których dokonuje się oceny ich wartości. Podstawowy algorytm estymacji ma zatem postać nierekursywną (jednoczesne przetwarzanie wszystkich pomiarów). W zakończeniu rozdziału dokonano analizy wariancji błędów tych algorytmów.

Rekursywna wersja MNK oparta jest na przedstawieniu sygnałowego modelu procesu w postaci równań stanu. Umożliwia to uniknięcie ograniczeń odnośnie do niezmienności parametrów modelu, które są w tym przypadku przedstawione w postaci wektora stanu. Znanym sposobem identyfikacji tego wektora jest zastosowanie obserwatora stanu [63]. Po spełnieniu pewnych założeń metoda ta prowadzi do filtracji Kalmana. Wywodzące się stąd algorytmy będą omówione w dalszej części pracy.

3.2. Metoda najmniejszych kwadratów

3.2.1. Matematyczne podstawy metody

Metoda najmniejszych kwadratów jest najbardziej rozpowszechnionym kryterium oceny dokładności procedur pomiarowych. Algorytmy oparte na MNK są równocześnie wygodnym narzędziem wygładzania (filtracji) sygnałów przedstawiających dane pomiarowe.

W klasycznej postaci MNK odnosi się do modelu pomiarowego, wyrażonego w formie równań regresji (2.15):

$$Y = H X + V , \quad (3.1)$$

dla którego poszukuje się modelu wyników pomiaru, opisanego związkiem [83]:

$$\hat{Y} = H \hat{X} \quad (3.2)$$

Idea metody najmniejszych kwadratów polega na określeniu takich estymat \hat{x}_j parametrów modelu, dla których suma kwadratów błędów estymacji pomiarów:

$$e_i = \hat{y}_i - y_i, \quad i=1,2,\dots,K \quad (3.3)$$

jest najmniejsza.

W ogólnej metodzie najmniejszych kwadratów, w charakterze kryterium estymacji, jest stosowana ważona suma kwadratów błędów (3.3):

$$J_2 = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K g_{ij} e_j e_i = \varepsilon^T G \varepsilon \quad (3.4)$$

Miara J_2 , zgodnie z równaniami (3.2) oraz (3.3), jest funkcją poszukiwanych estymat określonych wektorem \hat{X} . Minimalna wartość tej miary względem wektora \hat{X} występuje wówczas, gdy spełnione są następujące warunki:

$$\frac{\partial J_2}{\partial \hat{x}_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (3.5)$$

co można napisać w postaci macierzowej:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_2}{\partial \hat{X}} &= \frac{\partial}{\partial \hat{X}} \left[(H \hat{X} - Y)^T G (H \hat{X} - Y) \right] = \\ &= 2 H^T G H \hat{X} - 2 H^T G Y = 0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

skąd otrzymuje się tzw. równanie normalne:

$$H^T G H \hat{X} = H^T G Y, \quad (3.7)$$

które jest podstawą syntezy wielu algorytmów pomiarowych. Stąd, estymata wektora parametrów X jest określona równaniem:

$$\hat{X} = P_G H_G^T Y, \quad (3.8)$$

gdzie:

$$P_G = (H_G^T H)^{-1}, \quad (3.9)$$

$$H_G^T = H^T G. \quad (3.10)$$

Z równaniami (3.8)-(3.10) łączą się bardzo użyteczne własności

statystyczne MNK. Jeśli elementy wektora błędów modelu sygnałowego V (3.1) są nieskorelowane i podlegają rozkładowi normalnemu z wartością oczekiwaną:

$$E(V) = 0 \quad (3.11)$$

oraz macierzą kowariancji:

$$R = E(V V^T) , \quad (3.12)$$

a macierz wagowa jest wybrana zgodnie z zależnością [168]:

$$G = \sigma^2 R^{-1} , \quad (3.13)$$

gdzie: $\sigma^2 = E(v^2)$ - wariancja błędu pomiaru wielkości y ,

to estymator (3.8) charakteryzuje się minimalną wariancją błędów estymacji [9]. Ponadto, na podstawie założenia (3.11), z uwzględnieniem równań (3.1) oraz (3.8)-(3.10), łatwo wykazać, że błąd estymacji wektora χ :

$$\tilde{\chi} = \hat{\chi} - \chi \quad (3.14)$$

ma wartość oczekiwaną:

$$E(\tilde{\chi}) = 0 \quad (3.15)$$

(estymator jest nieobciążony), a P_G (ściślej: $\sigma^2 P_G$ - punkt 3.4) jest macierzą kowariancji błędów estymacji. Równanie (3.8) wraz z warunkami (3.9)-(3.15) tworzy nierekursywny algorytm estymacji Gaussa-Markowa. Pierwiastki kwadratowe z elementów diagonalnych macierzy P_G (odchylenie standardowe) można uważać za błędy pomiarowe estymaty $\hat{\chi}$ [10]. Przy spełnieniu warunków (3.11)-(3.13) błędy te są najmniejsze.

Jeśli założyć, że błędy v wszystkich pomiarów są jednakowe, to macierz kowariancji (3.12) jest określona następująco:

$$R = \sigma^2 I \quad (3.16)$$

W modelu deterministycznym elementy macierzy wagowej G określają znane a priori warunki poszczególnych pomiarów (stopień ich dokładności). Równanie (3.16) odpowiada wówczas założeniu, że macierz wagowa $G = I$ ($\sigma^2 = 1$), co jest równoważne temu, że brak jest statystycznej informacji a priori o wielkościach estymowanych. W tym przypadku algorytm (3.8) przyjmuje następującą postać:

$$\hat{\chi} = P H^T Y , \quad (3.17)$$

gdzie:

$$P = (H^T H)^{-1} . \quad (3.18)$$

Jest to tzw. nierekursywny algorytm Gaussa [9].

Równanie (3.17) przedstawia podstawowy algorytm MNK, podczas gdy równanie (3.8) odpowiada postaci uogólnionej lub zmodyfikowanej. Modyfikacja algorytmu podstawowego jest dokonana przez znaną a priori macierz wagową G . Macierz H jest tutaj macierzą modelu sygnałowego, natomiast macierz H_G uwzględnia warunki pomiaru i jest w dalszym ciągu nazywana macierzą modelu pomiarowego. W podstawowym algorytmie estymacji $H_G = H$.

Macierz P (oraz P_G) ma następującą strukturę:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1M} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{M1} & P_{M2} & \cdots & P_{MM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1M} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{M1} & q_{M2} & \cdots & q_{MM} \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.19)$$

Na podstawie wzoru (3.18) (lub (3.9)) wyrazy q_{ij} można obliczyć według zależności:

$$q_{ij} = \sum_{l=1}^K h_{li}^* h_{lj} \quad (3.20)$$

gdzie:

h_{lj} - wyrazy macierzy H ,

$$h_{li}^* = \sum_{j=1}^K h_{jl} g_{ji} \quad (3.21)$$

Można zauważyć, że dla $G = I$, $H_G = H$, zatem: $h_{li}^* = h_{il}$.

Po uwzględnieniu zależności (3.19)-(3.21) algorytm estymacji (3.8) można napisać w następującej postaci skalarnej:

$$\hat{x}_i = \sum_{j=1}^K \left(\sum_{l=1}^M P_{il} h_{jl}^* \right) y_j, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (3.22)$$

W równaniu (3.22) wyrażenie ujęte w nawiasy jest zależne od przyjętego modelu pomiarowego, a odpowiadające mu wartości mogą być obliczone wcześniej, poza procesem estymacji.

Wyrażenia (3.8) (postać wektorowa) oraz (3.22) (postać skalarna) przedstawiają rozwiązanie układu równań algebraicznych, które dla $K > M$ są nadokreślone. Dodatkowo, elementy diagonalne macierzy P_G przedstawiają wariancję błędów tego rozwiązania. W przypadku modelu dwustanowego układ równań ma postać (2.16).

Na podstawie równania (3.22) można sformułować następujące wnioski, przydatne w projektowaniu rozpatrywanych estymatorów:

- Pomimo rozbudowanego niekiedy modelu sygnałowego (modelu wysokiego rzędu), spośród M wielkości estymowanych \hat{x}_i , w algorytmach zabezpieczeń cyfrowych korzysta się tylko z niektórych z nich. Są to przede wszystkim estymaty określające składową podstawową obserwowanego

sygnału. Pozostałe estymaty określają parametry wyższych harmonicznych lub składowej aperiodycznej i zazwyczaj nie ma potrzeby ich obliczania.

- Uproszczenie algorytmu można uzyskać przez zmniejszenie liczby mnożeń w poszczególnych składnikach (3.22). Można tego dokonać przez odpowiedni dobór macierzy H_G (od której również zależy macierz P_G), zwłaszcza, jeśli macierz P_G jest diagonalna, to estymatory składowych ortogonalnych sygnału harmonicznego są określone równaniami (3.8), gdzie:

$$\hat{X} = [\hat{x}_S \quad \hat{x}_C]^T,$$

$$Y = [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_K]^T = [y(0) \quad y(1) \quad \dots \quad y(K-1)]^T, \quad (3.23)$$

$$H_G^T = \begin{bmatrix} H_S \\ H_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_S(0) & h_S(1) & \dots & h_S(K-1) \\ h_C(0) & h_C(1) & \dots & h_C(K-1) \end{bmatrix},$$

$$P_G = \text{diag} [p_1 \quad p_2] = \text{diag} [p_S \quad p_C]$$

Po uwzględnieniu wprowadzonych oznaczeń można napisać następujące równania estymatorów składowych ortogonalnych sygnału:

$$\hat{x}_S = p_S \sum_{j=0}^{K-1} h_S(j) y(j),$$

$$\hat{x}_C = p_C \sum_{j=0}^{K-1} h_C(j) y(j), \quad (3.24)$$

gdzie: p_S, p_C - diagonalne elementy macierzy P_G w wierszach, odpowiadających składowym \hat{x}_S oraz \hat{x}_C ,

$h_S(j), h_C(j)$ - elementy wierszy macierzy H_G^T , odpowiadające składowym \hat{x}_S oraz \hat{x}_C .

Na ich podstawie można określić amplitudę i fazę sygnału:

$$\hat{X} = \sqrt{\hat{x}_S^2 + \hat{x}_C^2},$$

$$\hat{\varphi} = \arctan \frac{\hat{x}_S}{\hat{x}_C} \quad (3.25)$$

Jeśli zostanie wybrany taki model pomiarowy, że współczynniki h_S, h_C będą przyjmować wartości całkowite, (a zwłaszcza 1, -1), to obliczanie estymat zgodnie z wzorem (3.24) staje się bardzo proste. Modyfikacja macierzy H może również prowadzić do pożądanej zmiany częstotliwościowych lub dynamicznych własności tych estymatorów.

Modyfikacje estymatora podstawowego (3.17) mogą być przeprowadzone

za pomocą macierzy wagowej G zgodnie z wzorami (3.8)-(3.10). Jednak zazwyczaj wygodniej jest tego dokonać bezpośrednio przez dobór macierzy H_G . Macierz wagowa jest wtedy określona następującym równaniem (na podstawie (3.10)):

$$G = H (H^T H)^{-1} H_G = H P H_G \quad (3.26)$$

Należy zauważyć, że modyfikacje algorytmu podstawowego mogą prowadzić do naruszenia warunków optymalnej estymacji, co wiąże się ze wzrostem wariancji błędów. Jeśli macierz G jest niediagonalna, to błędy pomiarowe są wzajemnie zależne. Korekty mogą być jednak celowe, jeśli w ich wyniku uzyska się istotne korzyści obliczeniowe lub poprawę pożądanych właściwości algorytmu.

W procesie projektowania opisanych algorytmów wychodzi się zatem od określenia macierzy modelu pomiarowego H_G , która jest utworzona na podstawie funkcji zachowujących geometryczne podobieństwo z modelem obserwowanego sygnału. Stąd też metody te są często nazywane metodami odwzorowania krzywych (ang. curve fitting technique) [121], [142].

3.2.2. Rekursywny algorytm MNK

Przedstawiony algorytm opiera się na założeniu, że estymowane parametry procesu są stałe w oknie pomiarowym o szerokości, odpowiadającej K ostatnim pomiarom. Podstawowa postać tego algorytmu jest wyrażona w formie równań (3.24). W przypadku estymacji sygnału, procedury te należy powtarzać dla kolejnych zbiorów mierzonych próbek. Proces ten można uprościć, korzystając z rezultatów estymacji w poprzednich krokach. Prowadzi to do algorytmu rekursywnego.

Ogólny rekursywny algorytm MNK wyprowadza się, rozszerzając kryterium minimalnej ważonej sumy kwadratów (3.6) na k kolejnych obserwacji ciągu sygnałowego [168]. Szerokość okna pomiarowego jest przy tym dla każdej obserwacji równa K pomiarów. Wstępnie zakłada się, że dla wszystkich k obserwacji wartość estymowanych parametrów jest stała ($\hat{X} = \hat{X}(k)$).

Dla kolejnej i -tej obserwacji równanie (3.7) przyjmuje następującą postać:

$$H^T(i) G H(i) \hat{X}(k) = H^T(i) G Y(i) \quad (3.27a)$$

Dla wszystkich k obserwacji otrzymamy:

$$\sum_{i=1}^k H^T(i) G H(i) \hat{X}(k) = \sum_{i=1}^k H^T(i) G Y(i) \quad (3.27b)$$

Po wyłączeniu wektora $\hat{X}(k)$ uzyskujemy [168]:

$$\hat{X}(k) = P(k) B(k) , \quad (3.28)$$

gdzie:

$$P^{-1}(k) = \sum_{i=1}^k H^T(i) G H(i) , \quad (3.29a)$$

$$B(k) = \sum_{i=1}^k H^T(i) G Y(i)$$

Jeśli równanie (3.28) zapisać również dla obserwacji $(k-1)$ -szej, to po uproszczeniu uzyska się rekursywną postać wyrażenia (3.29a):

$$P^{-1}(k) = P^{-1}(k-1) + H^T(k) G H(k) , \quad (3.29b)$$

$$B(k) = B(k-1) + H^T(k) G Y(k)$$

Na podstawie tych równań można określić rekursywną postać algorytmu MNK:

$$\hat{X}(k) = \hat{X}(k-1) + P(k-1) H^T(k) [G^{-1} + H(k) P(k-1) H^T(k)]^{-1} [Y(k) - H(k) \hat{X}(k-1)] , \quad (3.30a)$$

$$P(k) = P(k-1) - P(k-1) H^T(k) [G^{-1} + H(k) P(k-1) H^T(k)]^{-1} H(k) P(k-1) , \quad (3.30b)$$

gdzie: $P(k)$, podobnie jak w algorytmie (3.8), jest macierzą kowariancji błędów estymacji.

W tym przypadku można uwzględnić dynamikę procesu generacji wektora X , zakładając, że zmienia się on w kolejnych krokach obserwacji według określonej liniowej zależności.

W warunkach deterministycznych zależność ta jest określana równaniem [9]:

$$X(k+1) = A(k) X(k) , \quad (3.31a)$$

gdzie: $A(k)$ - macierz $(M \times M)$, określająca sposób zmiany wektora X .

Pomiar wówczas odbywa się również zgodnie z założeniami deterministycznymi, zatem w równaniu (3.1) pomija się błędy:

$$Y(k) = H(k) X(k) \quad (3.31b)$$

Struktura równania (3.31b) jest oczywiście inna niż równania (3.1), gdyż tym razem wektor $Y(k)$ przedstawia mierzoną wielkość tylko w jednym kroku. Można zauważyć, że równania (3.31) tworzą deterministyczny model procesu generacji sygnału i jego pomiaru (2.19).

Po podstawieniu równania (3.31a) do (3.30), po niezbędnych prze-

kształceniach oraz uwzględnieniu, że $G = I$, uzyskuje się następujący algorytm MNK dla warunków deterministycznych:

$$\hat{X}(k) = A(k-1) \hat{X}(k-1) + K(k) [Y(k) - H(k) A(k-1) \hat{X}(k-1)], \quad (3.32a)$$

$$P_1(k) = A(k-1) P(k-1) A^T(k-1), \quad (3.32b)$$

$$K(k) = P_1(k) H^T(k) [I + H(k) P_1(k) H^T(k)]^{-1}, \quad (3.32c)$$

$$P(k) = P_1(k) - K(k) H(k) P_1(k) \quad (3.32d)$$

Wyrażenie w nawiasie kwadratowym (3.32a) jest wektorem błędów oceny pomiarów, a $K(k)$ jest macierzą wzmocnienia. Ponieważ nie zależy ona od bieżących parametrów, można ją zatem określić przed rozpoczęciem estymacji.

Równania (3.32b-d), na podstawie których jest obliczany wektor $K(k)$, można także zapisać w następującej formie:

$$P^{-1}(k) = [A^T(k-1)]^{-1} P^{-1}(k-1) A^{-1}(k-1) + H^T(k) H(k), \quad (3.32e)$$

$$K(k) = P(k) H^T(k) \quad (3.32f)$$

Warunek początkowy: $P^{-1}(0) = H^T(0) H(0)$.

Rekursywne rozwiązanie w formie równań (3.32) jest możliwe, gdy macierz $P(k)$ jest nieosobliwa. W przeciwnym razie nie udaje się rozdzielić procesu generacji sygnału od jego pomiaru w przedstawiony sposób [9].

W warunkach probabilistycznych model generacji sygnału jest rozszerzony o stochastyczny proces zakłóceń. Sygnałowy model procesu i pomiarów jest przedstawiony w postaci ogólnych równań stanu (2.18) (model Gaussa-Markowa):

$$X(k+1) = A(k) X(k) + W(k), \quad (3.33a)$$

$$Y(k) = H(k) X(k) + V(k) \quad (3.33b)$$

W odniesieniu do zakłóceń pomiaru $V(k)$ i procesu $W(k)$ zakłada się, że są nieskorelowane w czasie, co oznacza, że ich macierze kowariancji można zapisać następującymi związkami [168]:

$$E[V(i) V^T(j)] = R(i) \delta_{ij}, \quad (3.34a)$$

$$E[W(i) W^T(j)] = Q(i) \delta_{ij}, \quad (3.34b)$$

gdzie:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Zakłada się ponadto, że zakłócenia te mają rozkład normalny z zerową wartością oczekiwaną: $E[W(k)] = E[V(k)] = 0$ oraz są wzajemnie nieskorelowane: $E[V(k) W^T(k)] = 0$.

Zastosowanie modelu (3.33) w równaniach (3.30) prowadzi do rekursywnego rozwiązania MNK w warunkach probabilistycznych. Gdy macierz wagowa zostanie wybrana zgodnie z równaniem (3.13), wówczas rozwiązanie to charakteryzuje się minimalną wariancją błędów estymacji. Uzyskany algorytm jest następujący:

$$\hat{X}(k) = A(k-1) \hat{X}(k-1) + K(k) [Y(k) - H(k) A(k-1) \hat{X}(k-1)], \quad (3.35a)$$

$$P_1(k) = A(k-1) P(k-1) A^T(k-1) + Q(k-1), \quad (3.35b)$$

$$K(k) = P_1(k) H^T(k) [R(k) + H(k) P_1(k) H^T(k)]^{-1}, \quad (3.35c)$$

$$P(k) = P_1(k) - K(k) H(k) P_1(k) \quad (3.35d)$$

Równania te przedstawiają rekursywny algorytm Gaussa-Markowa. W porównaniu z algorytmem (3.31) korzysta się tu z informacji o parametrach błędów procesu i pomiarów, co prowadzi do optymalnej oceny estymowanych wielkości.

Należy zwrócić uwagę na warunki początkowe wymagane do rozpoczęcia rekursywnego rozwiązania:

1. Początkowa wartość macierzy kowariancji $P(0) = \infty$ ($P^{-1}(0) = 0$), co oznacza, że brak jest jakiejkolwiek wstępnej informacji o wartościach wektora $X(0)$ z wyjątkiem tego, że wartość oczekiwana $E[X(0)] = 0$.

2. Pierwsza ocena $\hat{X}(1)$ poszukiwanego rozwiązania może być dokonana po M pomiarach $Y(i)$ na podstawie algorytmu nierekursywnego (3.8). Wynika stąd również minimalna liczba wierszy macierzy H , równa liczbie estymowanych parametrów M .

Można zauważyć, że algorytm (3.35) jest uogólnieniem rekursywnego rozwiązania MNK dla warunków deterministycznych (3.32), gdzie zgodnie z przyjętym modelem: $Q(k) = 0$, $R(k) = I$.

Również w tym przypadku równania (3.35b-d) można przekształcić do następującej postaci:

$$P^{-1}(k) = [A(k-1) P(k-1) A^T(k-1) + Q(k-1)]^{-1} + H^T(k) R^{-1}(k) H(k), \quad (3.35e)$$

$$K(k) = P(k) H^T(k) R^{-1}(k) \quad (3.35f)$$

Gdy są spełnione założone warunki początkowe, wówczas dla $k = 1$ równanie (3.35e) jest równoważne zależności (3.9). Algorytm zbudowany z równań (3.35a) i (3.35e-f) tworzy zatem procedurę "samostartującą" (jeśli macierz $R(k)$ jest nieosobliwa).

Ograniczenia wprowadzone przez wymienione warunki początkowe zostają usunięte w przypadku rekursywnego algorytmu z minimalnym średniokwadratowym błędem estymacji. W tym przypadku zamiast kryterium (3.5)

zakłada się minimalizację kwadratowej normy wektora kowariancji błędów estymacji $E[\tilde{X} \tilde{X}^T]$ [9]:

$$E[(\hat{x}_i - x_i)^2] \rightarrow \min, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (3.36)$$

Prowadzi to do znanego rekursywnego rozwiązania w formie filtru Kalmana, który, przy dodatkowych założeniach o niezależności wektorów błędów estymacji \tilde{X} od mierzonych wielkości Y : $E[\tilde{X} Y] = 0$ oraz od wielkości estymowanych \hat{X} : $E[\tilde{X} \hat{X}^T] = 0$, przyjmuje postać równań (3.35). Warunki początkowe są wtedy określone przez macierz kowariancji $P(0)$, charakteryzującą dokładność oceny początkowej wartości wektora stanu $\hat{X}(0)$, przy czym $E[\hat{X}(0)] = X(0)$. Usunięte jest w tym przypadku ograniczenie co do możliwości odwracania macierzy $R(k)$, gdyż macierz $R^{-1}(k)$ nie występuje w tym algorytmie.

Podane procedury, związane ze stanowym modelem sygnałowym, są podstawą wielu efektywnych metod estymacji sygnałów. Rekursywny algorytm MNK, oparty na stanowym modelu deterministycznym, przybiera postać obserwatora stanu, a jego rozszerzenie na przypadek probabilistyczny wyraża się w postaci filtru Kalmana. Ich analiza zostanie przeprowadzona w dalszej części pracy.

W pewnych szczególnych przypadkach rekursywny algorytm MNK można również uzyskać na podstawie równań (3.24).

3.3. Nierekursywne algorytmy estymacji parametrów sygnału

3.3.1. Dwustanowy algorytm Fouriera

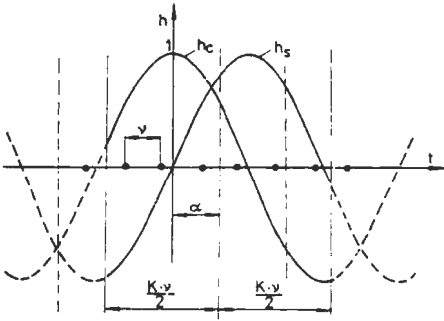
Algorytmy oparte na modelu sygnałowym, określonym przez składniki szeregu Fouriera, często są nazywane algorytmami Fouriera. Najprostszy dwustanowy model tej postaci jest określony równaniem (2.13), przy czym struktura macierzy modelu H przyjmuje formę jak w zależności (2.16). Funkcje bazowe modelu są pokazane w postaci ciągłej na rys. 3.1. Elementy macierzy H są zależne od częstotliwości próbkowania oraz szerokości i położenia okna pomiarowego względem tych funkcji. Zatem, j -ty wiersz macierzy H jest określony następującym wektorem (rys. 3.1):

$$\begin{aligned} H_j &= [\sin(\nu j + \alpha - \frac{\nu}{2}(K+1)) \quad \cos(\nu j + \alpha - \frac{\nu}{2}(K+1))] = \\ &= [h_s(j-1) \quad h_c(j-1)], \end{aligned} \quad (3.37)$$

gdzie: α - kąt przesunięcia funkcji względem środka okna pomiarowego.

Poszukiwane estymaty \hat{x}_s , \hat{x}_c mogą być określone zgodnie z równaniem (3.8), przy czym zakłada się, że macierz wagowa: $G = I$. Macierz P ma w tym przypadku następującą strukturę:

$$P = (H^T H)^{-1} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.38)$$



Rys. 3.1. Funkcje bazowe dwustanowego modelu Fouriera; $N = 8$, $K = 6$

Fig. 3.1. Base functions for a Fourier signal model; $N = 8$, $K = 6$

Elementy tej macierzy można obliczyć przez podstawienie (3.37) do (3.38). Korzystając z wzorów zamieszczonych w Dodatku A, otrzymamy:

$$q_{11} = \sum_{i=1}^K \sin^2\left[\nu i + \alpha - \frac{\nu}{2}(K+1)\right] = \frac{K}{2} - \frac{\sin(\nu K) \cos(2\alpha)}{2 \sin(\nu)},$$

$$q_{12} = q_{21} = \sum_{i=1}^K \sin\left[\nu i + \alpha - \frac{\nu}{2}(K+1)\right] \cos\left[\nu i + \alpha - \frac{\nu}{2}(K+1)\right] =$$

$$= \frac{\sin(\nu K) \sin(2\alpha)}{2 \sin(\nu)}, \quad (3.39)$$

$$q_{22} = \sum_{i=1}^K \cos^2\left[\nu i + \alpha - \frac{\nu}{2}(K+1)\right] = \frac{K}{2} + \frac{\sin(\nu K) \cos(2\alpha)}{2 \sin(\nu)}$$

Jak wspomniano w p. 3.2.1, prosta postać algorytmu występuje wówczas, gdy macierz P jest diagonalna. Warunkiem tego jest zerowanie się wyrazów q_{12} i q_{21} . Zachodzi to wtedy, gdy:

$$\alpha = 0$$

lub (3.40)

$$K = 1 \frac{N}{2}, \quad 1 - \text{całkowite.}$$

Odpowiada to założeniu, że model pomiarowy jest symetrycznie umieszczony w oknie pomiarowym lub szerokość okna jest wielokrotnością połowy okresu podstawowej harmonicznej mierzonego sygnału. Ponieważ elementy niediagonalne p_{12} i p_{21} macierzy P reprezentują współczynniki wzajemnej korelacji ciągów tworzących macierz modelu, więc ich znikanie w wyniku spełnienia warunków (3.40) oznacza ortogonalizację tych ciągów w oknie pomiarowym.

Estymatory składowych wektora χ są wówczas określone równaniami

(3.24), przy czym:

$$h_s(j) = \sin[\nu j + \alpha - \frac{\nu}{2}(K-1)], \quad (3.41)$$

$$h_c(j) = \cos[\nu j + \alpha - \frac{\nu}{2}(K-1)],$$

$$P_S = \frac{1}{q_{11}} = \frac{2 \sin(\nu)}{K \sin(\nu) - \sin(\nu K) \cos(2\alpha)}, \quad (3.42)$$

$$P_C = \frac{1}{q_{22}} = \frac{2 \sin(\nu)}{K \sin(\nu) + \sin(\nu K) \cos(2\alpha)}$$

Wielkości P_S , P_C są współczynnikami skalującymi w równaniach (3.24), a jednocześnie odwzorowują wartości wariancji błędów estymacji składowych, odpowiednio \hat{x}_S i \hat{x}_C .

3.3.2. Trzystanowy algorytm Fouriera

Przedstawiony algorytm można rozszerzyć na większą liczbę stanów przez odpowiednią rozbudowę macierzy modelu H . Jeśli w modelu tym uwzględnić zakłócenia w postaci składowej aperiodycznej, to j -ty wiersz macierzy H będzie miał następującą strukturę (rys. 3.2):

$$H_j = [\sin[\nu j + \alpha - \frac{\nu}{2}(K+1)] \quad \cos[\nu j + \alpha - \frac{\nu}{2}(K+1)] \quad \exp(bj + \beta)], \quad (3.43)$$

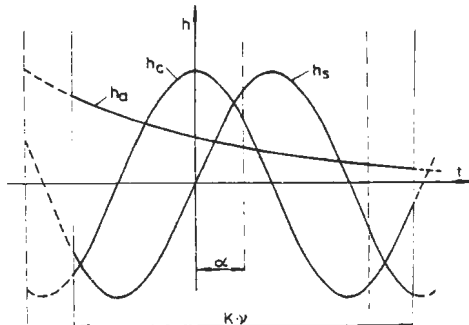
gdzie:

$$b = -\frac{T_1}{N T_a},$$

$$\beta = \frac{b}{\nu} \alpha - \frac{b}{2}(K+1).$$

Ponieważ wektor (3.43) definiuje model podstawowy algorytmu (model pomiaru jest zgodny z modelem sygnału), zatem w estymatorze (3.8) należy przyjąć, podobnie jak w przypadku dwustanowym, $G = I$. W rezultacie estymacji uzyska się wektor $\hat{X} = [\hat{x}_S \quad \hat{x}_C \quad \hat{x}_a]^T$, gdzie \hat{x}_a - estymata składowej aperiodycznej. Macierz P^{-1} ma tym razem wymiar (3×3) . Można sprawdzić, że w ogólnym przypadku (dla dowolnej wartości stałej czasowej T_a) macierz P nie jest diagonalna.

Gdy celem algorytmu jest estymacja tylko składowych ortogonalnych x_S , x_C , wówczas można dokonać znacznych uproszczeń



Rys. 3.2. Funkcje bazowe trzystanowego modelu Fouriera

Fig. 3.2. Base functions of a 3-state Fourier model

algorytmu. W tym celu należy poszukiwać takiej macierzy pomiarów H_G , aby w macierzy P_G zniknęły niediagonalne elementy dwóch pierwszych wierszy, tj. wierszy związanych z estymatami \hat{x}_s i \hat{x}_c .

Założmy, że wiersze zmodyfikowanej macierzy H_G mają następującą strukturę:

$$H_{Gj} = \begin{bmatrix} \sin(\nu j + \alpha - \frac{\nu}{2}(K+1)) + d_s \\ \cos(\nu j + \alpha - \frac{\nu}{2}(K+1)) + d_c \\ \exp(bj + \beta) \end{bmatrix}^T \quad (3.44)$$

Wyrazy dwóch pierwszych wierszy macierzy P_G^{-1} , określone zgodnie z (3.20), są zatem następujące:

$$q_{11} = \sum_{i=1}^K [\sin(\nu i + \alpha - \frac{\nu}{2}(K+1)) + d_s] \sin(\nu i + \alpha - \frac{\nu}{2}(K+1)), \quad (3.45a)$$

$$q_{22} = \sum_{i=1}^K [\cos(\nu i + \alpha - \frac{\nu}{2}(K+1)) + d_c] \cos(\nu i + \alpha - \frac{\nu}{2}(K+1)),$$

$$q_{12} = \sum_{i=1}^K [\sin(\nu i + \alpha - \frac{\nu}{2}(K+1)) + d_s] \cos(\nu i + \alpha - \frac{\nu}{2}(K+1)), \quad (3.45b)$$

$$q_{21} = \sum_{i=1}^K [\cos(\nu i + \alpha - \frac{\nu}{2}(K+1)) + d_c] \sin(\nu i + \alpha - \frac{\nu}{2}(K+1)),$$

$$q_{13} = \sum_{i=1}^K [\sin(\nu i + \alpha - \frac{\nu}{2}(K+1)) + d_s] \exp(bi + \beta), \quad (3.45c)$$

$$q_{23} = \sum_{i=1}^K [\cos(\nu i + \alpha - \frac{\nu}{2}(K+1)) + d_c] \exp(bi + \beta)$$

Współczynniki d_s i d_c można obliczyć z warunków zerowania się równań (3.45b, c). Równania te można przekształcić, korzystając z zależności podanych w Dodatku A. Jednoznaczne rozwiązanie otrzymuje się dla $K = 1N$, 1 - całkowite, gdy wyrażenia określające q_{12} i q_{21} przyjmują wartości zerowe i nie zależą od d_s i d_c . Przyrównując równania (3.45c) do zera, otrzymamy:

$$\begin{aligned} d_s &= \frac{\cos(\delta) \sin(\alpha + \delta)}{\cos(\nu/2)}, \\ d_c &= \frac{\cos(\delta) \cos(\alpha + \delta)}{\cos(\nu/2)}, \end{aligned} \quad (3.46)$$

gdzie:

$$\delta = \arctg \left[\frac{1 + \exp(b)}{1 - \exp(b)} \operatorname{tg}(\nu/2) \right].$$

Ponieważ w uzyskanym algorytmie wielkość x_a nie podlega estymacji,

więc trzeci wiersz w estymatorze (3.8) może być pominięty. Dwa pierwsze wiersze w tym zapisie macierzowym prowadzą do równań (3.24). W ten sposób dla $K = N$, rozpatrywany estymator trzystanowy został zredukowany do algorytmu dwustanowego. Macierz P_G można obliczyć zgodnie z wzorem (3.9), przy czym macierze H oraz H_G mają wiersze o następującej strukturze:

$$H_j = [-\sin(\nu j + \alpha - \nu/2) \quad -\cos(\nu j + \alpha - \nu/2)], \quad (3.47)$$

$$H_{Gj} = H_j + [d_s \quad d_c] ,$$

gdzie: wyrazy d_s , d_c są wyznaczone zgodnie z (3.46).

Łatwo sprawdzić, że wielkości $P_{11} = 1/q_{11}$ oraz $P_{22} = 1/q_{22}$ przyjmują takie same wartości jak w algorytmie dwustanowym. Estymator składowych ortogonalnych sygnału jest określony równaniami (3.24), gdzie:

$$\begin{aligned} h_s(j) &= -\sin(\nu j + \alpha + \nu/2) + d_s , \\ h_c(j) &= -\cos(\nu j + \alpha + \nu/2) + d_c , \\ p_s &= p_c = 2/N \end{aligned} \quad (3.48)$$

Szczególny przypadek rozpatrywanego algorytmu uzyska się zakładając, że stała czasowa składowej aperiodycznej modelu sygnałowego dąży do nieskończoności ($T_a \rightarrow \infty$). Macierz modelu sygnałowego jest wtedy zbudowana z wierszy:

$$H_j = [\sin(\nu j + \alpha - \frac{\nu}{2}(K+1)) \quad \cos(\nu j + \alpha - \frac{\nu}{2}(K+1)) \quad 1] \quad (3.49)$$

Jeśli interesuje nas najprostszy algorytm oceny składowych \hat{x}_s , \hat{x}_c sygnału, to należy dla tego modelu powtórzyć wywód określony równaniami (3.44)-(3.46). W równaniach (3.45c) należy podstawić: $\exp(bi + \beta) = 1$. Rozwiązanie prowadzące do diagonalizacji macierzy P_G uzyskuje się wówczas dla $\alpha = 0$ (model symetryczny względem środka okna pomiarowego). Macierz H jest określona zgodnie z (3.37), a wiersze macierzy H_G przyjmują następującą postać:

$$H_{Gj} = [\sin(\nu j - \frac{\nu}{2}(K+1)) \quad \cos(\nu j - \frac{\nu}{2}(K+1)) + d_c], \quad (3.50)$$

gdzie:

$$d_c = -\frac{\sin \frac{K \nu}{2}}{K \sin \frac{\nu}{2}} .$$

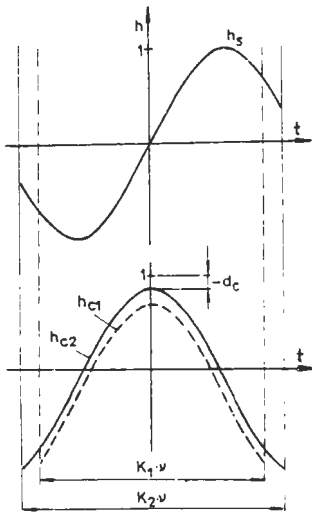
Wielkość d_c ma taką wartość, że suma próbek składowej synfazowej modelu pomiarowego w oknie jest równa zeru (niezależnie od szerokości okna - rys. 3.3). Współczynniki estymatorów sygnału przyjmują następującą postać:

$$h_s(j) = \sin\left[\nu j - \frac{\nu}{2}(K-1)\right],$$

$$h_c(j) = \cos\left[\nu j - \frac{\nu}{2}(K-1)\right] - \frac{\sin \frac{K \nu}{2}}{K \sin \frac{\nu}{2}}, \quad (3.51a)$$

$$p_s = \frac{1}{q_{11}} = \frac{2}{K - \frac{\sin(K\nu)}{\sin \nu}},$$

$$p_c = \frac{1}{q_{22}} = \frac{2 K \sin \nu}{K^2 \sin \nu + K \sin(K\nu) - 4 \operatorname{ctg} \frac{\nu}{2} \sin^2 \frac{K \nu}{2}} \quad (3.51b)$$



Rys. 3.3. Ilustracja zmian modelu dwustanowego z kompensacją składowej stałej w zależności od szerokości okna pomiarowego

Fig. 3.3. Modification of a 2-state model with d.c. component compensation for variable data window width

Dla modelu pełnookresowego ($K = N$) algorytm jest równoważny dwustanowemu algorytmowi Fouriera, natomiast w przypadku modelu półokresowego ($K = N/2$) otrzymujemy:

$$h_s(j) = -\cos\left(\nu j + \frac{\nu}{2}\right),$$

$$h_c(j) = \sin\left(\nu j + \frac{\nu}{2}\right) - \frac{2}{N \sin \frac{\nu}{2}}, \quad (3.52a)$$

$$p_s = \frac{4}{N},$$

$$p_c = \frac{4 N \sin^2 \frac{\nu}{2}}{N^2 \sin^2 \frac{\nu}{2} - 8} \quad (3.52b)$$

3.3.3. Dwustanowy algorytm Walsha

W celu zmniejszenia liczby operacji arytmetycznych w przedstawionych algorytmach stosuje się uproszczony model pomiarów. Najbardziej upowszechniona modyfikacja macierzy pomiarów polega na zamianie bazowych funkcji sinus/kosinus na odpowiadające im funkcje prostokątne o wartościach $(-1, 1)$. Ponieważ funkcje te pokrywają się z funkcjami Walsha do IV rzędu włącznie, więc wywodzące się stąd procedury są nazywane algorytmami Walsha [134]. Wygodnie jest więc korzystać z następujących ich definicji:

$$\begin{aligned} \text{wal}_{2i-1}(x) &= \frac{\sin((2i-1)x)}{|\sin((2i-1)x)|}, \\ \text{wal}_{2i}(x) &= \frac{\cos(2ix)}{|\cos(2ix)|} \end{aligned} \quad (3.53)$$

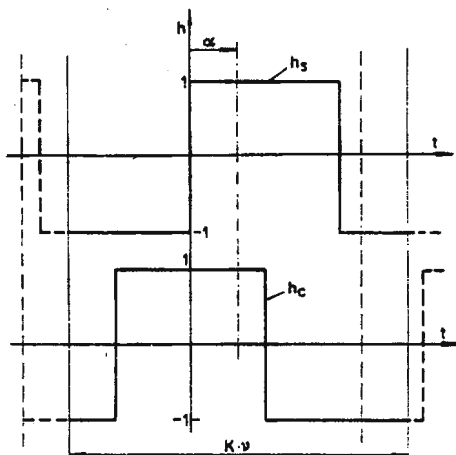
Aby otrzymać dwustanowy estymator Walsha, należy postępować podobnie jak w przypadku estymatora Fouriera, z tym że macierz pomiarów H_G trzeba utworzyć z elementów określonych funkcjami Walsha I i II rzędu (rys. 3.4):

$$H_{Gj} = [\text{wal}_1(vj + \alpha - \frac{\nu}{2}(K+1)) \quad \text{wal}_2(vj + \alpha - \frac{\nu}{2}(K+1))] \quad (3.54)$$

Elementy macierzy P_G można obliczyć na podstawie (3.9) (lub w postaci rozwiniętej - (3.20)). Po uwzględnieniu, że macierz H jest określona zgodnie z wzorem (3.37), a H_G - według (3.54) otrzymamy:

$$\begin{aligned} q_{11} &= \sum_{i=1}^K \text{wal}_1(vi + \alpha - \frac{\nu}{2}(K+1)) \sin(vi + \alpha - \frac{\nu}{2}(K+1)), \\ q_{22} &= \sum_{i=1}^K \text{wal}_2(vi + \alpha - \frac{\nu}{2}(K+1)) \cos(vi + \alpha - \frac{\nu}{2}(K+1)), \\ q_{21} &= \sum_{i=1}^K \text{wal}_1(vi + \alpha - \frac{\nu}{2}(K+1)) \cos(vi + \alpha - \frac{\nu}{2}(K+1)), \\ q_{12} &= \sum_{i=1}^K \text{wal}_2(vi + \alpha - \frac{\nu}{2}(K+1)) \sin(vi + \alpha - \frac{\nu}{2}(K+1)) \end{aligned} \quad (3.55)$$

Analityczne przedstawienie rezultatów tych sum prowadzi w ogólnym przypadku do zawiłych zależności. Można wszakże zauważyć, że wyrazy q_{12}



Rys. 3.4. Funkcje bazowe dwustanowego modelu Walsha
Fig. 3.4. Base functions for 3-state Walsh signal model

i q_{21} również przyjmują wartości zerowe przy warunkach (3.40). Współczynniki q_{11} i q_{22} są określone prostymi zależnościami dla pół- i pełnookresowego okna pomiarowego:

$$q_{11} = q_{22} = \begin{cases} \frac{1}{\sin(\nu/2)} & \text{dla } K = N/2, \\ \frac{2}{\sin(\nu/2)} & \text{dla } K = N \end{cases} \quad (3.56)$$

Dla innej długości okna należy je obliczyć na podstawie (3.55).

Składowe ortogonalne sygnału można określić zgodnie z równaniami (3.24), gdzie:

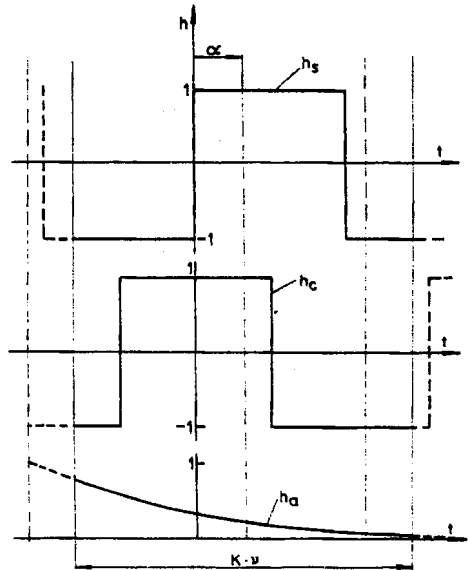
$$\begin{aligned} h_s(j) &= \text{wal}_1(\nu j + \alpha - \frac{\nu}{2}(K-1)), \\ h_c(j) &= \text{wal}_2(\nu j + \alpha - \frac{\nu}{2}(K-1)), \\ p_s &= 1/q_{11}, \quad p_c = 1/q_{22}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

3.3.4. Trzystanowy algorytm Walsh

Podobnie jak w p. 3.3.2 należy poszukiwać zmodyfikowanej macierzy pomiarów, która wraz z macierzą bazową H (3.43) określi parametry trzystanowego estymatora Walsh. Zakładamy, że wiersze macierzy H_G są określone następującym wektorem (rys. 3.5):

$$H_{Gj} = \begin{bmatrix} \text{wal}_1(\nu j + \alpha - \frac{\nu}{2}(K+1)) + d_s \\ \text{wal}_2(\nu j + \alpha - \frac{\nu}{2}(K+1)) + d_c \\ \exp(bj + \beta) \end{bmatrix}^T \quad (3.58)$$

Elementy macierzy P_G^{-1} wyrażają się związkami podobnymi do zależności (3.45), przy czym funkcje \sin/\cos należy zamienić na $\text{wal}_1/\text{wal}_2$. Wartości współczynników d_s i d_c określają warunki zerowania się wyrazów q_{12} , q_{21} , q_{13} , q_{23} . Podobnie jak w modelu Fouriera, jednoznaczne rozwiązanie występuje dla pełnookresowego okna pomiarowego ($K = N$). Wówczas otrzymujemy:



Rys. 3.5. Funkcje bazowe trzystanowego modelu Walsh
Fig. 3.5. Base functions for 3-state Walsh signal model

$$d_s = \text{wal}_1\left(\alpha + \frac{\nu}{2}\right) \frac{1 - \exp(c)[2 \exp(-bk_s) - 1]}{1 + \exp(c)},$$

$$d_c = \text{wal}_2\left(\alpha + \frac{\nu}{2}\right) \frac{1 - \exp(c)[2 \exp(-bk_c) - 1]}{1 + \exp(c)},$$
(3.59)

gdzie:

$$c = \frac{N}{2} b, \quad b - \text{jak w (3.43)},$$

$$k_s = \text{INT}\left(\frac{\alpha}{\nu} + 0,5\right) \bmod \frac{N}{2},$$

$$k_c = \text{INT}\left(\frac{\alpha}{\nu} + 0,5 + \frac{N}{4}\right) \bmod \frac{N}{2}.$$

Estymatory składowych ortogonalnych są również określone równaniami (3.24), przy czym:

$$h_s(j) = -\text{wal}_1\left(\nu j + \alpha + \frac{\nu}{2}\right) + d_s,$$

$$h_c(j) = -\text{wal}_2\left(\nu j + \alpha + \frac{\nu}{2}\right) + d_c,$$

$$p_s = p_c = \frac{\sin(\nu/2)}{2},$$
(3.60)

gdzie: d_s i d_c są określone równaniami (3.59).

Można zauważyć, że dla założonej długości okna pomiarowego ($K = N$), współczynniki p_s i p_c są takie same, jak w przypadku dwustanowego algorytmu Walsh'a (3.56).

3.3.5. Pięciostanowy algorytm Fouriera

Rozpatrywane trzystanowe algorytmy identyfikacji składowych ortogonalnych sygnału mogły być zredukowane do postaci dwustanowej, przy znanym zakłóceniu aperiodycznym. To założenie nie zawsze może być spełnione.

Bardziej ogólny model składowej aperiodycznej zawartej w sygnale jest przedstawiany w postaci kilku pierwszych składników rozkładu funkcji wykładniczej w szereg Taylora [105], [121]. Dla j -tej próbki tego sygnału otrzymamy:

$$x_a e^{bj} = x_a + x_a (bj) + x_a (bj)^2 + \dots =$$

$$= x_{a1} + x_{a2}(\nu j) + x_{a3}(\nu j)^2 + \dots,$$
(3.61)

gdzie: b - jak w (3.43).

Po uzupełnieniu dwustanowego modelu Fouriera trzema pierwszymi wyrazami rozkładu (3.61) uzyskuje się pięciostanowy model sygnałowy:

$$H_j = \begin{bmatrix} \sin[\nu j + \alpha - \frac{\nu}{2}(K+1)] \\ \cos[\nu j + \alpha - \frac{\nu}{2}(K+1)] \\ [\nu(j-1)]^2 \\ \nu(j-1) \\ 1 \end{bmatrix}^T \quad (3.62)$$

Estymowany wektor \hat{X} ma w tym przypadku następującą strukturę:

$$\hat{X} = [\hat{x}_s \quad \hat{x}_c \quad \hat{x}_{a3} \quad \hat{x}_{a2} \quad \hat{x}_{a1}]^T, \quad (3.63)$$

gdzie: \hat{x}_{a1} , \hat{x}_{a2} , \hat{x}_{a3} - estymaty współczynników modelu (3.61).

Zazwyczaj celem estymacji są jedynie składowe \hat{x}_s i \hat{x}_c wektora \hat{X} , które są określone przez dwa pierwsze wiersze równania (3.8) ($G = I$). Jeśli estymatory tych składowych zapisać w postaci równań (3.24), to współczynniki wagowe h_s oraz h_c można określić następująco:

$$\begin{aligned} h_s(j) &= \sum_{i=1}^5 p_{1i} h_{ji}, \\ h_c(j) &= \sum_{i=1}^5 p_{2i} h_{ji}, \end{aligned} \quad (3.64)$$

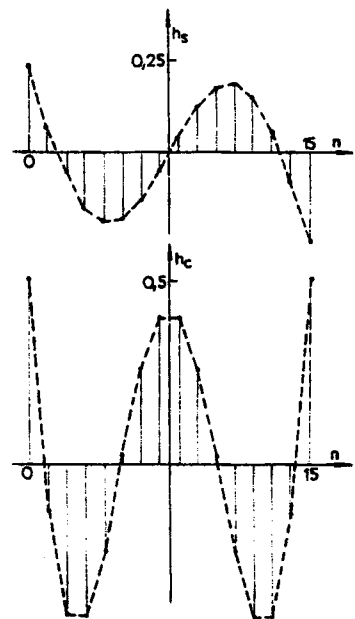
gdzie:

h_{ji} - elementy macierzy H , określonej zgodnie z (3.62),

p_{1i} , p_{2i} - elementy dwóch pierwszych wierszy macierzy P .

Łatwo sprawdzić, że elementy p_{11} i p_{22} macierzy P są określone takimi samymi zależnościami jak w algorytmie dwustanowym (3.42).

Parametry równań (3.64) nie zależą od stałej czasowej składowej aperiodycznej, a więc jej wartość nie wpływa na skuteczność pomiaru sygnału w szerokim zakresie zmian tego typu zakłócenia. Współczynniki modelu pomiarowego określonego przez wyrażenia (3.64) dla $K = N = 16$ są pokazane na rys. 3.6.



Rys. 3.6. Współczynniki estymatora dwustanowego powstałego na podstawie pięciostanowego modelu pomiarowego; $K=N=16$

Fig. 3.6. 2-state estimator coefficients for 5-state signal model; $K=N=16$

W podobny sposób mogą być budowane estymatory wyższych rzędów, uwzględniające rozbudowane modele zakłóceń lub służące do pomiaru także innych składowych harmonicznych sygnału.

3.3.6. Algorytm Fouriera z modelem pomiarowym dostosowanym do długości okna

Podstawowy estymator Fouriera z oknem pomiarowym krótszym od okresu podstawowej harmonicznej jest wrażliwy na zakłócenia w postaci składowej aperiodycznej [59]. W celu redukcji tych błędów, ujawniających się w charakterystyce częstotliwościowej, proponuje się stosowanie modelu pomiarowego z funkcjami ortogonalnymi o okresie równym długości okna [156]. Wtedy, przy krótkim oknie pomiarowym, również parzysta funkcja bazowa ma zerową wartość sumy współczynników, co prowadzi do filtracji składowej stałej (rys. 3.7).

Macierz pomiarów przyjmuje w tym przypadku następującą postać:

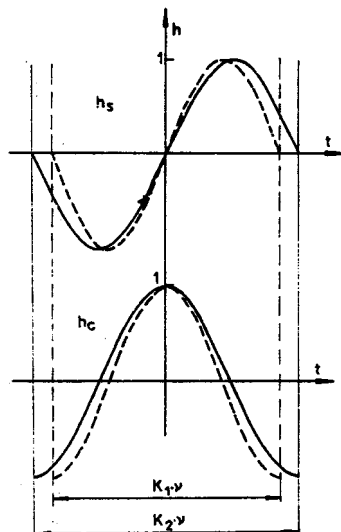
$$H_{Gj} = \begin{bmatrix} \sin\left[\frac{N}{K}\left(\nu j + \alpha - \frac{\nu}{2}(K+1)\right)\right] \\ \cos\left[\frac{N}{K}\left(\nu j + \alpha - \frac{\nu}{2}(K+1)\right)\right] \end{bmatrix}^T \quad (3.65)$$

Macierz P_G jest diagonalna dla $\alpha = 0$ (model symetryczny względem środka okna pomiarowego). Elementy macierzy P_G^{-1} można obliczyć podobnie jak w poprzednich algorytmach. Ostateczne zależności są następujące:

$$q_{11} = \frac{\sin\left[\frac{N-K}{2}\nu\right]}{2 \sin\left[\frac{N-K}{2K}\nu\right]} - \frac{\sin\left[\frac{N+K}{2}\nu\right]}{2 \sin\left[\frac{N+K}{2K}\nu\right]},$$

$$q_{22} = \frac{\sin\left[\frac{N-K}{2}\nu\right]}{2 \sin\left[\frac{N-K}{2K}\nu\right]} + \frac{\sin\left[\frac{N+K}{2}\nu\right]}{2 \sin\left[\frac{N+K}{2K}\nu\right]} \quad (3.66)$$

Estymatory składowych ortogonalnych można w tym przypadku również określić za pomocą równań (3.24), gdzie:



Rys.3.7. Ilustracja zmian modelu dwustanowego o częstotliwości dostosowanej do szerokości okna pomiarowego; $\alpha=0$

Fig. 3.7. Modification of a 2-state model with fundamental frequency matched deviation of the estimation error versus window width; $\alpha=0$

$$\begin{aligned}
 h_s(j) &= -\sin\left(\frac{N}{K}\left(\nu j + \frac{\nu}{2}\right)\right), \\
 h_c(j) &= -\cos\left(\frac{N}{K}\left(\nu j + \frac{\nu}{2}\right)\right), \\
 p_s &= 1/q_{11}, \quad p_c = 1/q_{22}
 \end{aligned} \tag{3.67}$$

Także i tym razem macierz modelu może być zbudowana na podstawie funkcji Walsha o częstotliwości dostosowanej do szerokości okna pomiarowego.

3.4. Wariancja błędów estymacji

Metoda najmniejszych kwadratów dostarcza bezpośrednio informacji o wielkości błędów estymacji. Miarą wariancji błędów estymowanych parametrów są diagonalne elementy macierzy P_G (3.9). Jeśli macierz wagowa G spełnia zależność (3.13), to znaczy jest odwrotnością macierzy kowariancji błędów pomiarowych, estymacja jest optymalna w sensie kryterium (3.5). Równość ta nie jest spełniona w przypadku doboru macierzy G zgodnie z warunkami modyfikacji algorytmu. Rozpatrzmy jak wpływa to na zmianę wariancji błędów estymacji.

Błąd estymacji (3.14) można zapisać następującym równaniem:

$$\tilde{X} = \hat{X} - X = P_G H_G^T (Y - H X), \tag{3.68a}$$

skąd na podstawie (3.1) otrzymamy:

$$\tilde{X} = P_G H_G^T V \tag{3.68b}$$

Macierz kowariancji tego błędu jest określona następującym równaniem:

$$\text{cov}(\tilde{X}) = E(\tilde{X} \tilde{X}^T) = P_G H_G^T R H_G P_G^T, \tag{3.69}$$

gdzie: $R = E(V V^T)$.

Dla $R = \sigma^2 I$ otrzymamy:

$$\text{cov}(\tilde{X}) = \sigma^2 P_G H_G^T H_G P_G^T \tag{3.70}$$

Jeśli $G = I$, to kowariancja $\text{cov}(\tilde{X})$ jest wyrażona bezpośrednio przez macierz P :

$$\text{cov}(\tilde{X})_{G=I} = \sigma^2 P \tag{3.71}$$

W przypadku algorytmów opartych na modelu Fouriera, wariancje błędów estymacji składowych \hat{x}_s , \hat{x}_c są więc wyrażone przez współczynniki p_s , p_c :

$$\begin{aligned}\sigma_{xs}^2 &= \sigma^2 p_s, \\ \sigma_{xc}^2 &= \sigma^2 p_c,\end{aligned}\tag{3.72}$$

gdzie: p_s, p_c - współczynniki określone zgodnie z (3.42).

Zależność ta określa również wariancje estymatora trzystanowego z modelem (3.50), przy czym współczynniki p_s i p_c należy obliczyć na podstawie (3.51b).

Do obliczenia wariancji błędów dwustanowego algorytmu Walsh'a należy posłużyć się równaniem (3.70), gdzie macierze P_G i H_G są określone jak w p. 3.3.3. Otrzymamy diagonalną macierz kowariancji z elementami:

$$\begin{aligned}\sigma_{xs}^2 &= \sigma^2 \frac{K}{2 q_{11}}, \\ \sigma_{xc}^2 &= \sigma^2 \frac{K}{2 q_{22}},\end{aligned}\tag{3.73}$$

gdzie: q_{11}, q_{22} - współczynniki, określone zgodnie z (3.55).

W przypadku algorytmu Fouriera z modelem opartym na funkcji harmoniczej o częstotliwości dostosowanej do szerokości okna pomiarowego, macierze P_G i H_G są określone na podstawie (3.37) i (3.65). Po podstawieniu ich do (3.70) otrzymamy:

$$\begin{aligned}\sigma_{xs}^2 &= \sigma^2 \frac{K}{2 q_{11}^2}, \\ \sigma_{xc}^2 &= \sigma^2 \frac{K}{2 q_{22}^2},\end{aligned}\tag{3.74}$$

gdzie: q_{11}, q_{22} - współczynniki, określone zgodnie z równaniem (3.66).

Analizę wariancji wygodnie jest prowadzić w odniesieniu do błędu estymacji amplitudy. Estymator ten jest określony równaniem (3.25). Gdy znane są wariancje błędów składowych \hat{x}_s oraz \hat{x}_c , wariancję amplitudy można obliczyć na podstawie znanego prawa propagacji błędów [10]:

$$\sigma_x^2 = \text{var}(\hat{x}) = \frac{\sigma_{xs}^2 \hat{x}_s^2 + \sigma_{xc}^2 \hat{x}_c^2}{\hat{x}^2}\tag{3.75}$$

Dla uproszczenia analizy można przyjąć: $\hat{x}_s = \hat{x}_c$. Wtedy uzyskuje się prostą postać tego wyrażenia:

$$\sigma_x^2 = \frac{\sigma_{xs}^2 + \sigma_{xc}^2}{2}\tag{3.76}$$

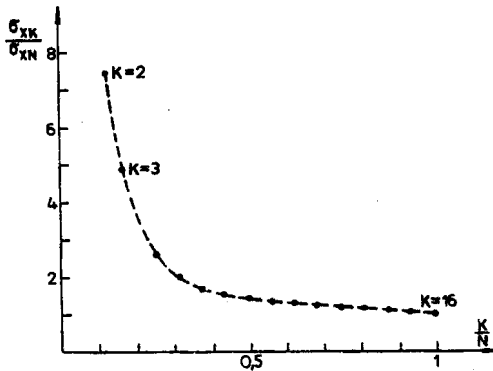
Z punktu widzenia syntezy rozpatrywanych estymatorów ważne jest ustalenie wpływu takich parametrów, jak częstotliwość próbkowania oraz

szerokość okna pomiarowego na dokładność pomiaru.

Zależność wariancji estymacji amplitudy od szerokości okna pomiarowego jest wygodnie przedstawić w odniesieniu do przypadku, gdy okno pomiarowe jest równe okresowi podstawowej harmonicznej. Dla podstawowego algorytmu Fouriera otrzymujemy:

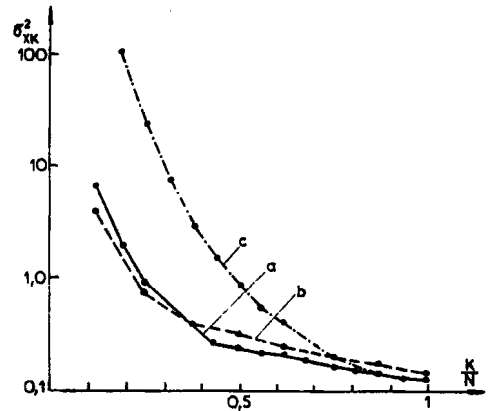
$$\frac{\sigma_{XK}^2}{\sigma_{XN}^2} = \frac{N}{K \left[1 - \left(\frac{\sin(\nu K)}{K \sin \nu} \cos(2\alpha) \right)^2 \right]} \quad (3.77)$$

Względne odchylenie standardowe (błąd względny) jest kwadratowym pierwiastkiem z wyrażenia (3.77). Jego przebieg pokazano na rys. 3.8 ($\alpha = 0$). Widać, że błąd estymacji szybko wzrasta, gdy szerokość okna pomiarowego zmniejsza się poniżej połowy okresu podstawowej harmonicznej. Z analizy wyrażenia (3.77) wynika, że błąd ten w niewielkim stopniu zależy od częstotliwości próbkowania (dla stosowanych praktycznie w zabezpieczeniach zakresów $N = 8..20$) i jest zbliżony do błędów estymatora ciągłego [138].



Rys. 3.8. Względne odchylenie standardowe błędu estymacji w zależności od szerokości okna pomiarowego; $N=16$

Fig. 3.8. Relative standard deviation of the estimation error versus window width; $N=16$



Rys. 3.9. Wariancja błędu estymacji amplitudy dla podstawowego algorytmu Fouriera (a), algorytmu Walsha (b) oraz algorytmu o zmiennej częstotliwości funkcji bazowych w oknie pomiarowym (c)

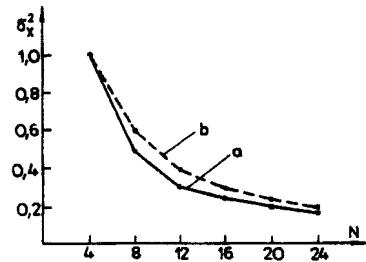
Fig. 3.9. Variation of the signal magnitude estimation error for the basic Fourier algorithm (a), the Walsh algorithm (b) and the algorithm with variable base function frequency with respect to data window (c)

Na rysunku 3.9 pokazano zmiany wariancji błędów amplitudy w zależności od szerokości okna pomiarowego dla trzech różnych algorytmów. Błędy algorytmu opartego na funkcjach harmonicznym o częstotliwościach dostosowanych do szerokości okna (krzywa c) są bardzo duże dla krótkich okien. Wynika to z nieadekwatności modelu do obserwowanych przebiegów. Algorytm silnie wzmacnia zakłócenia w postaci składowych o wysokiej częstotliwości. Wariancja podstawowego algorytmu Fouriera z modelem składowej synfazowej (3.50) przesuniętej do zera jest nieznacznie mniejsza. Dla półokresowego okna pomiarowego różnica ta wynosi ok. 8%.

Interesujące jest, że dla bardzo krótkich okien pomiarowych błędy podstawowego algorytmu Fouriera są większe od błędów algorytmu Walsha (rys. 3.9, krzywe a i b). Jest to związane z dużą wariancją σ_{xs}^2 tego estymatora dla krótkich okien (współczynnik p_s w zależności (3.42) przybiera duże wartości).

Zależność wariancji od częstotliwości próbkowania dla półokresowych algorytmów Fouriera i Walsha pokazano na rys. 3.10.

Wariancja błędów estymacji charakteryzuje statystyczne własności algorytmu. W przypadku algorytmów opartych na modelach stacjonarnych bardziej praktyczną miarą ich własności jest charakterystyka częstotliwościowa.



Rys. 3.10. Zależność wariancji błędu estymacji od częstotliwości próbkowania dla półokresowego algorytmu Fouriera (a) oraz Walsha (b)

Fig. 3.10. Variation of the estimation error versus sampling frequency for the half-wave Fourier (a) and Walsh algorithm

3.5. Podsumowanie

1. W niniejszym rozdziale zestawiono podstawowe algorytmy oceny parametrów modeli sygnałowych stosowane w zabezpieczeniach cyfrowych. Wspólną bazą tych estymatorów jest metoda najmniejszych kwadratów. Przedstawiono różne warianty tych algorytmów odnoszące się do modeli deterministycznych i probabilistycznych o strukturze nierekursywnej oraz rekursywnej. Omówiono warunki zastosowania poszczególnych metod obliczeniowych.

2. Wywodzące się z metody najmniejszych kwadratów algorytmy można podzielić na następujące grupy związane z przyjętym modelem sygnałowym i kryterium estymacji:

a) kryterium minimalnej sumy błędów pomiaru (3.4), (3.5):

- w warunkach deterministycznych: nierekursywny i rekursywny algorytm Gaussa;

- w warunkach probabilistycznych: nierekursywny i rekursywny algorytm Gaussa-Markowa;

b) kryterium minimalnej sumy wariancji błędów estymacji (3.36):
filtr Kalmana.

Dla modelu probabilistycznego, niezależnie od przyjętego wyjściowego kryterium estymacji, w obu algorytmach rekursywnych uzyskuje się jednakowe zależności. Dlatego w literaturze również rekursywny algorytm MNK Gaussa-Markowa jest nazywany filtrem Kalmana [9]. Należy jednak pamiętać o nieco innych założeniach, które w przypadku metody Gaussa-Markowa wymagają przyjęcia nieskończonej wartości początkowej macierzy kowariancji błędów estymacji $P(0)$. Wiąże się to również z innym sposobem rozpoczęcia procesu obliczeń według tego algorytmu w porównaniu z filtrem Kalmana.

3. Wprowadzona została ogólna metoda syntezy nierekursywnego algorytmu MNK z deterministycznym modelem sygnałowym o zadanej strukturze macierzy pomiarów. Pokazano, że obszerna grupa znanych algorytmów identyfikacji składowych ortogonalnych sygnału może być przedstawiona w jednolitej postaci algorytmu MNK. Modyfikacje tych algorytmów wyrażają się w postaci odpowiedniej struktury modelu pomiarowego, co prowadzi do zmiany wartości macierzy wagowej G (gdy model użyty do pomiarów jest identyczny z modelem sygnałowym, wówczas $G = I$). Macierz ta ma tu jednak inne znaczenie niż w algorytmie probabilistycznym - nie tyle odzwierciedla dokładność poszczególnych pomiarów, ile stopień odstępstwa modelu użytego do pomiaru od modelu sygnałowego. Ważną cechą takiej reprezentacji estymatorów jest możliwość łatwego porównania wielkości błędów oceny mierzonych parametrów procesu w zależności od rodzaju zastosowanego algorytmu.

4. ALGORYTMY WSTĘPNEGO PRZETWARZANIA SYGNAŁÓW

4.1. Wprowadzenie

Na podstawie omówionych w poprzednim rozdziale algorytmów można określić wybrane parametry obserwowanych sygnałów. Jak wspomniano, proces ten odbywa się na etapie wstępnego przetwarzania sygnałów. W przypadku zabezpieczeń cyfrowych chodzi zazwyczaj o estymację składowych ortogonalnych podstawowej harmonicznej prądu i napięcia. Na ich podstawie można następnie określić takie wielkości kryterialne, jak: amplituda prądu lub napięcia, impedancja, moc itp.

Funkcje wstępnego przetwarzania wynikają zatem z algorytmów pomiaru wielkości kryterialnych. Głównymi narzędziami stosowanymi w tej fazie

przetwarzania są:

- filtracja cyfrowa,
- korelacja cyfrowa,
- obserwatory stanu,
- filtracja Kalmana.

Każda z wymienionych procedur jest związana z właściwym jej modelem sygnałowym procesu i pomiaru. Model sygnałowy oparty na równaniach regresji (2.15) implikuje zastosowanie nierekursywnego (blokowego) sposobu przetwarzania w celu identyfikacji parametrów tego modelu. Charakterystycznym przykładem są tu metody filtracji nierekursywnej oraz korelacji cyfrowej. Model zmiennych stanu (2.18) jest podstawowym modelem dla obserwatora stanu lub filtru Kalmana.

Inny podział powyższych metod odnosi się do sposobu ich analizy. Metody oparte na modelach deterministycznych lub quasi-stochastycznych stacjonarnych tworzą grupę tzw. metod fourierowskich. Podstawowe właściwości tych algorytmów są przedstawiane w postaci charakterystyk częstotliwościowych oraz czasowych [113].

Algorytmy oparte na stanowych modelach stochastycznych są zaliczane do metod kalmanowskich. Podstawowe ich właściwości są opisywane charakterystykami probabilistycznymi, takimi jak wartość oczekiwana lub wariancja.

Oddzielną grupę stanowią procedury nieliniowe, jednak w tej fazie przetwarzania nie znalazły one większego zastosowania. Wyjątkiem może być prosty obliczeniowo filtr medianowy [116].

W niniejszym rozdziale podano sposób syntezy podstawowych metod identyfikacji tych parametrów sygnału prądu i napięcia, które są podstawą do określania wielkości kryterialnych zabezpieczeń. Pokazano, że poszczególne metody cyfrowego przetwarzania sygnałów można wyprowadzić z omówionych poprzednio algorytmów estymacji.

4.2. Filtracja cyfrowa

Filtry cyfrowe są dyskretnymi przetwornikami ciągu sygnałów wejściowych $y(n)$ w ciąg sygnałów wyjściowych $x(n)$, przy czym sygnał wejściowy podlega określonej modyfikacji. Ta modyfikacja ma zazwyczaj na celu oddzielenie sygnału od zakłóceń [166].

Dalej zostaną rozpatrzone te charakterystyki filtrów, które łączą się z ich zastosowaniem jako elementów członów pomiarowych zabezpieczeń.

Algorytm przetwarzania sygnału w filtrze cyfrowym może być określony następującym równaniem różnicowym [57]:

$$x(k) = \sum_{i=0}^{K-1} a(i) y(k-i) + \sum_{l=1}^L b(l) x(k-l) , \quad (4.1)$$

gdzie: $a(i)$, $b(i)$ - współczynniki filtru,

które pokazuje, że wartość bieżąca sygnału wyjściowego zależy od K ostatnich wartości sygnału wejściowego (łącznie z bieżącym) oraz od L poprzednich odpowiedzi filtru. Na podstawie równania (4.1) można uzyskać filtry o różnym sposobie realizacji i różnych właściwościach.

Jeśli w strukturze filtru występują sprzężenia zwrotne, tzn. poprzednie sygnały wyjściowe są używane do obliczania aktualnych sygnałów wyjściowych (nawet gdy to sprzężenie obejmuje tylko fragment struktury filtru), to jest to filtr rekursywny (z realizacją rekursywną). W przeciwnym razie mamy do czynienia z filtrem nierekursywnym [7].

Podstawowe właściwości filtrów są przedstawiane w postaci charakterystyk częstotliwościowych oraz czasowych. Charakterystyki częstotliwościowe są związane z analizą transmitancji filtru, która może być określona przez obliczenie transformaty Z równania (4.1):

$$H(z) = \frac{X(z)}{Y(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{K-1} a(i)z^{-i}}{1 - \sum_{l=1}^L b(l)z^{-l}} \quad (4.2)$$

Postać widmową transmitancji (4.2) uzyskuje się przez podstawienie: $z = \exp(j\omega T)$, gdzie T - okres próbkowania sygnału:

$$H(j\omega) = \frac{\sum_{i=0}^{K-1} a(i)\exp(-j\omega T)}{1 - \sum_{l=1}^L b(l)\exp(-j\omega T)} \quad (4.3)$$

Właściwości dynamiczne filtru są określone przez jego charakterystyki czasowe. Podstawową charakterystyką jest odpowiedź impulsowa $h(k)$, która przedstawia sygnał wyjściowy przy wymuszeniu sygnałem impulsowym, modelowanym deltą Kroneckera $\delta(i)$ (3.34).

W zależności od charakteru odpowiedzi impulsowej, filtry cyfrowe dzielą się na dwie grupy: układy o skończonym czasie trwania odpowiedzi impulsowej - SOI (ang. FIR - finite impulse response) oraz układy o nieskończonym czasie trwania odpowiedzi impulsowej - NOI (ang. IIR - infinite impulse response) [166]. Podział ten nie zawsze pokrywa się z podziałem na filtry rekursywne i nierekursywne. Na przykład, rekursywna realizacja może odnosić się zarówno do filtrów SOI jak i NOI. Ponieważ jednak podstawową realizacją filtru SOI jest algorytm nierekursywny,

więc powszechnie są stosowane te ostatnie określenia.

4.2.1. Filtry o skończonej odpowiedzi impulsowej

Sygnal wyjściowy filtra nierekursywnego (SOI) jest otrzymywany w wyniku dyskretnego splotu sygnału wejściowego z jego charakterystyką impulsową [3]. Odpowiada to założeniu, że w równaniu (4.1) znika człon rekursywny ($b(l) = 0$, $l = 1, \dots, L$). Podstawowe równanie filtra SOI można zatem zapisać w następującej postaci:

$$\hat{x}(k) = \sum_{i=0}^{K-1} h(i)y(k-i), \quad (4.4)$$

gdzie: $h(i)$ jest impulsową odpowiedzią filtra, która może przyjmować wartości różne od zera jedynie w przedziale zmian argumentu $i = 0, \dots, K-1$.

Ważną cechą filtrów nierekursywnych jest prosty sposób otrzymania liniowej charakterystyki fazowej. Łatwo można uzyskać dwa filtry o zbliżonych charakterystykach amplitudowych oraz o stałej różnicy faz w całym zakresie częstotliwości. Filtry mają liniową charakterystykę wtedy, gdy ich odpowiedzi impulsowe spełniają warunek [166]:

$$h(i) = -h(K-1-i) \quad (4.5a)$$

lub

$$h(i) = h(K-1-i), \quad (4.5b)$$

znacza, że odpowiedź impulsowa jest funkcją parzystą lub nieparzystą względem osi, wyznaczającej środek okna pomiarowego. Charakterystyki fazowe filtrów, których odpowiedzi impulsowe spełniają zależności (4.5), są przesunięte wzajemnie o kąt $\pi/2$ w całym zakresie częstotliwości. Ta właściwość jest bardzo ważna dla przetwarzania sygnałów zabezpieczeniowych, gdyż na wyjściu wąskopasmowych filtrów SOI o parzystej i nieparzystej charakterystyce impulsowej otrzymuje się estymaty wzajemnie ortogonalnych sygnałów [53].

Jest znanych wiele metod projektowania filtrów SOI [45], [57]. Uniwersalne metody nie znalazły dużego zastosowania w projektowaniu filtrów do celów automatyki zabezpieczeniowej. Przetwarzanie na bieżąco nakłada ograniczenia na szerokość okna pomiarowego, częstotliwość próbkowania i złożoność obliczeniową algorytmu - stąd optymalizacja charakterystyki częstotliwościowej nie zawsze jest zabiegiem priorytetowym.

Do projektowania filtrów SOI na potrzeby zabezpieczeń cyfrowych jest najczęściej używana metoda odwzorowania krzywych. Zależności uzyskane w poprzednim rozdziale można zatem bezpośrednio stosować do projektowania omawianych filtrów.

Z porównania równań (3.24) i (4.4) można zauważyć, że filtr niere-

kursywny jest estymatorem wartości chwilowych sygnału. Są one wyznaczone w kolejnych krokach, zgodnie ze zmianą indeksu k , na podstawie K ostatnich pomiarów wartości y . Zasadę tę pokazano na rys. 4.1. Niezmienny model sygnałowy (okno pomiarowe) jest przesuwany wzdłuż obserwowanego sygnału i dla kolejnych jego położen, wyznaczonych okresem próbkowania T , odbywa się obliczanie estymat zgodnie z algorytmami określonymi w p. 3.3. Wyrazy odpowiednich wierszy macierzy modelu pomiarowego (3.23) są więc współczynnikami filtru, natomiast p_s i p_c (3.24) są wielkościami skalującymi.

Równania filtrów opartych na estymatorach (3.24) są więc następujące:

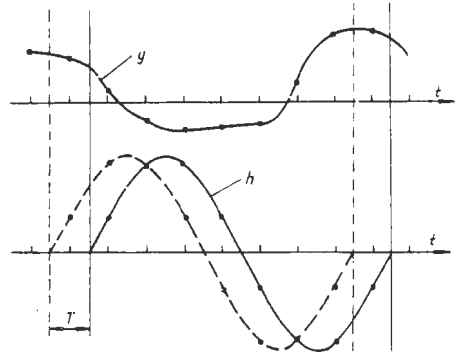
$$\hat{x}_s(k) = p_s \sum_{i=0}^{K-1} h_s(i)y(k-i),$$

$$\hat{x}_c(k) = p_c \sum_{i=0}^{K-1} h_c(i)y(k-i)$$

Warunkiem stacjonarności filtrów (4.6) jest niezmiennosc charakterystyk impulsowych h_s i h_c . W rozpatrywanych w p. 3.3 algorytmach warunek ten jest spełniony, gdy w modelach pomiarowych założy się $\alpha = \text{const}$. Jeśli ponadto $\alpha = 0$, to dla filtrów (4.6) są odpowiednio spełnione warunki (4.5) i wielkości wyjściowe $\hat{x}_s(k)$, $\hat{x}_c(k)$ tworzą estymaty ortogonalnych składowych obserwowanego sygnału. W tym przypadku estymatory amplitudy i fazy zachowują również postać (3.25).

Efektywność obliczeniowa estymatorów filtracyjnych zależy od wielu czynników, takich jak: rodzaj modelu pomiarowego, szerokość okna, częstotliwość próbkowania. W ogólnym przypadku liczba mnożeń może być zredukowana o połowę na podstawie symetrii charakterystyki impulsowej, wynikającej ze związków (4.5). Dla wielu modeli, zwłaszcza pełnookresowych, podobna symetria zachodzi również względem osi położonej w $1/4$ i $3/4$ długości okna pomiarowego.

Symetria dwustanowego modelu Fouriera pozwala uzyskać efektywne algorytmy o realizacji rekursywnej [142]. W przypadku okna pełnookresowego otrzymujemy:



Rys. 4.1. Zasada estymacji sygnału za pomocą filtru nierekursywnego
Fig. 4.1. Principle of signal estimation by use of a non-recursive filter

$$\hat{x}_s(k) = \hat{x}_c(k-1) \sin \nu + \hat{x}_s(k-1) \cos \nu, \quad (4.7)$$

$$\hat{x}_c(k) = \hat{x}_c(k-1) \cos \nu - \hat{x}_s(k-1) \sin \nu + \frac{2}{N}[y(k) - y(k-N)],$$

natomiast dla okna półokresowego:

$$\hat{x}_s(k) = \hat{x}_c(k-1) \sin \nu + \hat{x}_s(k-1) \cos \nu, \quad (4.8)$$

$$\hat{x}_c(k) = \hat{x}_c(k-1) \cos \nu - \hat{x}_s(k-1) \sin \nu + \frac{2}{N}[y(k) + y(k - \frac{N}{2})]$$

Jak widać, obie składowe ortogonalne są określone w wyniku czterech operacji mnożenia (nie licząc skalowania).

Największe korzyści pod względem uproszczenia obliczeń przynosi model Walsh'a, który nie wymaga mnożeń. W przypadku okna pełnokresowego otrzymujemy (gdy $N/2$ - parzyste):

$$\hat{x}_s(k) = p_s \left[- \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} y(k-i) + \sum_{i=\frac{N}{2}}^{N-1} y(k-i) \right], \quad (4.9)$$

$$\hat{x}_c(k) = p_c \left[- \sum_{i=0}^{\frac{N}{4}-1} y(k-i) + \sum_{i=\frac{N}{4}}^{\frac{3}{4}N-1} y(k-i) - \sum_{i=\frac{3}{4}N}^{N-1} y(k-i) \right],$$

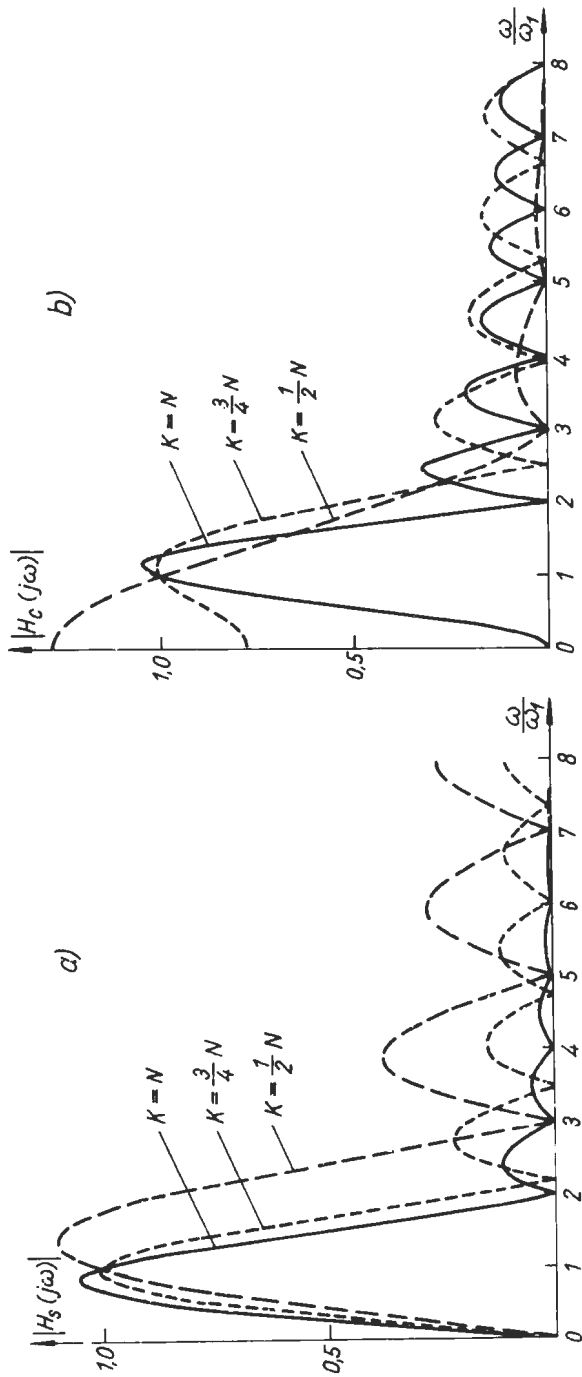
gdzie:

$$p_s = p_c = \frac{\sin(\nu/2)}{2}.$$

Gdy okno pomiarowe nie jest wielokrotnością połowy okresu podstawowej harmonicznej, algorytmy rekursywne stają się bardziej złożone.

Zależność charakterystyki częstotliwościowej omawianych filtrów od szerokości okna pomiarowego można prześledzić na przykładzie podstawowego algorytmu Fouriera. Na rysunku 4.2 pokazano charakterystyki częstotliwościowe filtrów składowych ortogonalnych dla różnej szerokości okna, przy częstotliwości próbkowania odpowiadającej $N = 16$.

Można zauważyć, że w miarę skracania okna pomiarowego pogarszają się właściwości częstotliwościowe filtru, co objawia się przede wszystkim zwiększeniem wzmocnienia wyższych częstotliwości w stosunku do częstotliwości podstawowej. Jest to znany fakt wzrostu rozmycia widma estymatora przy zmniejszaniu się okna czasowego. Właściwość ta może być powiązana z podobnym wzrostem wariancji błędów estymatorów opartych na tych samych modelach pomiarowych (p. 3.4). Jeśli bowiem sygnał wyjściowy $x(i)$ filtru pobudzonego szumem białym o wariancji σ^2 ma widmo mocy $G_x(f)$, to jego wariancję można obliczyć według zależności [57]:



Rys. 4.2. Charakterystyki częstotliwościowe amplitudy filtrów dwustanowych Fouriera dla różnej szerokości okna pomiarowego ($N = 16$)

Fig. 4.2. Frequency response of 2-state Fourier filters for different window width ($N = 16$)

$$\sigma_x^2 = \int_0^{f^*} G_x(f) df = \frac{2\sigma^2}{f^*} \int_0^{f^*} |H^2(f)| df, \quad (4.10)$$

gdzie:

$|H(f)|$ - moduł transmitancji filtru,

$f^* = f_T/2$.

Równanie (4.10) wiąże wariancję estymatora z jego właściwościami widmowymi.

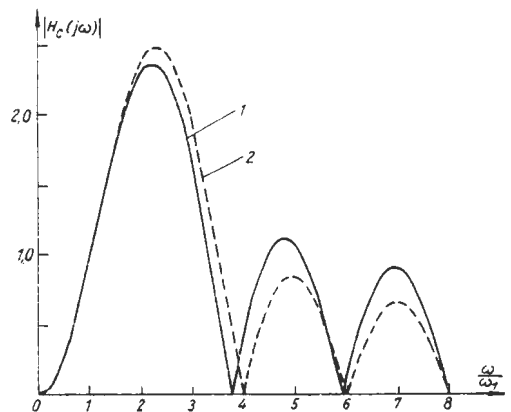
W miarę skracania okna pomiarowego filtr składowej synfazowej wzmacnia również składową stałą sygnału. Jest to niekorzystne ze względu na możliwość wystąpienia w mierzonym prądzie zakłócenia w postaci wolno zanikającej składowej aperiodycznej. Sposób eliminacji tego zakłócenia polega na stosowaniu rozbudowanego modelu sygnałowego lub na takiej modyfikacji modelu dwustanowego, że funkcja wagi filtru składowej synfazowej ma sumę współczynników równą zero. Na rysunku 4.3 pokazano charakterystyki filtrów składowej synfazowej opartych na modelu trzystanowym (3.49) oraz na modelu dwustanowym, w którym okres funkcji bazowej jest równy długości okna pomiarowego (3.65). Widać, że w wyniku modyfikacji charakterystyki impulsowej h_c filtr stał się niewrażliwy na składową stałą.

Podobnie można postąpić również w przypadku bardziej złożonych modeli pomiarowych.

4.2.2. Filtry o nieskończonej odpowiedzi impulsowej

Filtry NCI są w ogólnym przypadku określone równaniem (4.1), jeśli przynajmniej jeden współczynnik członu rekursywnego $b(l)$ jest różny od zera.

Zarówno metody projektowania, jak i struktury tych filtrów mogą być różnorodne [95], [166]. Dzięki występującemu w filtrze sprzężeniu zwrotnemu, obserwuje się efekt nieskończonej pamięci, przez co aproksymację



Rys. 4.3. Charakterystyki częstotliwościowe amplitudy półokresowego filtra składowej synfazowej ($N=16$): 1 - według modelu (3.49); 2 - według modelu (3.65)

Fig. 4.3. Frequency response of a half-wave direct component filter ($N=16$): 1 - according to the model (3.49); 2 - according to the model (3.65)

zadanej charakterystyki amplitudowej można osiągnąć mniejszym kosztem obliczeniowym niż w filtrach nierekursywnych. Dużą trudność sprawia jednak kształtowanie charakterystyki fazowej [53].

O możliwości zastosowania tych filtrów w członach pomiarowych decydują następujące charakterystyki:

- filtry rekursywne mają zazwyczaj gorszą dynamikę w stosunku do filtrów nierekursywnych o podobnej charakterystyce amplitudowej;
- kłopoty z kształtowaniem charakterystyki fazowej utrudnia ich zastosowanie w znanych algorytmach pomiarowych;
- filtry rekursywne są wrażliwe na niedokładność współczynników.

Projektowanie filtrów rekursywnych może przebiegać na drodze dyskretnej aproksymacji charakterystyki zadanego filtra analogowego lub przez bezpośrednią syntezę. Istnieje na ten temat bogata literatura [57], [166].

Jedną z możliwych form realizacji filtra rekursywnego jest tzw. struktura kaskadowa szeregowo połączonych filtrów II rzędu. Transmitancja takiego filtra jest określona równaniem [53]:

$$H(z) = \prod_{i=1}^{M/2} \frac{G_i(z)}{1 - b_{1i}z^{-1} - b_{2i}z^{-2}}, \quad (4.11)$$

gdzie: M - liczba biegunów transmitancji filtra (rzęd filtra),

$G(z)$ - transmitancja części nierekursywnej filtra.

W filtrze nieparzystego rzędu o podanej strukturze jeden z elementów równania (4.11) jest I rzędu ($b_2 = 0$).

Stosowanie filtrów rekursywnych niskiego rzędu jest związane z tym, że długość stanu przejściowego wąskopasmowego filtra szybko wzrasta ze wzrostem liczby członów rekursywnych [140]. W omawianym przypadku nie używa się zwykle filtrów powyżej IV rzędu. W automatyce elektroenergetycznej większe zastosowanie znalazły filtry rekursywne budowane według modeli stanowych.

4.3. Korelacja cyfrowa

Korelacja cyfrowa, zastosowana do wydobywania sygnału z szumu, oparta jest na podobieństwie dwóch sygnałów do siebie [44]. Miarą tego podobieństwa jest funkcja korelacji wzajemnej, definiowana jako suma iloczynów odpowiednich ciągów $h(i)$, $y(i)$, reprezentujących sygnały [3]:

$$x_{hy}(j) = \sum_{i=0}^{K-1} h(i-j)y(i), \quad (4.12)$$

gdzie: $j = 0, 1, \dots, m$ - przesunięcie obu sygnałów.

W przypadku identyfikacji sygnałów, jednym z ciągów w zależności (4.12) jest mierzony sygnał y , a drugim - model sygnałowy h . W interesującym nas przypadku użytecznym modelem sygnałowym jest funkcja sinusoidalna. Ze względu na ortogonalne właściwości tej funkcji dla uzyskania pełnej informacji o stopniu jej korelacji z sygnałem y wystarczy obliczyć zależność (4.12) dla dwóch wartości przesunięć j , odpowiadających kątowi $\pi/2$. Zatem zamiast zależności (4.12) można napisać dwa równania, w których funkcjami odniesienia (funkcjami korelującymi) są ortogonalne funkcje sygnałowego modelu harmonicznego (bez przesunięcia). Można zauważyć, że równania te będą wówczas identyczne z modelem rozważanego w p. 3.3 estymatora dwustanowego. Odnosi się to również do bardziej rozbudowanego modelu sygnałowego.

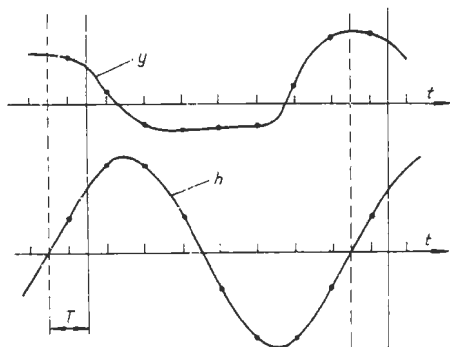
W przypadku analizy sygnału na bieżąco korelowane są ze sobą dwa przebiegi: identyfikowany i odniesienia w oknie pomiarowym ($i = 0, 1, \dots, K-1$), które przesuwają się wzdłuż obu tych sygnałów w miarę pojawiających się nowych danych pomiarowych (rys. 4.4). W analizowanych w p. 3.3 algorytmach odpowiada to zmianie kąta α o wartość wielkości v (3.37) pomiędzy kolejnymi położeniami okna pomiarowego. W ten sposób korelacyjna metoda identyfikacji składowych harmonicznych sygnału, oparta na estymatorach (3.24), jest określona równaniami:

$$\hat{x}_s(k) = p_s \sum_{i=0}^{K-1} h_s(k-i)y(k-i) ,$$

$$\hat{x}_c(k) = p_c \sum_{i=0}^{K-1} h_c(k-i)y(k-i)$$
(4.13)

Należy zauważyć, że estymatory korelacyjne (4.13), w odróżnieniu od filtrów (4.6), są w ogólnym przypadku niestacjonarne, gdyż funkcje korelujące h_s , h_c zmieniają się wraz z przesuwaniem się okna pomiarowego.

Właściwości korelacyjnych estymatorów amplitudy można wyprowadzić z właściwości filtrów nierekursywnych, jeśli funkcje korelujące są okresowym przedłużeniem odpowiedzi impulsowych porównywanych filtrów [113]. Można zauważyć, że związki (4.6) i (4.13) różnią się kierunkiem osi czasu funkcji korelującej względem odpowiedzi impulsowej. Na



Rys. 4.4. Zasada korelacyjnej metody estymacji sygnału
Fig. 4.4. Principle of the correlation method of signal estimation

podstawie właściwości przekształcenia Fouriera można stwierdzić, że w konsekwencji tego, postacię widmowe porównywanych estymatorów są sprzężone. Estymatory (4.6) i (4.13) są zatem, przy omówionych warunkach, równoważne sobie w zakresie charakterystyki widmowej (zachodzi jedynie różnica w fazie widma). Również właściwości statystyczne tych estymatorów są identyczne, gdyż oparte są na tej samej metodzie oceny błędów.

Różnice dotyczą wspomnianej już niestacjonarności estymatora korelacyjnego (ze względu na okresowość funkcji korelującej jest to niestacjonarność cykliczna), sposobu realizacji algorytmu oraz charakterystyk czasowych.

Rezultatem operacji określonej przez estymator korelacyjny jest współczynnik korelacji (nieunormowany), który przy zgodności sygnału z modelem jest wartością stałą. W wyniku wykonania algorytmu (4.13) otrzymuje się składowe \hat{x}_s , \hat{x}_c nieruchomego wektora \hat{x} , który charakteryzuje stopień podobieństwa funkcji korelujących h_s , h_c do mierzonego sygnału y . W przeciwieństwie zatem do filtrów, które redukują zakłócenia w sygnale, nie zmieniając jego charakteru, estymatory korelacyjne określają jedynie wzajemne zależności między sygnałami: mierzonym i odniesienia. Trudno jest zatem posługiwać się charakterystyką częstotliwościową w odniesieniu do tego estymatora korelacyjnego ze względu na jego niestacjonarność. Charakterystyka częstotliwościowa jest natomiast stosowana do opisu właściwości estymatora mocy (amplitudy) sygnału. Ogólna postać estymatora korelacyjnego wynika ze sposobu obliczania amplitudy wektora na podstawie jego składowych ortogonalnych i jest określona równaniami (3.25). Charakterystyki częstotliwościowe tych estymatorów są analogiczne do charakterystyk estymatorów filtracyjnych i będą analizowane w dalszej części pracy.

Dużą zaletą estymatorów korelacyjnych jest prosta realizacja rekursywna. Wynika to ze struktury równań (4.13) oraz z periodyczności funkcji korelujących. Jeśli w charakterze tych funkcji zastosować składniki modelu dwustanowego (3.41), to przy pełnokresowym oknie pomiarowym otrzymamy:

$$\begin{aligned}\hat{x}_s(k) &= \hat{x}_s(k-1) + p_s[y(k) - y(k-N)] h_s(k), \\ \hat{x}_c(k) &= \hat{x}_c(k-1) + p_c[y(k) - y(k-N)] h_c(k),\end{aligned}\tag{4.14}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}h_s(k) &= -\sin(\nu k + \frac{\nu}{2}), \\ h_c(k) &= -\cos(\nu k + \frac{\nu}{2}), \quad p_s = p_c = \frac{2}{N}.\end{aligned}$$

Zależności (4.14) wynikają z faktu, że $h(k) = h(k-N)$. Podobna

symetria zachodzi także dla półokresowego okna pomiarowego: $h(k) = -h(k-N/2)$. Estymator rekursywny ma wtedy następującą postać:

$$\begin{aligned}\hat{x}_S(k) &= \hat{x}_S(k-1) + p_S[y(k) + y(k-N/2)] h_S(k), \\ \hat{x}_C(k) &= \hat{x}_C(k-1) + p_C[y(k) + y(k-N/2)] h_C(k),\end{aligned}\quad (4.15)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}h_S(k) &= -\cos(\nu k + \frac{\nu}{2}), \\ h_C(k) &= \sin(\nu k + \frac{\nu}{2}), \quad p_S = p_C = \frac{4}{N}.\end{aligned}$$

Podobną strukturę mają również rekursywne estymatory zbudowane na podstawie funkcji Walsha. Uzyskuje się wtedy dodatkowe uproszczenie ze względu na eliminację mnożenia [113].

Interesująca jest analiza właściwości rekursywnego algorytmu opartego na modelu trzystanowym (3.48). Rozpatrzmy równania estymatorów dla pełnokresowego okna pomiarowego. Po podstawieniu do równań (4.13) zależności (3.48), w których $\alpha = \alpha_0 + \nu k$, otrzymamy:

$$x_S(k) = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ -\sin[\nu(k-i) + \alpha_0 + \frac{\nu}{2}] + \frac{\cos(\delta) \sin(\alpha_0 + \nu k + \delta)}{\cos(\nu/2)} \right\} y(k-i), \quad (4.16)$$

$$x_C(k) = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ -\cos[\nu(k-i) + \alpha_0 + \frac{\nu}{2}] + \frac{\cos(\delta) \cos(\alpha_0 + \nu k + \delta)}{\cos(\nu/2)} \right\} y(k-i),$$

gdzie: α_0 - początkowa wartość kąta α ,

δ - jak w (3.46).

Gdy zapiszemy równania (4.16) dla dwóch kolejnych kroków $k-1$, k , otrzymamy algorytm rekursywny. Po dokonaniu niezbędnych przekształceń otrzymamy:

$$\hat{x}_I(k) = \hat{x}_I(k-1) + h_S(k) \Delta y(k), \quad (4.17)$$

$$\hat{x}_R(k) = \hat{x}_R(k-1) + h_C(k) \Delta y(k),$$

$$\hat{x}_S(k) = p_S[\hat{x}_I(k) + d_S(k+1) \Sigma y(k)], \quad (4.18)$$

$$\hat{x}_C(k) = p_C[\hat{x}_R(k) + d_C(k+1) \Sigma y(k)],$$

gdzie:

$$\begin{aligned}\Delta y(k) &= y(k) - y(k-N), \\ \Sigma y(k) &= \Sigma y(k-1) + \Delta y(k) = \sum_{i=0}^{N-1} y(k-i),\end{aligned}\quad (4.19)$$

$$h_s(k) = -\sin(\nu k + \alpha_0 + \nu/2),$$

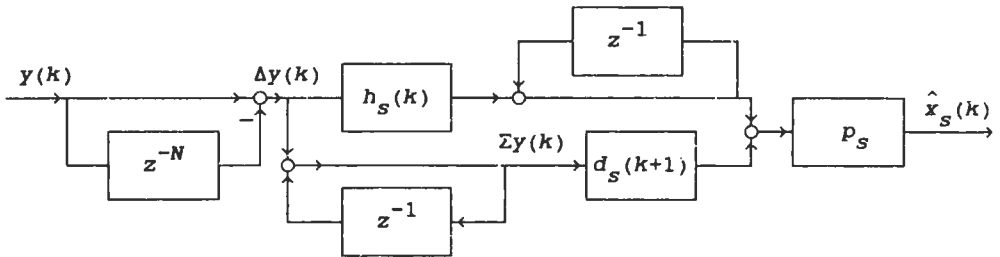
$$h_c(k) = -\cos(\nu k + \alpha_0 + \nu/2),$$

$$d_s(k) = \frac{\cos \delta \sin(\alpha_0 + \nu k + \delta)}{\cos(\nu/2)}, \quad (4.20)$$

$$d_c(k) = \frac{\cos \delta \cos(\alpha_0 + \nu k + \delta)}{\cos(\nu/2)},$$

$$p_s = p_c = 2/N$$

Równania (4.17) przedstawiają estymatory korelacyjne sygnału według modelu dwustanowego (bez skalowania), a równania (4.18) uzupełniają je o model składowej aperiodycznej. Strukturę tego algorytmu pokazano na rys. 4.5. Widać, że algorytm jest niezwykle oszczędny obliczeniowo. Do określenia kolejnej wartości estymaty jednej składowej sygnału w modelu trzystanowym należy wykonać dwa mnożenia.



Rys. 4.5. Struktura trzystanowego algorytmu korelacyjnego (dla jednej składowej ortogonalnej)

Fig. 4.5 Block diagram of a 3 - state correlation algorithm for one orthogonal signal component

Dalsze uproszczenie algorytmu można uzyskać przez zastąpienie modelu Fouriera trzystanowym modelem Walsha (3.60). Struktura algorytmu pozostaje nie zmieniona, a współczynniki równań (4.17) i (4.18) wyrażają się następującymi związkami:

$$h_s(k) = -\text{wal}_1(\nu k + \alpha_0 + \nu/2),$$

$$h_c(k) = -\text{wal}_2(\nu k + \alpha_0 + \nu/2),$$

$$d_s(k) = \text{wal}_1(\nu k + \alpha_0 + \nu/2) \frac{1 - \exp(c)[2 \exp(-bk_s) - 1]}{1 + \exp(c)}, \quad (4.21)$$

$$d_c(k) = \text{wal}_2(\nu k + \alpha_0 + \nu/2) \frac{1 - \exp(c)[2 \exp(-bk_c) - 1]}{1 + \exp(c)},$$

gdzie: b , c , k_s , k_c - jak w (3.59).

Zgodnie z równaniami (4.18) estymowane wielkości są określane na podstawie różnicy Δy próbek sygnału w odstępie równym długości okna pomiarowego oraz sumy próbek Σy w oknie (wielkość Σy jest także obliczana rekursywnie - (4.19)).

Charakterystyki widmowe rozważanych algorytmów są przedstawione w dalszej części pracy.

Po zanalizowaniu estymatorów korelacyjnych i filtracyjnych, opartych na tych samych modelach pomiarowych, można sformułować następujące wnioski:

1. Porównanie charakterystyk częstotliwościowych może odnosić się jedynie do estymatorów amplitudy i fazy sygnału.

2. Rezultatem korelacji jest ciąg współczynników liczbowych, określających stopień podobieństwa sygnału i funkcji korelującej, podczas gdy na wyjściu filtru uzyskuje się odpowiednio zmodyfikowany sygnał pomiarowy.

3. Estymatory korelacyjne dla pełno- i półokresowych okien pomiarowych można przedstawić w prostej postaci rekursywnej, która zazwyczaj prowadzi do bardziej oszczędnych obliczeniowo algorytmów niż w przypadku filtrów.

4. Z punktu widzenia estymacji amplitudy i fazy sygnału, właściwości statystyczne (błędy) i częstotliwościowe obu typów estymatorów są jednakowe (jeśli są oparte na tych samych modelach pomiarowych). Jednak podstawą syntezy jest zwykle, w przypadku algorytmów filtracyjnych - żądana charakterystyka częstotliwościowa, a w przypadku korelacji - żądany kształt funkcji korelującej.

4.4. Obserwatory stanu

Rozpatrzmy deterministyczny stanowy model sygnałowy (2.19):

$$X(k+1) = A(k) X(k), \quad (4.22a)$$

$$Y(k) = H(k) X(k) \quad (4.22b)$$

Odpowiada mu następujący rekursywny algorytm MNK oceny wektora stanu (3.32a):

$$\hat{X}(k+1) = A(k) \hat{X}(k) + K(k+1)[Y(k+1) - H(k+1) A(k) \hat{X}(k)] \quad (4.23)$$

Do określenia macierzy wzmocnienia (macierzy wagowej) K w równaniu (4.23) można stosować procedurę (3.32). Większą swobodę kształtowania właściwości tego estymatora uzyskuje się jednak przez wyznaczenie macierzy K na podstawie analizy jego właściwości dynamicznych.

Jeśli aproksymację wektora $\hat{X}(k+1)$ prowadzić na podstawie wielkości

mierzonych w poprzednim kroku (predykcja), to równanie (4.23) wyrazi się w następującej formie:

$$\hat{X}(k+1) = A(k) \hat{X}(k) + K(k)[Y(k) - H(k) \hat{X}(k)] \quad (4.24)$$

Równanie (4.24) jest znane jako obserwator stanu systemu (4.22) (obserwator Luenbergera pełnego rzędu [51]). Gdy spełnione są warunki obserwowalności systemu (4.22) oraz stabilności równania (4.24), wówczas za pomocą tego obserwatora można ocenić wektor stanu X . Podstawą domniemanej zbieżności stanu obserwatora $\hat{X}(k)$ do stanu systemu $X(k)$ jest założenie o ich jednakowej strukturze (rys.4.6). Dynamikę procesu zbieżności można prześledzić, rozpatrując błąd stanu:

$$\tilde{X}(k+1) = X(k+1) - \hat{X}(k+1) \quad (4.25)$$

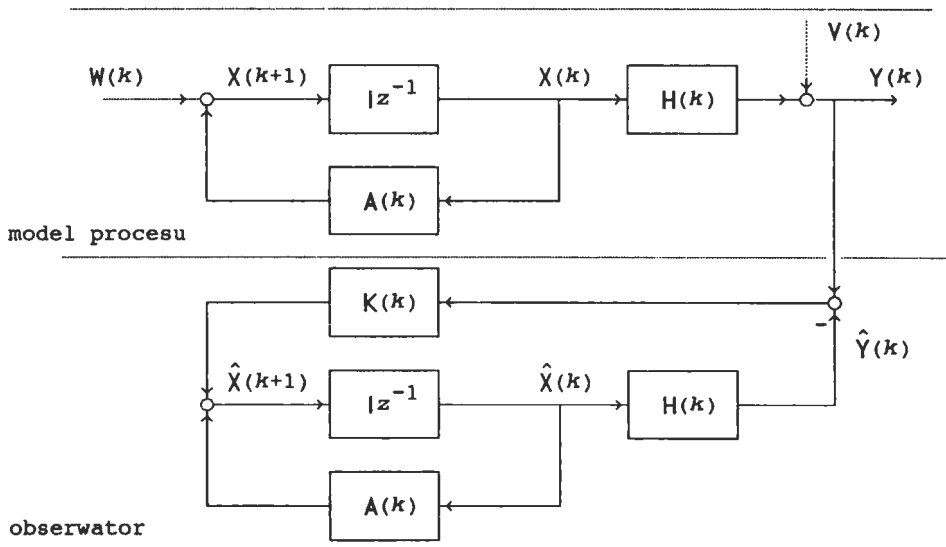
Po uwzględnieniu zależności (4.22) i (4.24) otrzymamy:

$$\tilde{X}(k+1) = \Psi(k) \tilde{X}(k), \quad (4.26a)$$

gdzie:

$$\Psi(k) = A(k) - K(k) H(k) \quad (4.26b)$$

Przebieg błędu jest zatem zależny od macierzy Ψ , którą dla danego obserwatora określa się przez macierz wzmocnienia K .



Rys. 4.6. Model sygnałowy procesu i jego obserwator stanu
Fig. 4.6. Dynamic process and its state observer

Synteza obserwatora stanu sprowadza się zatem do określenia macierzy K , która zapewnia określone właściwości dynamiczne równania (4.26a). Sposoby doboru tego wektora są dobrze znane w teorii sterowania [51], [63]. Rozpatruje się przy tym oddzielnie stacjonarne i niestacjonarne obserwatory stanu.

4.4.1. Stacjonarne obserwatory stanu

W przypadku stacjonarnego systemu (4.22) macierze parametrów są niezależne od czasu: $A(k) = A$, $H(k) = H$. W rozważanym przypadku obserwator stanu służy do pomiaru prądu lub napięcia, zatem wielkość mierzona według (4.22b) jest skalarem:

$$y(k) = H(k) X(k) , \quad (4.27)$$

gdzie: $H(k) = H$ - wektor pomiarów $1 \times M$, M - liczba stanów systemu (4.22).

Obserwator (4.24) jest stabilny, gdy wartości własne macierzy Ψ (4.26b) spełniają następujący warunek:

$$|\lambda_i| < 1, \quad i = 1, 2, \dots, M , \quad (4.28)$$

przy czym równanie charakterystyczne macierzy Ψ ma postać:

$$\begin{aligned} \det[\lambda I - A + K H] &= \gamma_1 + \gamma_2 \lambda + \dots + \gamma_M \lambda^{M-1} + \lambda^M = \\ &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_M) = 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Przebieg błędu, a zatem i dynamiczna charakterystyka obserwatora są zależne od położenia wartości własnych macierzy Ψ . W szczególności, gdy wszystkie wartości własne są położone w początku układu współrzędnych (na płaszczyźnie zespolonej), tzn:

$$\det[\lambda I - A + K H] = \lambda^M , \quad (4.30)$$

wówczas błąd (4.26a) w M -tym kroku obserwacji wyrazi się zależnością:

$$\tilde{X}(M) = \Psi(M-1) \Psi(M-2) \dots \Psi(0) \tilde{X}(0) = 0 \quad (4.31)$$

Ten typ obserwatora nosi nazwę obserwatora o odpowiedzi dead-beat [26], [51]. Stan modelu określa się w najgorszym przypadku w M -tej obserwacji. Zmieniając położenie biegunów macierzy Ψ przez dobór macierzy wzmocnienia K , można kształtować charakterystyki dynamiczne obserwatora stanu. Sposób określenia macierzy K przy zadanych biegunach macierzy Ψ jest podany w Dodatku B.

Struktura modelu sygnałowego przedstawionego w postaci stacjonarnych równań stanu zależy od rodzaju zakłóceń występujących w mierzonym sygnale. Para macierzy $[A, H]$ może być określona następująco:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_p & A_a \end{bmatrix}, \quad H = [H_1 \ H_2 \ \dots \ H_p \ H_a], \quad (4.32)$$

gdzie:

$$A_i = \begin{bmatrix} \cos(\nu i) & \sin(\nu i) \\ -\sin(\nu i) & \cos(\nu i) \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, p \text{ - macierz stanu } i\text{-tej} \\ \text{harmonicznej,} \quad (4.33)$$

$H_i = [0 \ 1]$, $i = 1, 2, \dots, p$ - wektor pomiarów i -tej harmonicznej,

(A_a, H_a) - para macierzy odnosząca się do modelu składowej aperiodycznej.

Każdej parze (A_i, H_i) odpowiada wektor stanu:

$$\hat{X}_i = [\hat{x}_{2i-1} \ \hat{x}_{2i}]^T = [\hat{x}_{si} \ \hat{x}_{ci}]^T \quad (4.34)$$

Składowa aperiodyczna może być przedstawiona jednym składnikiem. Wtedy analogicznie do zależności (3.43) otrzymamy:

$$A_a = [\exp(b)], \quad H_a = [1], \quad \hat{X}_a = [\hat{x}_a] \quad (4.35)$$

Jeśli $T_a \rightarrow \infty$, to: $A_a = [1]$.

Gdy składową aperiodyczną aproksymować trzema pierwszymi wyrazami rozkładu funkcji wykładniczej w szereg Taylora (3.61), wówczas otrzymamy:

$$A_a = \begin{bmatrix} 1 & \nu & \nu^2 \\ 0 & 1 & \nu \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H_a = [1 \ 0 \ 0], \quad \hat{X}_a = [\hat{x}_{a3} \ \hat{x}_{a2} \ \hat{x}_{a1}]^T \quad (4.36)$$

Rozpatrywany obserwator ma strukturę pozwalającą estymować składowe ortogonalne poszczególnych harmonicznego sygnału, stąd też jest nazywany spektralnym obserwatorem stanu [25].

Algorytm projektowania obserwatora stanu do estymacji składowych sygnału zabezpieczeniowego jest następujący:

1. Określić model sygnałowy procesu (liczbę składowych harmonicznym oraz sposób aproksymacji składowej aperiodycznej).

2. Wybrać wartości własne macierzy Ψ (4.26) zgodnie z warunkiem (4.28) dla poszczególnych składowych wektora χ .

3. Na podstawie algorytmu podanego w Dodatku B określić wektor wzmocnienia K .

4. Z badać charakterystyki estymatora (4.24) dla zadanych sygnałów wejściowych.

Przy wyborze biegunów macierzy Ψ należy się kierować znaną zasadą, że zbliżanie bieguna do początku układu współrzędnych prowadzi do szybszego zanikania stanu przejściowego z czym wiążą się większe przeregulowania.

4.4.2. Niestacjonarne obserwatory stanu

Obserwator stanu oparty na niestacjonarnym modelu sygnałowym ma zmienną w czasie macierz wzmocnienia. Jeśli rozważyć układ o stałym okresie próbkowania, to łatwo sprawdzić, że model sygnałowy równoważny rozpatrywanemu poprzednio procesowi stacjonarnemu ma następującą strukturę macierzy parametrów:

$$A(k) = A = I_{M \times M}, \quad (4.37)$$

$$H_i(k) = [\sin(\nu ki) \quad \cos(\nu ki)] ,$$

$$H_a(k) = [(\nu k)^2 \quad \nu k \quad 1] \quad - \text{dla trzejelementowego modelu składowej aperiodycznej.}$$

Równoważność obu procesów odnosi się do sygnału y , natomiast zmienne stanu mają w obu przypadkach inny charakter. W obserwatorze stacjonarnym zmienne stanu, opisujące składowe ortogonalne poszczególnych harmonicznych sygnału, przedstawiają fazory wirujące z prędkością kątową odpowiednią dla danej harmonicznej. W obserwatorze niestacjonarnym zmienne stanu przedstawiają współrzędne nieruchomego wektora, którego położenie zależy od fazy danej harmonicznej. Można tu zauważyć analogię do rezultatów estymacji sygnałów metodą filtracji i korelacji.

Synteza obserwatora niestacjonarnego jest bardziej kłopotliwa niż w przypadku stacjonarnym. Wektor wzmocnienia $K(k)$ można również określić z warunku (4.31), przy czym macierze $\Psi(i)$ zmieniają się w czasie. W przypadku jednowyjściowego obserwatora o odpowiedzi dead-beat otrzymamy [50]:

$$K(k) = \frac{A(k) F(k) \text{col}(i)}{H(k) F(k) \text{col}(i)}, \quad (4.38a)$$

gdzie:

$$F(k) = \prod_{j=0}^{k-1} \Psi(j) \quad (\text{mnożenie lewostronne}), \quad (4.38b)$$

$$\Psi(j) = A(j) - K(j) H(j), \quad (4.38c)$$

$\text{col}(i)$ - numer dowolnej kolumny macierzy poprzedzającej, tak wybranej, że mianownik (4.38a) jest różny od zera.

W przypadku obserwowalnej pary $\{A, H\}$ można zawsze tak wybrać kolumny macierzy $F(k)$, że mianownik (4.38a) jest różny od zera. Współczynniki wzmocnienia $K(k)$ dla składowych harmonicznych tworzą, po osią-

gnięciu stanu ustalonego, okresowy ciąg powtarzający się z częstotliwością identyfikowanego fazora.

Ze względu na zmienny w czasie wektor K właściwości rozpatrywanego obserwatora są różne w stanie ustalonym i nieustalonym (tuż po uruchomieniu procesu obserwacji). Poprawny (najszybszy) pomiar parametrów zaburzenia w nadzorowanym systemie nastąpi wówczas, gdy początek obserwacji pokryje się z momentem wystąpienia tego zaburzenia (zwarcia). Uruchomienie procesu estymacji powinno zatem nastąpić w wyniku detekcji wystąpienia zakłócenia w systemie.

Obserwator stacjonarny ma stały współczynnik wzmocnienia i jego właściwości nie zależą od momentu rozpoczęcia obserwacji.

4.5. Filtracja Kalmana

4.5.1. Algorytm filtracji

Filtr Kalmana jest optymalnym estymatorem parametrów procesu stochastycznego, który jest opisany następującymi równaniami stanu (2.18):

$$\begin{aligned} X(k+1) &= A(k) X(k) + W(k), \\ Y(k) &= H(k) X(k) + V(k), \end{aligned} \quad (4.39)$$

gdzie poszczególne wielkości opisano w p. 2.3.

Kryterium optymalności stanowi minimalna suma wariancji błędów estymacji (3.36). Jeśli proces (4.39) spełnia określone wymagania, wyszczególnione w p. 3.2.2, to poszukiwany estymator jest opisany równaniami (3.35). Uporządkowana sekwencja obliczania tych równań tworzy następujący algorytm filtru Kalmana:

(i) $k = 0$,

przygotowanie modelu procesu i pomiarów w postaci następujących danych:

$\hat{X}(0)$ - początkowa wartość estymowanego wektora stanu,

$P(0)$ - początkowa wartość macierzy kowariancji błędów estymacji,

$A(i)$, $i = 0, 1, \dots$ - macierz stanu,

$H(i)$, $i = 1, 2, \dots$ - macierz pomiarów,

$Q(i)$, $i = 0, 1, \dots$ - macierz kowariancji zakłóceń procesu,

$R(i)$, $i = 1, 2, \dots$ - macierz kowariancji zakłóceń pomiaru.

(ii) Określenie macierzy wzmocnienia $K(k)$ i macierzy kowariancji błędów estymacji $P(k)$:

$$P_1(k+1) = A(k) P(k) A^T(k) + Q(k),$$

$$K(k+1) = P_1(k+1) H^T(k+1) [H(k+1) P_1(k+1) H^T(k+1) + R(k+1)]^{-1},$$

$$P(k+1) = [I - K(k+1) H(k+1)] P_1(k+1).$$

(iii) Estymacja wektora stanu:

$$\hat{X}(k+1) = A(k) \hat{X}(k) + K(k+1) [Y(k+1) - H(k+1) A(k) \hat{X}(k)].$$

(iv) $k = k+1$,

powrót do kroku (ii).

Widać, że wielkości określane w drugim kroku powyższego algorytmu nie zależą od wielkości estymowanej. Wektor wzmocnienia $K(k)$ może być zatem obliczony wcześniej, poza procesem filtracji.

Filtr Kalmana ma strukturę podobną do obserwatora stanu (rys. 4.6 - wraz z zakłóceniami) i jest niekiedy nazywany optymalnym obserwatorem stanu [51].

System określony równaniami (4.39) jest w ogólnym przypadku niestacjonarny. Jednakże nawet w przypadku stacjonarności systemu (4.39), filtr Kalmana jest układem niestacjonarnym ze względu na zmienną w czasie macierz wzmocnienia $K(k)$. Podobnie zatem jak nierekursywny algorytm MNK i niestacjonarny obserwator stanu, filtr Kalmana ma właściwości zmieniające się w czasie. W celu poprawnej identyfikacji sygnału związanego z awarią w zabezpieczonym obiekcie, uruchomienie filtru Kalmana powinno być poprzedzone detekcją wystąpienia zakłócenia w systemie.

4.5.2. Zasady projektowania filtru

Synteza filtru Kalmana obejmuje opracowanie modelu sygnałowego (4.39), określenie warunków początkowych oraz obliczenie macierzy wzmocnienia $K(k)$.

W przypadku stosowania filtru Kalmana do estymacji składowych ortogonalnych sygnału mierzonego przez zabezpieczenie, model sygnałowy jest opracowywany na podstawie równań (4.32)-(4.37) uzupełnionych o modele zakłóceń. Struktura i parametry modelu w dużym jednak stopniu zależą od przeznaczenia filtru.

W zabezpieczeniach linii elektroenergetycznych model związany z pomiarem napięcia jest zazwyczaj dwustanowy. Przyjmuje się, że zakłócenia pomiarowe mają charakter szumu białego z zanikającą wykładniczo wariancją [43]:

$$R(k) = R_U(k) = \sigma_U^2 \exp(-kT/T_L), \quad (4.40a)$$

gdzie:

$$T_L = \frac{0,5 L_1 d}{R_1 d + R_f}, \quad (4.40b)$$

σ_U^2 - zakładana wariancja błędu pomiaru napięcia po zwarceniu na linii,

L_1, R_1 - jednostkowe parametry linii dla składowej zgodnej,

- d - połowa długości linii,
 R_f - oczekiwana wartość rezystancji w miejscu zwarcia.

Proces generacji napięcia można przyjąć losowo niezmienny i stąd macierz kowariancji zakłóceń procesu $Q_u(k) = 0$.

Model sygnałowy toru pomiaru prądu powinien być bardziej rozbudowany ze względu na możliwość wystąpienia składowej aperiodycznej o długim czasie zanikania. Odpowiadający temu proces jest niestacjonarny ze stosunkowo dużą wartością początkową wariancji zakłóceń składowej aperiodycznej. Dla trzystanowego modelu macierz $Q_i(k)$ może być przedstawiona następująco:

$$Q_i(k) = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & q_{33} \end{bmatrix}, \quad (4.41)$$

gdzie: q_{11}, q_{22} - wariancje procesu dla składowych ortogonalnych (przyjmuje się równe zero lub bardzo małe),

q_{33} - wariancja procesu generacji składowej aperiodycznej.

Wariancja błędów pomiaru prądu jest w tym przypadku określona podobnie jak dla napięcia.

W przypadku zabezpieczeń różnicowych transformatora proces generacji sygnału musi uwzględniać zarówno rozbudowany algorytm zabezpieczenia (badanie stanu nasycenia rdzenia), jak i możliwość znacznego odkształcenia prądu zwarciovego. Stosuje się wówczas modele 5-11-stanowe [90], [106].

Dokładne określenie struktury modelu oraz jego parametrów wymaga badań symulacyjnych w układzie zbliżonym do projektowanego.

4.6. Przekształcenie procedur rekursywnych w filtry nierekursywne

W punkcie 3.2.2 podano zasady tworzenia rekursywnych procedur estymacji z algorytmów nierekursywnych. Czynność odwrotna prowadzi do algorytmów, na podstawie których można projektować filtry nierekursywne. Postępowanie takie można traktować jako metodę syntezy filtrów nierekursywnych, których charakterystyki widmowe opisują właściwości częstotliwościowe wyjściowych algorytmów rekursywnych w stanie ustalonym [80].

Podstawowe równanie estymacji według rekursywnego algorytmu MNK (3.32) lub (3.35) można przedstawić w następującej postaci:

$$\hat{X}(k) = \Psi(k) \hat{X}(k-1) + K(k) Y(k), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (4.42a)$$

gdzie:

$$\Psi(k) = [I - K(k) H(k)] A(k), \quad (4.42b)$$

przy tym, tak jak we wzorze (2.18), zakłada się, że model sygnałowy jest

określony M -elementowym wektorem stanu \hat{X} z L -elementowym wektorem pomiarów Y .

Ponieważ poprzednie wielkości estymowane: $\hat{X}(k-1), \hat{X}(k-2), \dots, \hat{X}(1)$ są również obliczane według tego algorytmu, więc podstawiając je kolejno do równania (4.42a) uzyskamy następującą nierekursywną reprezentację tego estymatora:

$$\begin{aligned} \hat{X}(k) = & F(k) Y(k) + F(k-1) Y(k-1) + \dots + F(1) Y(1) + \\ & + \Psi(k) \Psi(k-1) \dots \Psi(1) \hat{X}(0), \end{aligned} \quad (4.43a)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} F(1) &= \Psi(k) \Psi(k-1) \dots \Psi(2) K(1), \\ F(2) &= \Psi(k) \Psi(k-1) \dots \Psi(3) K(2), \\ &\dots \end{aligned} \quad (4.43b)$$

$$F(k-1) = \Psi(k) K(k-1),$$

$$F(k) = K(k),$$

$$\hat{X}(0) = 0 \text{ - zgodnie z założeniem do algorytmów (3.32), (3.35).}$$

Ciąg macierzy $F(i)$ można ogólnie zapisać następującym równaniem:

$$F(i) = T(i) K(i), \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (4.44a)$$

gdzie:

$$T(k) = I,$$

$$T(i) = \prod_{j=0}^{k-i-1} \Psi(k-j), \quad i = 1, 2, \dots, k-1 \quad (4.44b)$$

Struktura wektorów $Y(i)$ jest następująca:

$$Y(1) = [y(0) \quad y(1) \quad \dots \quad y(L-1)]^T,$$

$$Y(2) = [y(1) \quad y(2) \quad \dots \quad y(L)]^T,$$

...

$$Y(k) = [y(k-1) \quad y(k) \quad \dots \quad y(k+L-2)]^T. \quad (4.45)$$

Liczba pomiarów L w modelu sygnałowym musi spełniać założenia określone przez rekursywny algorytm MNK: $L \geq M$.

Jeśli należy utworzyć filtr nierekursywny o strukturze (4.43) i szerokości okna pomiarowego obejmującego K ostatnich pomiarów, to wektory pomiarów $Y(i)$ mają strukturę jak we wzorze (4.45), gdzie $k = K-L+1$.

Równanie macierzowe (4.43a) może być zapisane w formie M oddzielnych zależności dla poszczególnych składowych wektora \hat{X} . Powstałe w ten sposób równania mają postać filtrów nierekursywnych (4.6). Współczynniki tych filtrów są utworzone z sum odpowiednich składników macierzy F . Na przykład, dla filtru odpowiadającego pierwszej składowej wektora \hat{X} otrzymamy:

$$\begin{aligned}
h_1(0) &= f_{1,1}^1 \\
h_1(1) &= f_{1,2}^1 + f_{1,1}^2 \\
&\dots \\
h_1(i) &= f_{1,L}^{i-1} + f_{1,L-1}^i + \dots + f_{1,1}^{i+L-2} \quad - \text{ dla } (K-L \leq i \leq L-1) \wedge (K-L > 1) \\
&\dots \\
h_1(K-2) &= f_{1,L}^{K-L} + f_{1,L-1}^{K-L+1} \\
h_1(K-1) &= f_{1,L}^{K-L+1} ,
\end{aligned} \tag{4.46}$$

gdzie: $f_{m,n}^i$ - element (m,n) macierzy $F(i) = \{f_{m,n}^i\}$.

Otrzymujemy zatem następujący algorytm projektowania filtrów nierekursywnych opartych na stanowych filtrach rekursywnych:

- (i) Według algorytmu (3.32) lub (3.35) zaprojektować estymator rekursywny o strukturze (4.42), M -tego rzędu o $L \geq M$ wejściach pomiarowych.
- (ii) Wybrać szerokość okna pomiarowego K i zgodnie z zależnością (4.44) obliczyć macierze $F(1), F(2), \dots, F(K-L+1)$.
- (iii) Na podstawie (4.46) określić współczynniki filtru nierekursywnego dla poszczególnych składowych wektora $\hat{\chi}$.

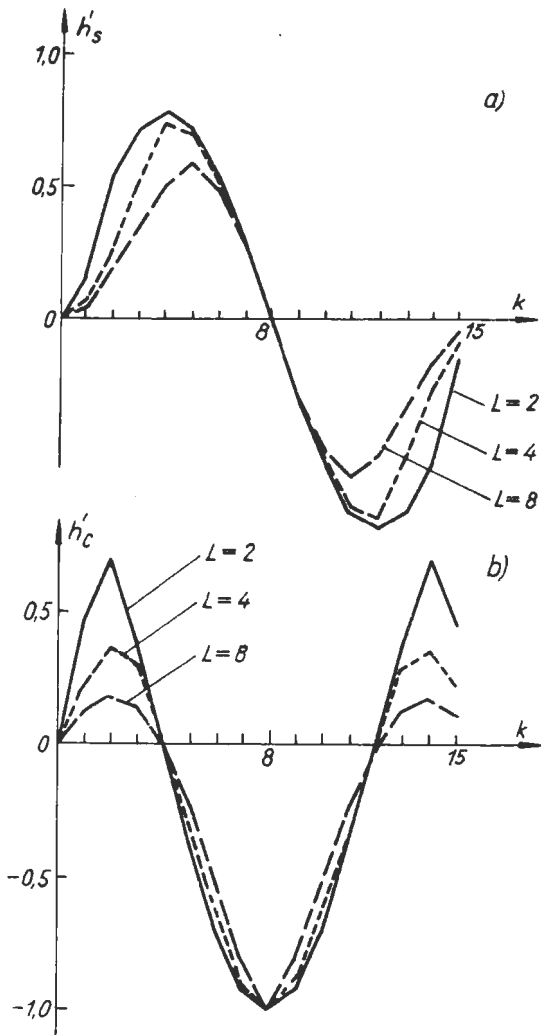
W ogólnym przypadku współczynniki filtru nie spełniają warunków (4.5) i charakterystyka częstotliwościowa fazy jest nieliniowa. Jednakże fazy pary filtrów nierekursywnych, odpowiadających w modelu stanowym składowym ortogonalnym, różnią się również o $\pi/2$. Zapewnia to ortogonalność estymowanych sygnałów.

Właściwości pierwotnego filtru rekursywnego oraz powstałego z niego filtru nierekursywnego pokrywają się, gdy liczba wejść L filtru rekursywnego odpowiada szerokości okna pomiarowego K filtru nierekursywnego. Gdy zwiększa się stosunek L/K , uwidacznia się uśredniające działanie filtru nierekursywnego.

Charakterystyki omawianych filtrów mogą być modyfikowane przez zmianę liczby wejść pierwotnych estymatorów rekursywnych. Na rysunku 4.7 pokazano znormalizowane charakterystyki impulsowe pełnookresowych filtrów nierekursywnych, odpowiadających filtrowi dwustanowemu dla różnej liczby wejść L . Normalizacja została przeprowadzona zgodnie z zależnością:

$$h'(k) = \frac{h(k)}{h_c\left(\frac{N+1}{2}\right)}, \tag{4.47}$$

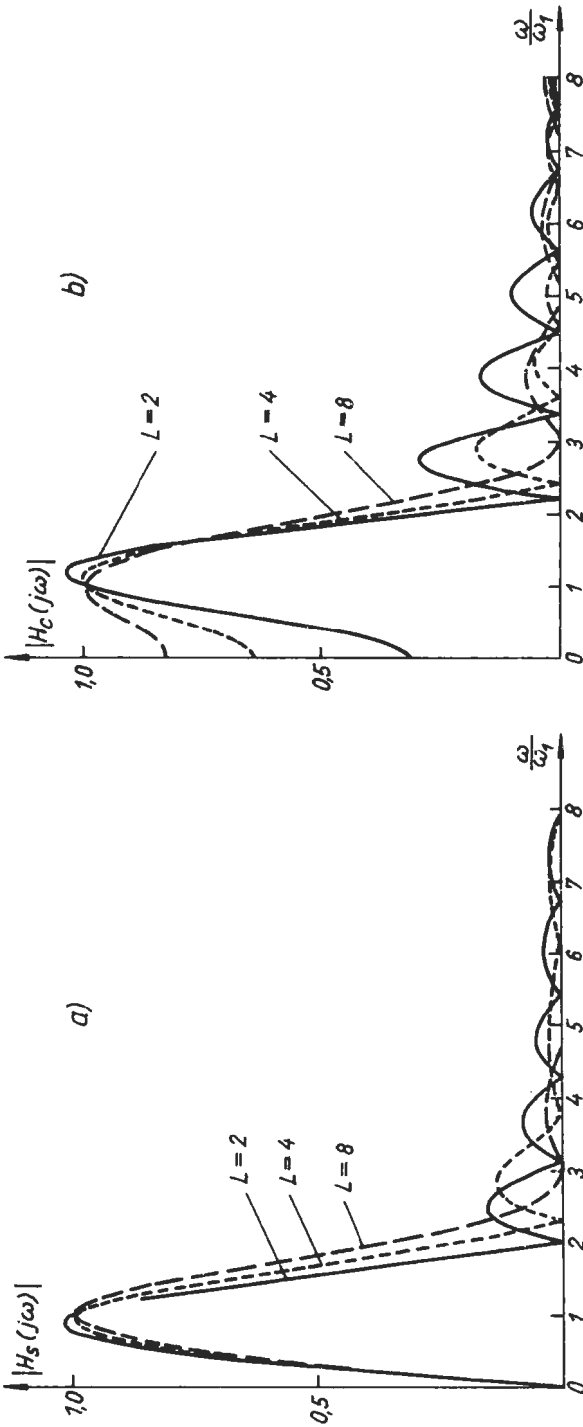
gdzie: $h_c\left(\frac{N+1}{2}\right)$ - wartość współczynnika pełnookresowego filtru składowej synfazowej dla środka symetrii charakterystyki impulsowej.



Rys. 4.7. Znormalizowane charakterystyki impulsowe filtrów nierekursywnych uzyskanych przez przekształcenie dwustanowego filtru rekursywnego; a - filtr składowej kwadraturowej; b - filtr składowej synfazowej; $K = N = 16$

Fig. 4.7. Normalized unit response of nonrecursive filters obtained by transformation of 2-state recursive filter; a - the quadrature component filter; b - the direct component filter; $N = K = 16$

Zwiększenie liczby wejść pierwotnego estymatora rekursywnego powoduje większe wygładzenie efektu ucięcia funkcji impulsowej filtru niere-



Rys. 4.8. Charakterystyki częstotliwościowe filtrów nierekursywnych uzyskanych przez przekształcenie dwustanowego filtru rekursywnego: a - filtr składowej kwadraturowej; b - filtr składowej synfazowej, $K = N = 16$

Fig. 4.8. Frequency response of the nonrecursive filters obtained by transformation of a 2-state recursive filter: a - the quadrature component filter; b - the direct component filter, $K = N = 16$

kursywnego. Efekt ten jest również widoczny na charakterystykach widmowych (rys. 4.8). W tym przypadku poprawie charakterystyki w zakresie większych częstotliwości towarzyszy poszerzenie listka głównego i uwydatnienie składowej stałej w filtrze składowej synfazowej. W celu jej eliminacji, można stosować model trzystanowy (3.43).

Omówiona metoda jest wygodnym narzędziem projektowania nierekursywnych filtrów do estymacji składowych ortogonalnych identyfikowanego sygnału.

Zaprezentowane w tym rozdziale procedury pomiaru parametrów sygnału można podzielić na dwie grupy w zależności od sposobu przedstawienia obserwowanego procesu. Są to metody wywodzące się bądź z nierekursywnych modeli regresji, bądź z równań stanu. Pierwsze z nich prowadzą do filtrów nierekursywnych lub algorytmów korelacji cyfrowej, drugie - do obserwatorów stanu, w tym również filtrów Kalmana.

Ze względu na statyczny, z założenia, charakter modelu regresji, metody pierwszej grupy są zazwyczaj określane właściwościami widmowymi. W przeciwieństwie do nich, obserwatory stanu są przetwornikami dynamicznymi, a zasadą ich funkcjonowania jest likwidacja uchybu pomiarowego. Podstawą ich oceny są przede wszystkim charakterystyki dynamiczne oraz (w przypadku filtru Kalmana) szybkość zanikania wariancji błędów estymacji.

Obie grupy filtrów zachowują się podobnie w stanie ustalonym i wówczas ich właściwości mogą być porównywane na podstawie przedstawionej poprzednio transformacji.

5. ALGORYTMY POMIARU WIELKOŚCI KRYTERIALNYCH

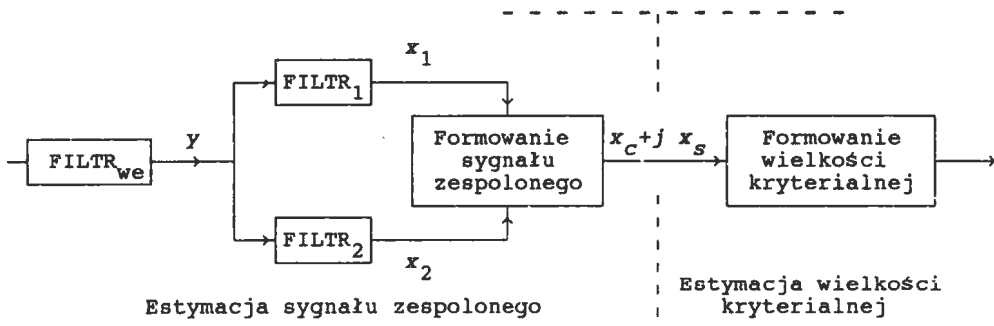
5.1. Wprowadzenie

Wielkości kryterialne zabezpieczeń cyfrowych odpowiadają zazwyczaj określonym wielkościom fizycznym opisującym stan obwodu prądu przemienicznego związanego z nadzorowanym obiektem. Dlatego też wielkości te odnoszą się do podstawowej lub wybranych harmonicznych sygnału prądu i/lub napięcia. Dyskretnym modelem takiego przebiegu, próbkowanego w odstępach kątowych ν , może być następujący sygnał zespolony (fazor):

$$\underline{Y}(k) = Y_C(k) + j Y_S(k) = Y \exp[j(q\nu k + \beta)] \quad (5.1)$$

Gdy znane są estymaty sygnałów zespolonych prądu i napięcia, można łatwo określić złożone wielkości występujące w charakterze kryteriów oceny stanu obiektu. Schemat przetwarzania sygnałów według tej zasady pokazano na rys. 5.1. Bloki określone jako filtry przedstawiają w

ogólnym przypadku cyfrowe przetworniki sygnału, działające na zasadzie splotu, korelacji lub innej, najczęściej liniowej, operacji wykonywanej na sygnale wejściowym.



Rys. 5.1. Struktura algorytmu pomiaru wielkości kryterialnej według modelu sygnału zespolonego

Fig. 5.1. Block diagram of a signal processor for orthogonal components determination

Schemat na rys. 5.1 odnosi się zarówno do układów, w których składowe ortogonalne są określone na zasadzie jednoczesnego przetwarzania sygnałów w oknie pomiarowym (model regresji), jak również do przypadku obserwatorów stanu (model stanowy). Deterministyczne obserwatory stanu, czy też filtry Kalmana z procedurami nieliniowymi (rozszerzone filtry Kalmana) pozwalające bezpośrednio estymować wielkości kryterialne, nie znalazły, jak na razie, szerszego zastosowania w omawianej dziedzinie.

Dalej zostaną przedstawione niektóre algorytmy przetwarzania sygnałów, prowadzące do estymacji podstawowych wielkości kryterialnych zabezpieczeń cyfrowych.

5.2. Estymacja sygnału zespolonego

5.2.1. Zastosowanie filtrów cyfrowych

Do estymacji składowej rzeczywistej x_c i urojonej x_s sygnału zespolonego \underline{x} , na podstawie pomiaru rzeczywistego sygnału y , może służyć układ składający się z przynajmniej dwóch przetworników (rys. 5.1). Załóżmy, że są to liniowe filtry stacjonarne, określone następującą charakterystyką widmową:

$$H_1(j\omega) = |H_1(j\omega)| e^{j\gamma_1(\omega)}, \quad (5.2)$$

gdzie:

$$\gamma_1(\omega) = \arg[H_1(j\omega)], \quad l = 1, 2.$$

Gdy na ich wejście zostanie podana rzeczywista część sygnału (5.1):

$$y(k) = y_c(k) = Y \cos(q\nu k + \beta), \quad (5.3)$$

wówczas w stanie ustalonym sygnały wyjściowe wyrażą się zależnościami:

$$x_1(k) = Y |H_1(j\omega)| \cos[\gamma_1(\omega) + q\nu k + \beta], \quad (5.4)$$

$$x_2(k) = Y |H_2(j\omega)| \cos[\gamma_2(\omega) + q\nu k + \beta]$$

Jeżeli $\gamma_1(\omega) \neq \gamma_2(\omega)$, to za pomocą sygnałów (5.4) można określić wyjściowy sygnał zespolony o postaci jak na rys. 5.1. Zakłada się przy tym, że sygnał $y(k)$ będzie odwzorowany za pomocą sygnału $\underline{x}(k) = \underline{x}_1(k)$, z uwzględnieniem zmiany jego amplitudy i fazy. Dostępne pomiarowo sygnały $x_1(k)$ i $x_2(k)$ są rzeczywistymi składowymi fazorów $\underline{x}_1(k)$ i $\underline{x}_2(k)$ (rys. 5.2 - oznaczenia na tym rysunku odpowiadają założeniu, że $|H_1(j\omega)| = |H_2(j\omega)| = 1$). Składowe fazora $\underline{x}(k)$ są określone następującymi zależnościami (rys. 5.2):

$$x_c(k) = a x_1(k), \quad (5.5a)$$

$$x_s(k) = b x_1(k) - c x_2(k),$$

gdzie:

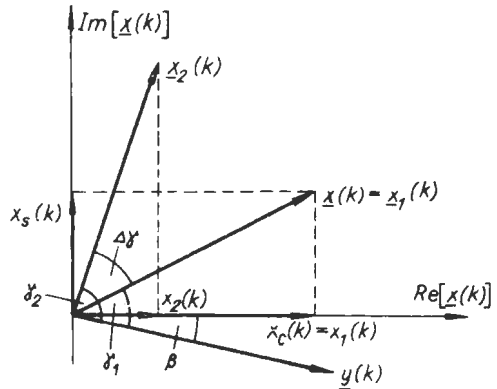
$$a = \frac{1}{|H_1(j\omega)|}, \quad b = \frac{\cos[\Delta\gamma(\omega)]}{|H_1(j\omega)| \sin[\Delta\gamma(\omega)]},$$

$$c = \frac{1}{|H_2(j\omega)| \sin[\Delta\gamma(\omega)]}, \quad (5.5b)$$

$$\Delta\gamma(\omega) = \gamma_2(\omega) - \gamma_1(\omega).$$

Należy zauważyć, że odwzorowanie (5.5a) może być również zdefiniowane w postaci innej kombinacji sygnałów x_1 , x_2 .

Wyrażony przez ortogonalne składowe sygnał $\underline{x}(k) = x_c(k) + j x_s(k)$ może być traktowany jako estymata sygnału $\underline{y}(k)$. Po przekształceniu równań (5.4) i (5.5) uzyskuje się estymatory postaci biegunowej sygnału $\underline{y}(k)$:



Rys. 5.2. Ilustracja metody otrzymywania składowych ortogonalnych sygnałów
Fig. 5.2. Vector representation of the orthogonal components

$$\hat{Y}(k) = \sqrt{x_C^2(k) + x_S^2(k)} \quad , \quad (5.6a)$$

$$\hat{\beta}(k) = \arctg \frac{x_S(k)}{x_C(k)} - \gamma_1(\omega) - q\nu k \quad (5.6b)$$

Estymator sygnału zespolonego (rys.5.1) może być także rozpatrywany jako filtr (w ogólnym przypadku przetwornik cyfrowy) o współczynnikach zespolonych. W przypadku rzeczywistego sygnału wejściowego (5.3) ustalony sygnał wyjściowy może być określony zgodnie z równaniem:

$$\underline{x}(k) = \underline{y}(k) H(j\omega), \quad (5.7a)$$

gdzie:

$$H(j\omega) = a H_1(j\omega) + j[b H_1(j\omega) - c H_2(j\omega)] = |H(j\omega)| e^{j\gamma(\omega)} \quad (5.7b)$$

Współczynniki a , b , c (5.5b) należy określić dla pulsacji $\omega = \omega_0$, tj. pulsacji identyfikowanego sygnału.

W przypadku filtrów SOI, równanie uzyskanego w ten sposób filtru zespolonego ma następującą postać [143]:

$$\underline{x}(k) = \sum_{i=0}^{K-1} [a h_1(i) + j[b h_1(i) - c h_2(i)]] y(k - i), \quad (5.8)$$

gdzie: $h_1(i)$, $h_2(i)$ - funkcje impulsowe filtrów składowych.

Należy zauważyć, że wielkości $H_1(j\omega)$ i $H_2(j\omega)$ są transmitancjami filtrów o współczynnikach rzeczywistych, zatem [95]:

$$H_1(j\omega) = H_1^*(-j\omega), \quad H_2(j\omega) = H_2^*(-j\omega) \quad (5.9)$$

Właściwość ta nie odnosi się natomiast do transmitancji $H(j\omega)$ z równania (5.7b). Dlatego filtr zespolony należy analizować odmiennie dla wymuszających sygnałów rzeczywistych i zespolonych.

W danym przypadku właściwości filtru zespolonego o transmitancji $H(j\omega)$ można zbadać, zapisując harmoniczne wymuszenie $y(k)$ z równania (5.3) w postaci sumy fazorów o przeciwnych kierunkach wirowania:

$$y(k) = \frac{Y}{2} [e^{j(q\nu k + \beta)} + e^{-j(q\nu k + \beta)}] \quad (5.10a)$$

Równanie (5.7a) przyjmie wówczas następującą postać:

$$\underline{x}(k) = \frac{Y}{2} e^{j(q\nu k + \beta)} H(j\omega) + \frac{Y}{2} e^{-j(q\nu k + \beta)} H(-j\omega), \quad (5.10b)$$

gdzie $H(j\omega)$ jest określone zgodnie z równaniem (5.7b), natomiast $H(-j\omega)$ wyraża się zależnością:

$$H(-j\omega) = a H_1^*(j\omega) + j[b H_1^*(j\omega) - c H_2^*(j\omega)] = |H(-j\omega)| e^{j\gamma(-\omega)} \quad (5.11)$$

W celu określenia widmowych właściwości rozważanego filtra wystarczy prześledzić amplitudę i fazę sygnału $\underline{x}(k)$ dla częstotliwości $0 \leq \omega \leq \pi$, gdy $Y = 1$.

Równanie (5.10b) można zapisać w następującej postaci:

$$\underline{x}(k) = Y[H_A(j\omega) \cos(q\nu k + \beta) + j H_B(j\omega) \sin(q\nu k + \beta)], \quad (5.12a)$$

gdzie:

$$H_A(j\omega) = \frac{H(j\omega) + H(-j\omega)}{2}, \quad (5.12b)$$

$$H_B(j\omega) = \frac{H(j\omega) - H(-j\omega)}{2}.$$

Po przekształceniu równania (5.12a) otrzymuje się następującą zależność, określającą odpowiedź filtra zespolonego na rzeczywisty harmoniczny sygnał wymuszający:

$$\underline{x}(k) = e^{j\vartheta(\omega)} Y [A(\omega) \cos(q\nu k + \beta + \xi(\omega)) + j B(\omega) \sin(q\nu k + \beta + \xi(\omega))] , \quad (5.13)$$

gdzie:

$$A(\omega) = \frac{|H(j\omega)| + |H(-j\omega)|}{2}, \quad (5.14a)$$

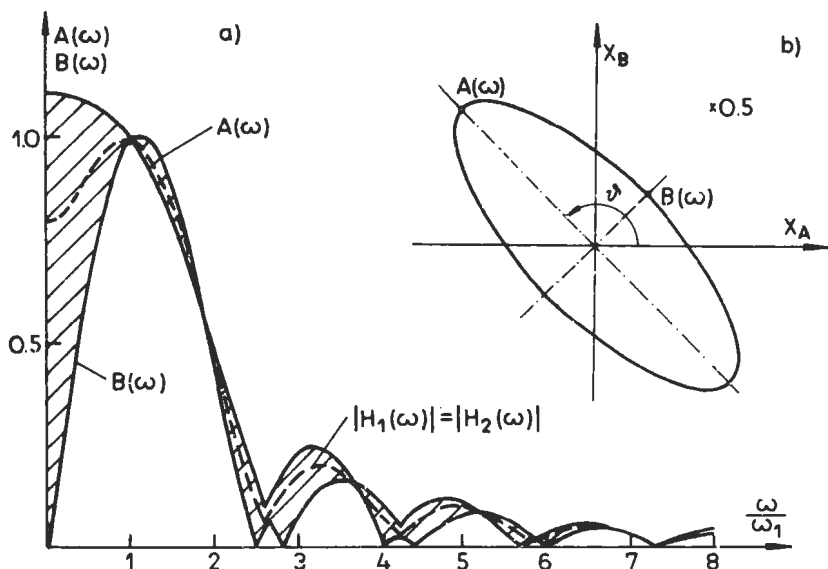
$$B(\omega) = \frac{||H(j\omega)| - |H(-j\omega)||}{2},$$

$$\vartheta(\omega) = \frac{\gamma(\omega) + \gamma(-\omega)}{2}, \quad (5.14b)$$

$$\xi(\omega) = \frac{\gamma(\omega) - \gamma(-\omega)}{2}.$$

Równanie (5.13) przedstawia elipsę (rys. 5.3b), której duża oś jest odchylona od osi rzeczywistej o kąt $\vartheta(\omega)$. Połowa długości dużej osi jest określona przez wielkość $A(\omega)$, a małej - $B(\omega)$. Położenie i kształt elipsy dla danego filtra jest funkcją częstotliwości.

Wraz ze zmieniającą się fazą koniec fazora sygnału $\underline{x}(k)$ porusza się po elipsie, przyjmując dwie skrajne wartości amplitudy wyznaczone osiami $A(\omega)$, $B(\omega)$. W celu określenia amplitudowej charakterystyki częstotliwościowej filtra zespolonego, wyznaczonej przez obwiednię maksymalnych amplitud, wystarczy zatem zbadać funkcję $A(\omega)$, określającą większą obwiednię.



Rys. 5.3. Charakterystyka amplitudowa filtra zespolonego (a) oraz trajektoria fazora trzeciej harmonicznej (dwukrotne powiększenie) (b); $N=16$, $K=12$

Fig. 5.3. Frequency response of the complex filter (a) and the phase trajectory of the 3-rd harmonic phasor (b) (double magnitude); $N=16$, $K=12$

Na rysunku 5.3b pokazano elipsę zmiany fazora sygnału wyjściowego filtra zespolonego utworzonego na podstawie dwóch filtrów uzyskanych według metody przedstawionej w p. 4.6 (przekształcenie 2-stanowego filtra w filtry nierekursywne). Przedstawiona krzywa odpowiada trajektorii fazora trzeciej harmonicznej.

Charakterystykę amplitudową tego filtra, z zaznaczeniem zakresu zmian amplitudy sygnału wyjściowego, w związku ze zmianą fazy przedstawiono na rys. 5.3a. Zakreskowane pole jest ograniczone obwiedniami $A(\omega)$ i $B(\omega)$.

Jeśli charakterystyki fazowe filtrów składowych różnią się o $\pi/2$ w całym zakresie częstotliwości (warunek (4.5)), to charakterystyka amplitudowa filtra zespolonego jest prostą sumą charakterystyk filtrów składowych. W przeciwnym razie obwiednie $A(\omega)$, $B(\omega)$ zależą również od charakterystyk fazowych obu filtrów. W rozpatrywanym przykładzie oba filtry składowe mają jednakowe charakterystyki amplitudowe (linia przerywana na rys. 5.3a) i nieliniowe charakterystyki fazowe.

Dla filtrów o regularnych charakterystykach impulsowych można bez

trudu określić analityczną postać charakterystyki częstotliwościowej $H(j\omega)$. W tym celu należy obliczyć transmitancje pary filtrów składowych i podstawić je do równania (5.7b). Oto równania charakterystyk niektórych filtrów:

- pełnookresowy algorytm Fouriera

$$H(j\omega) = \frac{-2 e^{-j \frac{N-1}{2} qv} \sin(\pi q)}{N \sin\left[\frac{\nu}{2} (q-1)\right]}, \quad (5.15a)$$

- półokresowy algorytm Fouriera

$$H(j\omega) = \frac{4 e^{-j \frac{N-2}{4} qv} \cos\left(\frac{\pi q}{2}\right)}{N \sin\left[\frac{\nu}{2} (q-1)\right]}, \quad (5.15b)$$

- pełnookresowy algorytm Walsha

$$H(j\omega) = \frac{2 e^{-j \frac{N-1}{2} qv} \sin \frac{\nu}{2} \sin \frac{\pi q}{2} \sin \frac{\pi q}{4} \left(\sin \frac{\pi q}{4} - \cos \frac{\pi q}{4} \right)}{\sin\left[\frac{qv}{2}\right]}, \quad (5.15c)$$

- półokresowy algorytm Walsha

$$H(j\omega) = \frac{2 e^{-j \frac{N-2}{4} qv} \sin \frac{\nu}{2} \sin \frac{\pi q}{4} \left(\cos \frac{\pi q}{4} - \sin \frac{\pi q}{4} \right)}{\sin\left[\frac{qv}{2}\right]} \quad (5.15d)$$

Na podstawie tych zależności można określić równania obwiedni charakterystyki amplitudowej filtrów zespolonych (5.14a). Na przykład, obwiednia $A(\omega)$ filtru utworzonego za pomocą pełnookresowego algorytmu Fouriera jest określona równaniem:

$$A(\omega) = \frac{|\sin \pi q|}{N} \left| \frac{1}{|\sin\left[\frac{\nu}{2} (q-1)\right]|} + \frac{1}{|\sin\left[\frac{\nu}{2} (q+1)\right]|} \right| \quad (5.16)$$

Równanie obwiedni $B(\omega)$ uzyskuje się przez zmianę znaku między ułamekami w nawiasach.

Funkcje $\vartheta(\omega)$ i $\xi(\omega)$ (5.14b) są przedziałami ciągłe, a granice tych przedziałów są wyznaczone przez punkty przecięcia się obwiedni $A(\omega)$ i $B(\omega)$ filtru.

Należy zauważyć, że w przypadku zespolonych sygnałów wejściowych, właściwości rozważanych filtrów są bezpośrednio określone przez transmitancję $H(j\omega)$. W szczególności, przy harmonicznym zespolonym sygnale wejściowym, sygnał wyjściowy ma stałą amplitudę.

Charakterystyki amplitudowe filtrów zespolonych mogą być również uzyskane na drodze modelowania, przez pomiar ustalonej odpowiedzi po wymuszeniu harmonicznym dla kolejnych pulsacji.

5.2.2. Zastosowanie korelacji

Jeśli przetwarzanie sygnałów w blokach $FILTR_1$, $FILTR_2$ (rys. 5.1) odbywa się na zasadzie korelacji przebiegu $x(k)$ z sygnałem o pulsacji ω_0 , to następuje przesunięcie częstotliwości sygnału wyjściowego o tę właśnie wartość. Wyrażenia (5.4) przyjmują wówczas następującą postać:

$$x_1(k) = Y |H_1(j\omega)| \cos[\gamma_1(\omega) + (q-q_0)\nu k + \beta], \quad (5.17)$$

$$x_2(k) = Y |H_2(j\omega)| \cos[\gamma_2(\omega) + (q-q_0)\nu k + \beta],$$

gdzie : $\frac{\omega_0}{\omega_1}$.

W tym przypadku wielkości $|H_l(j\omega)|$, $\gamma_l(\omega)$, $l = 1, 2$ mają inną interpretację niż w przypadku filtrów, o czym wspomniano w p. 4.3.

Dla $\omega = \omega_0$ fazor $\underline{x}(k)$ wiruje razem z układem współrzędnych (rys. 5.2) i pozostaje względem niego nieruchomy. Zależności (5.5)-(5.6) opisują również układ z przetwornikami korelacyjnymi, z tym, że wyrażenia (5.4) należy zastąpić zależnościami (5.17).

5.2.3. Zastosowanie opóźnienia sygnału

Ważny, z praktycznego punktu widzenia, przypadek zachodzi wówczas, gdy w miejsce filtrów zostaną użyte układy opóźniające. Jeśli przy tym $x_c(k) = y_c(k) = y(k)$, to estymator ma strukturę jak na rys. 5.4. Odpowiednie zależności można wyprowadzić na podstawie (5.5), gdzie:

$$|H_1(j\omega)| = |H_2(j\omega)| = 1,$$

$$x_1(k) = y(k),$$

$$x_2(k) = y(k - m),$$

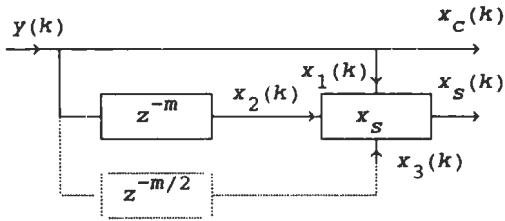
$$\gamma_1(\omega) = 0, \quad \gamma_2(\omega) = -q\nu m = \Delta\gamma(\omega),$$

m - liczba próbek opóźnienia.

Składowe zespolonego sygnału $\underline{x}(k)$ o pulsacji ω wyrażają się następującymi zależnościami (rys. 5.4):

$$x_c(k) = y(k),$$

$$x_s(k) = \frac{y(k - m) - \cos(q\nu m) y(k)}{\sin(q\nu m)} \quad (5.19)$$



Rys. 5.4. Formowanie sygnału zespolonego metodą opóźnienia
Fig. 5.4. Application of time delay to signal orthogonalization

W tym przypadku łatwo określić transmitancję filtra zespolonego, wyrażoną w postaci transformaty Z. Na podstawie równania (5.7b) $[H(j\omega) \rightarrow H(z)]$, otrzymamy:

$$H(z) = 1 + j \frac{1}{\sin(q_0 \nu m)} [\cos(q_0 \nu m) - z^{-m}], \quad (5.20)$$

gdzie:

$$q_0 = \frac{\omega_0}{\omega_1} \quad (\text{filtr jest unormowany względem pulsacji } \omega_0).$$

zależność ta przybiera następującą postać widmową $[z = \exp(j\omega)]$:

$$H(j\omega) = \frac{[e^{j(q_0 \nu m)} - e^{-j(q \nu m)}]}{\sin(q_0 \nu m)} \quad (5.21)$$

Można także zbudować efektywny estymator, wprowadzając dwukrotne przesunięcie sygnału (rys. 5.4 - linia przerywana). Jeśli sygnał $x_3(k)$ zostanie utworzony przez takie przesunięcie sygnału, że:

$$x_3(\omega) = \frac{\Delta \gamma(\omega)}{2}, \quad (5.22)$$

to między sygnałami $x_1(k)$, $x_2(k)$, $x_3(k)$ zachodzi następujący związek:

$$x_1(k) + x_2(k) = 2 x_3(k) \cos \frac{\Delta \gamma(\omega)}{2} \quad (5.23)$$

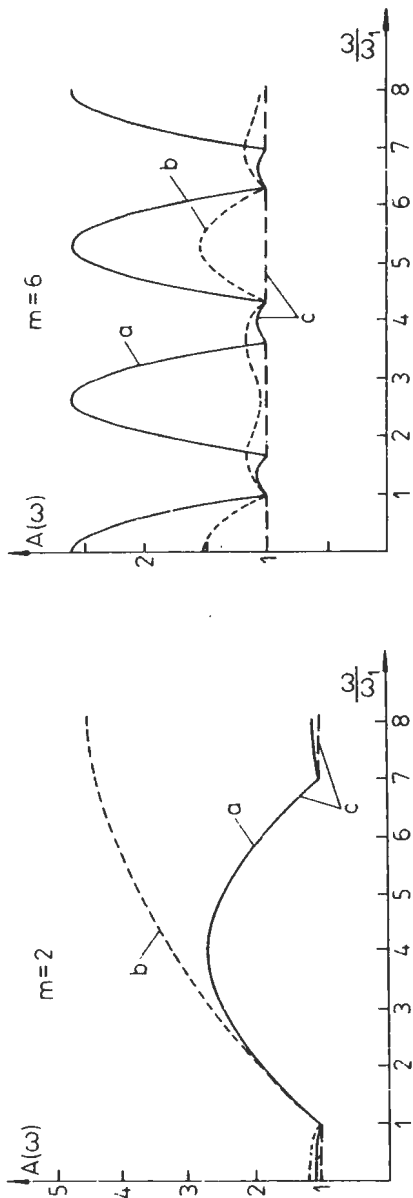
Składowe ortogonalne mogą być zatem określone następującymi zależnościami:

$$\begin{aligned} x_C(k) &= y(k), \\ x_S(k) &= \frac{\cos(q \nu m) y(k - m/2) - \cos(q \nu m/2) y(k - m)}{\sin(q \nu m/2)}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

W tym przypadku transmitancja filtra jest określona równaniem:

$$H(z) = 1 + j \frac{\cos(q_0 \nu m) z^{-m/2} - \cos(q_0 \nu m/2) z^{-m}}{\sin(q_0 \nu m/2)} \quad (5.25)$$

Jeśli w charakterze składowej rzeczywistej przyjąć sygnał odpowiadający przesuniętym próbkom, to uzyska się następujące przekształcenie:



Rys. 5.5. Charakterystyki częstotliwościowe amplitudy filtrów zespolonych uzyskanych przez opóźnienie sygnału ($N = 16$): a - wg algorytmu (5.19), b - wg algorytmu (5.24), c - wg algorytmu (5.26)

Fig. 5.5. Frequency response of the delay type orthogonalizing filter ($N = 16$): a - according to (5.19), b - according to (5.24), c - according to (5.26)

$$x_c(k) = y(k - m/2),$$

$$x_s(k) = \frac{y(k) - y(k - m)}{2 \sin(\varrho \nu m/2)}$$
(5.26)

Transmitancja tego filtru zespolonego jest określona zależnością:

$$H(z) = z^{-m/2} + j \frac{1 - z^{-m}}{2 \sin(\varrho \nu m/2)}$$
(5.27)

Charakterystyki częstotliwościowe filtrów, określonych równaniami (5.20), (5.25) i (5.27) pokazano na rys. 5.5.

5.2.4. Zastosowanie różniczkowania sygnału

W metodzie tej korzysta się z wzajemnej ortogonalności sygnału harmonicznego i jego pochodnej. Ciągły sygnał zespolony przyjmuje w tym przypadku następującą postać:

$$\underline{y}(t) = y(t) - j \frac{1}{\omega} \dot{y}(t) = y_c(t) + j y_s(t)$$
(5.28)

Dyskretna aproksymacja zależności (5.28) może być określona równaniem:

$$\underline{y}(k) = A[y(k)] - j \frac{1}{\omega} D[y(k)],$$
(5.29)

gdzie: $A[y(k)]$ - aproksymacja wartości mierzonego sygnału w punkcie k ,
 $D[y(k)]$ - aproksymacja pochodnej w punkcie k .

Zarówno wartość sygnału jak i jego pochodna mogą być aproksymowane na wiele sposobów. Stosując najprostszą aproksymację pochodnej za pomocą funkcji w punktach równoodległych od środka przedziału obserwacji (okna pomiarowego), otrzymamy:

$$D[y(k)] = \sum_{i=1}^n b_{si} [y(k-1+i) - y(k-i)]$$
(5.30)

Podobnie, w przypadku aproksymacji wartości próbek sygnału, uzyskamy:

$$A[y(k)] = \sum_{i=1}^m b_{ci} [y(k-1+i) + y(k-i)],$$
(5.31)

gdzie: b_{si} , b_{ci} - odpowiednie współczynniki aproksymacji,
 n , m - rząd aproksymacji.

Dane formuły określają odpowiednie wielkości względem środka przedziału wyznaczonego przez punkty k , $k-1$.

Do określenia współczynników b_s , b_c można posłużyć się modelem mierzonego sygnału. Pochodna sygnału $y(t) = Y \cos(\omega t + \beta)$ jest równa:

$$\begin{aligned} \left. \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) \right|_{t=t_k - T/2} &= -\omega Y \sin[\omega(t_k - T/2) + \beta] = & (5.32) \\ &= -\omega Y \cos(\omega T/2) \sin(\omega t_k + \beta) + \omega Y \sin(\omega T/2) \cos(\omega t_k + \beta), \end{aligned}$$

natomiast jej aproksymacja według równania (5.30) wyraża się zależnością:

$$\begin{aligned} D[y(t_k - T/2)] &= -2 b_{s1} Y \sin(\omega T/2) \cos(\omega T/2) \sin(\omega t_k + \beta) + & (5.33) \\ &+ 2 b_{s1} Y \sin^2(\omega T/2) \cos(\omega t_k + \beta) \end{aligned}$$

Z porównania prawych stron równań (5.32) i (5.33) otrzymamy:

$$b_{s1} = \frac{\omega}{2 \sin(\omega T/2)} \quad (5.34)$$

Jeśli rozbudować model sygnałowy o składowe również innej częstotliwości i zwiększyć rząd aproksymacji pochodnej, to otrzymamy następujące ogólne równanie:

$$W_s B_s = \frac{1}{2} \Omega, \quad (5.35)$$

gdzie:

$$W_s = \begin{bmatrix} \sin \frac{\omega_1 T}{2} & \sin \frac{3\omega_1 T}{2} & \dots & \sin \frac{(2n-1)\omega_1 T}{2} \\ \sin \frac{\omega_2 T}{2} & \sin \frac{3\omega_2 T}{2} & \dots & \sin \frac{(2n-1)\omega_2 T}{2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sin \frac{\omega_n T}{2} & \sin \frac{3\omega_n T}{2} & \dots & \sin \frac{(2n-1)\omega_n T}{2} \end{bmatrix},$$

$$B_s = [b_{s1} \ b_{s2} \ \dots \ b_{sn}]^T,$$

$$\Omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \dots \ \omega_n]^T.$$

Z równania (5.35) otrzymamy:

$$B_s = \frac{1}{2} W_s^{-1} \Omega \quad (5.36)$$

Podobne postępowanie w stosunku do procedury (5.31) prowadzi do następującego równania:

$$B_c = \frac{1}{2} W_c^{-1} I, \quad (5.37)$$

gdzie: macierz W_c ma taką samą strukturę jak W_s , z tym że funkcję \sin należy zamienić na funkcję \cos .

Dla I rzędu otrzymamy:

$$b_{c1} = \frac{1}{2 \cos(\omega T/2)} \quad (5.38)$$

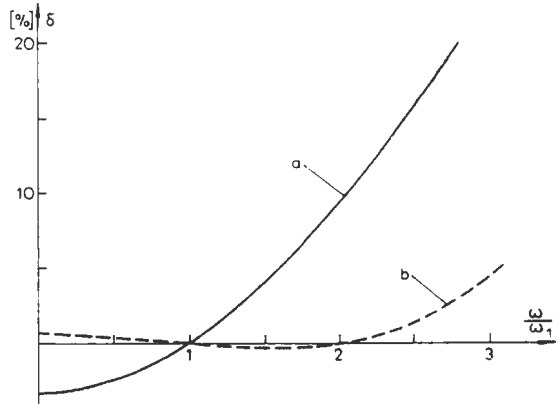
Pulsacje ω_i , $i = 1, 2, \dots, n$ w elementach macierzy W_S , W_C i wektora Ω wynikają z przyjętego modelu mierzonego sygnału. Jeśli niektóre pulsacje są sobie równe, to macierze W_S , W_C należy skorygować według następującej zasady:

$$\left. \begin{aligned} w'_{ij} &= w'_{ji} = 0 \\ w'_{ii} &= w_{ii} p \\ w'_{jj} &= w_{jj} p \end{aligned} \right\} \text{gdy } \omega_i = \omega_j, \quad (5.39)$$

gdzie: w'_{ij} - odpowiedni element macierzy W_S oraz W_C po korekcji,
 p - liczba wierszy macierzy Ω o tej samej wartości ω .

W algorytmach zabezpieczeń cyfrowych stosuje się aproksymacje równań (5.30), (5.31) niewielkiego rzędu. Dla pierwszego rzędu, współczynniki b_{s1} i b_{c1} są określone zależnościami (5.34) i (5.38). Dla wyższych rzędów należy je obliczyć zgodnie z zależnościami (5.36) i (5.37).

Stosowanie w procedurach aproksymacji i numerycznego różniczkowania rozbudowanego modelu sygnałowego (skalowanie algorytmu dla kilku częstotliwości) ma inne uzasadnienie niż rozbudowa modelu zakłóceń w algorytmach pomiarowych. W tym przypadku chodzi o uwzględnienie użytecznej informacji, jaką niesie sygnał i jego pochodna - informacji, która jest zawarta w szerszym widmie, a nie tylko w identyfikowanej składowej harmonicznej. Jeśli zatem wielkość kryterialna zależy od pochodnej sygnału, to błąd estymacji tej wielkości zależy od dokładności obliczania pochodnej w paśmie częstotliwości, w którym jest zawarta istotna informacja o sygnale użytecznym.



Rys. 5.6. Przebieg błędów algorytmu numerycznego różniczkowania II rzędu ($N = 16$, $\omega_1 = 1$): a - $\omega_2 = 1$, b - $\omega_2 = 2$

Fig. 5.6. Errors of the algorithm based on the 2nd order numerical differentiation ($N = 16$, $\omega_1 = 1$): $\omega_2 = 1$, b - $\omega_2 = 2$

Przebiegi błędów numerycznego różniczkowania algorytmu II rzędu pokazano na rys. 5.6. Widać, że przez odpowiedni dobór pulsacji ω_i można kształtować pasmo częstotliwości, w którym pochodna jest obliczana z założoną dokładnością.

Formuły (5.30), (5.31) przedstawiają w istocie nierekursywne filtry cyfrowe. Składowe zespolonego sygnału można w tym przypadku określić następującymi równaniami:

$$x_C(k) = \sum_{i=0}^{M-1} h_C(i) y(k-i), \quad (5.40)$$

$$x_S(k) = \sum_{i=0}^{M-1} h_S(i) y(k-i),$$

gdzie:

$$h_C(i) = h_C(M-1-i) = b_C(n-i), \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

$$h_S(i) = -h_S(M-1-i) = -b_S(n-i),$$

$$M = 2n = 2m.$$

Procedura obliczania pochodnej jest zatem filtrem antysymetrycznym, a wartość sygnału jest aproksymowana w filtrze symetrycznym.

5.2.5. Błędy estymacji sygnału zespolonego

W celu określenia wariancji omawianych estymatorów sygnału zespolonego, założmy, że przy sygnałach wyjściowych x_1 , x_2 (rys. 5.1) występują zakłócenia losowe o zerowej wartości średniej i następującej macierzy kowariancji:

$$R_x = \begin{bmatrix} \sigma_{x1}^2 & \sigma_{x12}^2 \\ \sigma_{x12}^2 & \sigma_{x2}^2 \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

Zgodnie z zależnościami (5.5a), część rzeczywista sygnału \underline{x} jest równa ax_1 , skąd: $\sigma_{x_C}^2 = a^2 \sigma_{x1}^2$. Wystarczy zatem rozpatrzyć błędy estymatora składowej urojonej:

$$x_S(k) = b x_1(k) - c x_2(k) = \mathbb{T} \chi(k), \quad (5.42)$$

gdzie:

$$\mathbb{T} = [b \quad -c], \quad \chi(k) = [x_1(k) \quad x_2(k)]^T.$$

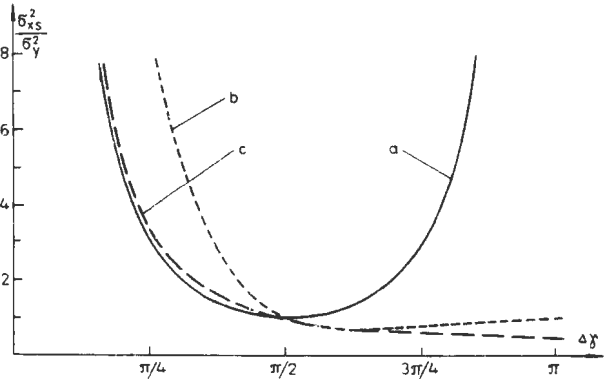
Na podstawie prawa propagacji błędów można określić wariancję estymatora (5.42) [10]:

$$\sigma_{x_S}^2 = \mathbb{T} R_x \mathbb{T}^T \quad (5.43)$$

Po podstawieniu wartości b i c według zależności (5.5b), otrzymamy:

$$\sigma_{xs}^2 = \frac{1}{\sin^2 \Delta\gamma(\omega)} \left\{ \frac{\sigma_{x1}^2 \cos^2 \Delta\gamma(\omega)}{|H_1^2(j\omega)|} + \frac{\sigma_{x2}^2}{|H_2^2(j\omega)|} - \frac{2 \sigma_{x12}^2 \cos \Delta\gamma(\omega)}{|H_1(j\omega)| |H_2(j\omega)|} \right\} \quad (5.44)$$

Wielkość ta przyjmuje najmniejszą wartość dla $\Delta\gamma(\omega) = \pi/2$, co potwierdza spostrzeżenie, że najlepszy estymator zespolonego sygnału harmonicznego uzyskuje się w przypadku zastosowania, w układzie z rys. 5.1, przetworników (filtrów) o charakterystykach fazowych różniących się o $\pi/2$.



Rys.5.7. Względna wariancja estymatorów składowej urojonej otrzymywanej przez opóźnienie sygnału: a-wg algorytmu (5.19), b-wg algorytmu (5.24), c-wg algorytmu (5.26)
Fig. 5.7. Relative variance of the quadrature component delay type estimators: a-according to (5.19), b-according to (5.24), c-according to (5.26)

Najłatwiej można analizować wariancję estymatora składowej urojonej, uzyskiwanej przez opóźnienie sygnału. Wówczas: $|H_1(j\omega)| = |H_2(j\omega)| = 1$, $\sigma_{x1}^2 = \sigma_{x2}^2 = \sigma_y^2$, $\sigma_{x12}^2 = 0$ (założenie o nieskorelowanym zakłóceniu sygnału). Równanie (5.44) redukuje się do następującej postaci:

$$\sigma_{xs}^2 = \sigma_{ys}^2 = \frac{\sigma_y^2}{\sin^2 \Delta\gamma(\omega)} [\cos^2 \Delta\gamma(\omega) + 1] \quad (5.45)$$

Podobne postępowanie w odniesieniu do estymatora z dwukrotnym opóźnieniem sygnału, prowadzi do następujących zależności:

- dla algorytmu (5.24)

$$\sigma_{xs}^2 = \sigma_{ys}^2 = \frac{\sigma_y^2}{\sin^2 \frac{\Delta\gamma(\omega)}{2}} [\cos^2 \Delta\gamma(\omega) + \cos^2 \frac{\Delta\gamma(\omega)}{2}] , \quad (5.46a)$$

- dla algorytmu (5.26)

$$\sigma_{xs}^2 = \sigma_{ys}^2 = \frac{\sigma_x^2}{2 \sin^2 \frac{\Delta\gamma(\omega)}{2}} \quad (5.46b)$$

Zależność względnych wariancji estymatora składowej ortogonalnej od kąta opóźnienia sygnału (który zależy od okresu próbkowania) pokazano na rys. 5.7. Z punktu widzenia wielkości błędu, podwójne opóźnienie jest

korzystniejsze wówczas, gdy jego wartość mieści się w przedziale $(\pi/2, \pi)$. Spostrzeżenie to można również potwierdzić, porównując charakterystyki częstotliwościowe tych algorytmów (rys. 5.5).

5.3. Pomiar amplitudy prądu i napięcia

5.3.1. Korzystanie z modelu sygnału zespolonego

Posługując się fazorowym przedstawieniem sygnału można napisać następującą ogólną zależność:

$$\underline{x}(k) \underline{x}^*(k-m) = X^2(k) \cos \alpha(\omega) + j X^2(k) \sin \alpha(\omega), \quad (5.47)$$

gdzie: m - wielkość przesunięcia (liczba próbek) sygnału,
 $\alpha(\omega) = q\omega m$ - kąt, odpowiadający przesunięciu m .

Po podstawieniu do lewej strony równania (5.47) składowych sygnału zespolonego otrzymamy następujące formuły:

$$X(k) = \sqrt{\frac{x_C(k) x_C(k-m) + x_S(k) x_S(k-m)}{\cos \alpha(\omega)}}, \quad (5.48a)$$

$$X(k) = \sqrt{\frac{x_S(k) x_C(k-m) - x_C(k) x_S(k-m)}{\sin \alpha(\omega)}} \quad (5.48b)$$

Gdy przesunięcie $m = 0$, wówczas na podstawie wzoru (5.48a) uzyskuje się trzecią, znaną zależność:

$$X(k) = \sqrt{x_C^2(k) + x_S^2(k)} \quad (5.49)$$

Równania przedstawiają estymatory amplitudy prądu lub napięcia, wyrażone przez składowe ortogonalne. Ich właściwości mogą być określone po uwzględnieniu charakterystyk zastosowanych metod ortogonalizacji. W charakterze tych ostatnich mogą wystąpić następujące sposoby przetwarzania sygnałów:

- filtracja (model regresji lub model zmiennych stanu),
- korelacja,
- opóźnienie sygnału,
- różniczkowanie sygnału.

Z tych przekształceń powstaje wiele algorytmów estymacji amplitudy sygnału harmonicznego.

5.3.2. Uśrednianie bezwzględnej wartości sygnału

Metoda uśredniania bezwzględnej wartości sygnału wywodzi się ze znanego sposobu pomiaru amplitudy sygnału przemiennego przez całkowanie jego wartości bezwzględnej, stosowanego w miernictwie analogowym. Postać

estymatorów cyfrowych, opartych na tej metodzie jest zależna od sposobu numerycznej aproksymacji całki w okresie obserwacji (w oknie pomiarowym). W ten sposób otrzymuje się [119]:

- dla metody prostokątów:

$$X(k) = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{K-1} |x(k-i)|, \quad (5.50a)$$

- dla metody trapezów:

$$X(k) = \frac{p}{2} \sum_{i=0}^K (|x(k-i-1)| + |x(k-i)|), \quad (5.50b)$$

gdzie:

$$p = \begin{cases} \pi/N & - \text{jeśli } N/2 - \text{całkowite,} \\ -\frac{\pi}{2K} & - \text{przeciwnie.} \end{cases}$$

Estymatory (5.50) są nieobciążone, gdy szerokość okna pomiarowego odpowiada wielokrotności połowy okresu identyfikowanego przebiegu.

Metody cyfrowe umożliwiają różnorodną modyfikację danego algorytmu. W tym celu można posłużyć się przesunięciem sygnału lub uśrednianiem maksymalnych wartości bezwzględnych sygnału w oknie pomiarowym [164].

5.4. Pomiar mocy

Moce czynna i bierna, występujące w charakterze wielkości kryterialnych w automatyce zabezpieczeniowej są zazwyczaj odniesione do składowej podstawowej prądu i napięcia. Ich definicja opiera się zatem na fazorowej reprezentacji tych wielkości. Po uwzględnieniu w ogólnym przypadku przesunięcia sygnału prądu otrzymamy:

$$2 \underline{S}(k) e^{j\alpha} = \underline{u}(k) \underline{i}^*(k-m) = 2 [P(k) + j Q(k)] e^{j\alpha}, \quad (5.51)$$

gdzie: $\alpha = mv$.

Podobne równanie można napisać dla przesuniętego fazora napięcia. Po uporządkowaniu równania otrzymamy następujące wyrażenia:

$$P(k) = \frac{1}{2 \sin \alpha} (u_c(k-m) i_s(k) - u_c(k) i_s(k-m)), \quad (5.52a)$$

$$Q(k) = \frac{1}{2 \sin \alpha} (u_c(k-m) i_c(k) - u_c(k) i_c(k-m)), \quad (5.52b)$$

$$P(k) = \frac{1}{2 \sin \alpha} (u_s(k) i_c(k-m) - u_s(k-m) i_c(k)), \quad (5.53a)$$

$$Q(k) = \frac{1}{2 \sin \alpha} (u_s(k-m) i_s(k) - u_s(k) i_s(k-m)), \quad (5.53b)$$

$$P(k) = \frac{1}{2 \cos \alpha} [u_c(k) i_c(k - m) + u_s(k - m) i_s(k)], \quad (5.54a)$$

$$Q(k) = \frac{1}{2 \cos \alpha} [u_s(k) i_c(k - m) - u_c(k - m) i_s(k)], \quad (5.54b)$$

$$P(k) = \frac{1}{2 \cos \alpha} [u_s(k) i_s(k - m) + u_c(k - m) i_c(k)], \quad (5.55a)$$

$$Q(k) = \frac{1}{2 \cos \alpha} [u_s(k - m) i_c(k) - u_c(k) i_s(k - m)] \quad (5.55b)$$

Gdy korzysta się z fazorów prądu i napięcia bez przesunięcia, wówczas na podstawie wyrażeń (5.54) i (5.55) otrzymuje się:

$$P(k) = \frac{1}{2} [u_c(k) i_c(k) + u_s(k) i_s(k)], \quad (5.56a)$$

$$Q(k) = \frac{1}{2} [u_s(k) i_c(k) - u_c(k) i_s(k)] \quad (5.56b)$$

W równaniach (5.52b) i (5.53b) występują sygnały tylko jednej składowej. Można je zatem zapisać następującą ogólną zależnością:

$$Q(k) = \frac{1}{2 \sin \alpha} [u(k - m) i(k) - u(k) i(k - m)] \quad (5.57)$$

W każdym z danych wyrażeń można stosować różne metody otrzymywania składowych ortogonalnych prądu i napięcia. Wynika stąd duża różnorodność istniejących algorytmów pomiaru mocy do rozpatrywanych celów. Dobierając odpowiednie wartości przesunięć przy danym okresie próbkowania, można zredukować stałe współczynniki w podanych wzorach.

5.5. Pomiar składowych impedancji

5.5.1. Zastosowanie fazorów prądu i napięcia

Podobnie jak w przypadku omawianych wielkości kryterialnych, impedancja obwodu zwarciovego jest najczęściej obliczana w odniesieniu do wymuszającej składowej harmonicznej. Wówczas składowe impedancji: rezystancja R i reaktancja X mogą być obliczone według następujących zależności:

$$R = \frac{2 P}{I^2}, \quad X = \frac{2 Q}{I^2} \quad (5.58)$$

Szczegółowe algorytmy uzyskuje się przez zastosowanie w danych równaniach odpowiednich formuł pomiaru mocy i amplitudy składowej wymuszającej prądu.

Po zamianie w równaniach (5.58) amplitudy prądu na amplitudę

napięcia uzyskuje się zależności, określające składowe admitancji: konduktancję i susceptancję.

5.5.2. Korzystanie z równania pętli zwarciowej

Gdy założymy model obwodu zwarciowego w postaci schematu RL (rys. 5.8), napięcie mierzone przez zabezpieczenie można określić następującym równaniem:

$$u(t) = R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} \quad (5.59)$$

Równanie (5.59) można zapisać w postaci dyskretnej dla dwóch różnych chwil i zastosować aproksymację sygnału prądu i jego pochodnej zgodnie z wzorami (5.30), (5.31), wówczas otrzymuje się następujący układ równań:

$$\begin{aligned} A[u(k)] &= R A[i(k)] + L D[i(k)], \\ A[u(k-m)] &= R A[i(k-m)] + L D[i(k-m)] \end{aligned} \quad (5.60)$$

Z danych równań można wyznaczyć parametry obwodu:

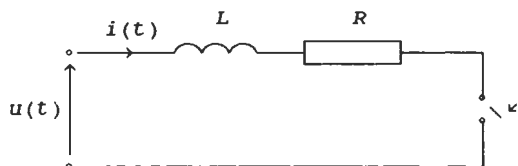
$$R = \frac{A[u(k-m)] D[i(k)] - A[u(k)] D[i(k-m)]}{A[i(k-m)] D[i(k)] - A[i(k)] D[i(k-m)]}, \quad (5.61a)$$

$$X = -\omega_1 \frac{A[i(k)] A[u(k-m)] - A[i(k-m)] A[u(k)]}{A[i(k-m)] D[i(k)] - A[i(k)] D[i(k-m)]} \quad (5.61b)$$

Wielkości $A[y]$ oraz $D[y]$ zgodnie z zależnością (5.29) można rozpatrywać jako estymatory składowych ortogonalnych sygnału: $A[y] = Y_C$, $-D[y]/\omega_1 = Y_S$. Równania (5.61) przyjmują wówczas następującą postać:

$$R = \frac{u_C(k-m) i_S(k) - u_C(k) i_S(k-m)}{i_C(k-m) i_S(k) - i_C(k) i_S(k-m)} = \frac{2 P(k)}{I^2(k)}, \quad (5.62a)$$

$$X = \frac{u_C(k-m) i_C(k) - u_C(k) i_C(k-m)}{i_C(k-m) i_S(k) - i_C(k) i_S(k-m)} = \frac{2 Q(k)}{I^2(k)} \quad (5.62b)$$



Rys. 5.8. Schemat zastępczy pętli zwarciowej

Fig. 5.8. Equivalent circuit of a faulty transmission line

Widać zatem, że rozpatrywaną procedurę można sprowadzić do metody omówionej w p. 5.5.1. Nie należy jednak utożsamiać obu wymienionych

postaci algorytmu. W równaniach (5.62) użyteczne sygnały prądu i napięcia są reprezentowane przez fazory podstawowej harmonicznej tych wielkości, natomiast pozostałe składowe (w tym składowa aperiodyczna) stanowią zakłócenia. W algorytmie (5.61) wielkością użyteczną jest pochodna sygnału prądu, co znakomicie rozszerza widmo sygnału, na podstawie którego dokonywana jest ocena składowych impedancji. Chociaż postaci obu algorytmów są jednakowe, to różnice ujawniają się na etapie ich projektowania. W przypadku algorytmu (5.61), filtr wielkości $D(i)$ powinien spełniać warunki najlepszej aproksymacji pochodnej sygnału, natomiast w algorytmie (5.62) składowe fazora podstawowej harmonicznej powinny być określone na ogół w wąskopasmowych filtrach, w rezultacie właściwości obu algorytmów są różne.

5.6. Podsumowanie

1. W niniejszym rozdziale omówiono algorytmy podstawowych cyfrowych estymatorów wielkości kryterialnych, stosowanych w zabezpieczeniach elektroenergetycznych: amplitudy i fazy, mocy czynnej i biernej oraz impedancji. Większość z tych estymatorów oparta jest na fazorowej reprezentacji przebiegu harmonicznego, w której sygnał jest przedstawiany dwiema składowymi ortogonalnymi. Szczegółowo omówiono estymację tych składowych za pośrednictwem: filtracji, korelacji, opóźnienia oraz różniczkowania sygnału.

2. Zaprezentowany został ogólny sposób syntezy filtrów cyfrowych, w których sygnał wyjściowy jest przedstawiony w postaci dwóch składowych ortogonalnych (w postaci fazora). Filtr taki, nazwany filtrem zespolonym, jest utworzony z przynajmniej dwóch filtrów rzeczywistych, które powinny wprowadzać różne przesunięcia fazowe identyfikowanego sygnału. Charakterystyka częstotliwościowa filtru zespolonego może być w zwarty sposób wyrażona przez parametry składowych filtrów rzeczywistych. Amplituda ustalonej odpowiedzi filtru zespolonego na wymuszenie w postaci sygnału rzeczywistego jest w ogólnym przypadku zmienna w czasie. Pokazano, że można analitycznie określić obwiednie, ustalające zakres zmian amplitudy sygnału wyjściowego. Określone zostały wymagania, jakie powinny spełniać filtry, tworzące estymator sygnału zespolonego.

3. Przeprowadzono analizę błędów estymacji sygnału zespolonego. Pokazano, że najmniejszy błąd występuje wówczas, gdy filtr zespolony jest utworzony z dwóch przetworników sygnałów, których częstotliwościowe charakterystyki fazowe różnią się o $\pi/2$ dla pulsacji odpowiadającej identyfikowanemu przebiegowi.

6. BŁĘDY STANU USTALONEGO ALGORYTMÓW

6.1. Wprowadzenie

Ze względu na dużą różnorodność algorytmów pomiaru wielkości kryterialnych nie jest prosta systematyzacja ich błędów. W odniesieniu do procedur nierekursywnych proponuje się wydzielenie dwóch grup błędów, które są rozgraniczone przedziałem obserwacji odpowiedzi algorytmu na określone wymuszenie. Są to błędy stanu ustalonego i stanu przejściowego. Jest to uzasadnione tym, że algorytmy te są projektowane przede wszystkim z punktu widzenia ich właściwości w stanie ustalonym, to znaczy po okresie równym długości okna pomiarowego. Odnosi się to również do procedur rekursywnych o odpowiedzi dead-beat lub jej bliskiej.

Algorytmy oparte na procedurach rekursywnych lub na niestacjonarnych modelach pomiarowych nie mają wyraźnie wydzielonego okna pomiarowego. Zatem, w rozumianym powyżej znaczeniu, stan ustalony algorytmu nie występuje. Błędy tych algorytmów będą rozpatrzone w następnym rozdziale.

Proponowane rozgraniczenie typów błędów w zależności od czasu obserwacji odpowiedzi jest rzeczą umowną. Z punktu widzenia organu decyzyjnego zabezpieczenia istotne jest, aby istniała możliwość oszacowania czasu trwania niedopuszczalnych błędów przy realnie istniejących zakłóceniach. Wynikająca stąd granica podziału błędów często nie pokrywa się z proponowanym kryterium. Przy niestacjonarnych zakłóceniach również w stanie ustalonym algorytmu występują błędy przejściowe.

Właściwości procedur opartych na stacjonarnych modelach pomiarowych są przedstawiane w postaci charakterystyk częstotliwościowych. Ten syntetyczny miernik jakości algorytmów w stanie ustalonym jest podstawą ich oceny w niniejszym rozdziale. Przedstawiona jest metodyka oceny podatności analizowanych algorytmów na zakłócenia objawiające się w postaci:

- zmiany częstotliwości podstawowej sygnału,
- zmiany chwilowej fazy sygnału,
- występowania oscylacyjnych składowych zakłócających,
- pojawienia się aperiodycznej składowej zakłócającej.

Zaproponowano także niektóre sposoby ograniczania wpływu tych zakłóceń na dokładność estymacji wielkości kryterialnych zabezpieczeń.

6.2. Błędy związane ze zmianą częstotliwości podstawowej sygnału

6.2.1. Błędy estymacji amplitudy sygnału

Częstotliwość podstawowej harmonicznej prądu i napięcia może się zmieniać w systemie elektroenergetycznym w zakresie kilku procent. W celu oceny wynikającego stąd błędu określania poszczególnych wielkości kryterialnych należy zbadać charakterystykę częstotliwościową algorytmu w pobliżu częstotliwości podstawowej.

W przypadku estymatora amplitudy, opartego na składowych ortogonalnych sygnału, przeanalizujemy zależności częstotliwościowe związane z równaniami (5.48)-(5.49). W charakterze występujących tam składowych ortogonalnych można zastosować sygnały wyjściowe filtra zespolonego, określone równaniem (5.13). Po prostych przekształceniach otrzymamy następujące związki:

- dla równania (5.48a):

$$X(\omega) = Y \left(\frac{[A^2(\omega) + B^2(\omega)] \cos(mq\nu) + [A^2(\omega) - B^2(\omega)] \cos(2\psi - mq\nu)}{2 \cos(m\nu)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (6.1)$$

- dla równania (5.48b):

$$X(\omega) = Y \left(\frac{A(\omega) B(\omega) \sin(mq\nu)}{\sin(m\nu)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (6.2)$$

- dla równania (5.49):

$$X(\omega) = Y \left(A^2(\omega) \cos^2 \psi + B^2(\omega) \sin^2 \psi \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (6.3)$$

gdzie: $\psi = q\nu k + \beta + \xi(\omega)$,

$A(\omega)$, $B(\omega)$, $\xi(\omega)$ - charakterystyki filtra zespolonego (5.14).

Równanie (6.3) jest szczególnym przypadkiem równania (6.1), odpowiadającego przesunięciu $m = 0$.

Po podstawieniu do danych zależności równania obwiedni odpowiednich filtrów uzyska się analityczną postać częstotliwościowych charakterystyk estymatorów amplitudy dla harmonicznego wymuszenia.

Z analizy równań (6.1) i (6.2) wynikają podstawowe cechy algorytmów wywodzących się z zależności (5.48):

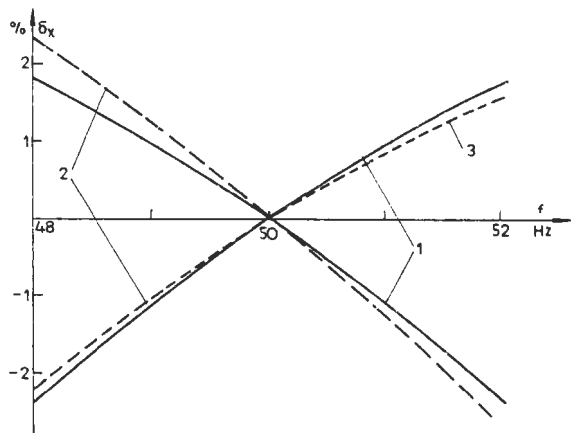
1. Estymator (5.48a) zawiera sumę dwóch składników będących iloczynem, w ogólnym przypadku, przesuniętych próbek składowych sygnału. Amplitudowa charakterystyka tego algorytmu jest niestacjonarna - w równaniu (6.1), w charakterze zmiennej, występuje faza sygnału.

2. Estymator (5.48b) zawiera różnicę odpowiednich składników, co prowadzi do eliminacji wyrazów zależnych od fazy. Dzięki temu charakterystyka (6.2) jest stacjonarna.

3. Można wyróżnić podstawowe formy obu rodzin algorytmów, dla których mianownik we wzorze (5.48) przyjmuje wartość 1. W przypadku algorytmu (5.48a) odpowiada to przesunięciu $\alpha(\omega) = 0$ ($m = 0$), a dla (5.48b) - $\alpha(\omega) = \pi/2$ ($m = N/4$). W tym ostatnim przypadku efektywne okno pomiarowe jest dłuższe o $N/4$. Widać z tego, że widmowe właściwości omawianych algorytmów mogą być modyfikowane na wiele sposobów.

Na podstawie analizy równań (6.1) i (6.2) można określić charakter i wielkość błędów wynikających ze zmiany częstotliwości podstawowej sygnału.

Na rysunku 6.1 pokazano wykresy, odpowiadające wyrażeniom (6.1)-(6.2) dla przypadku, gdy składowe ortogonalne są uzyskane na podstawie pełnookresowego algorytmu Fouriera. Można zauważyć, że odpowiedź estymatora (5.48b) jest stacjonarna - charakterystyka jest jednoznaczna, niezależna od fazy. W pozostałych algorytmach, przy odchyleniu częstotliwości od wartości znamionowej, sygnał wyjściowy zawiera składową zmienną, której podwójna amplituda jest ograniczona obwiedniami



Rys. 6.1. Błędy estymatorów amplitudy zbudowanych na podstawie pełnookresowego algorytmu Fouriera ($N = 16$): 1 - estymator (5.49), 2 - (5.48a), 3 - (5.48b); 2, 3 - $m=1$
 Fig. 6.1. Errors of the signal magnitude estimators employing full-wave Fourier algorithm ($N=16$): 1 - estimator (5.49), 2 - (5.48a), 3 - (5.48b); 2, 3 - $m = 1$

wykresów. Częstotliwość tych oscylacji jest równa $q\omega_1$ - w przypadku estymatora filtracyjnego oraz $q\omega_1 - \omega_0$ w przypadku estymatora korelacyjnego; ω_0 - pulsacja funkcji korelującej.

Na podstawie rys. 6.1 można określić maksymalny błąd rozpatrywanego estymatora, związany ze zmianą częstotliwości podstawowej sygnału.

6.2.2. Błędy estymacji mocy

Jeśli ograniczyć rozważania do estymatorów mocy, opartych na składowych ortogonalnych prądu i napięcia, to w celu analizy ich charakterystyk częstotliwościowych można powtórzyć procedurę zastosowaną do estymatorów amplitudy. Dla uproszczenia zakłada się, że tory pomiaru

prądu i napięcia są jednakowe.

Po podstawieniu składowych sygnału prądu i napięcia w formie (5.13) do równań (5.52)-(5.55) otrzymamy następujące zależności:

- dla równania (5.52a) (+)

- dla równania (5.53a) (-)

$$P(\omega) = \frac{U I \sin(mq\nu)}{2 \sin(m\nu)} \left(A B \cos \varphi \pm \frac{(A^2 - B^2) \sin[2\vartheta(\omega)] \sin \varphi}{2} \right), \quad (6.4)$$

- dla równania (5.52b)

$$Q(\omega) = \frac{U I \sin(mq\nu) [A^2 \cos^2[\vartheta(\omega)] + B^2 \sin^2[\vartheta(\omega)]] \sin \varphi}{2 \sin(m\nu)}, \quad (6.5a)$$

- dla równania (5.53b)

$$Q(\omega) = \frac{U I \sin(mq\nu) [A^2 \sin^2[\vartheta(\omega)] + B^2 \cos^2[\vartheta(\omega)]] \sin \varphi}{2 \sin(m\nu)}, \quad (6.5b)$$

- dla równania (5.55a) (+)

- dla równania (5.54a) (-)

$$P(\omega) = \frac{U I}{4 \cos(m\nu)} \left\{ \left[(A^2 + B^2) \cos \varphi + (A^2 - B^2) \cos(2\psi + \varphi) \right] \cos(qm\nu) + \right. \\ \left. + (A^2 - B^2) \left[\sin(2\psi + \varphi) \pm \sin(\varphi) \cos[2\vartheta(\omega)] \right] \sin(qm\nu) \right\}, \quad (6.6)$$

- dla równania (5.55b) (+)

- dla równania (5.54b) (-)

$$Q(\omega) = \frac{U I \sin \varphi}{2 \cos(m\nu)} \left(A B \cos(mq\varphi) \pm \frac{(A^2 - B^2) \sin[2\vartheta(\omega)] \sin(mq\nu)}{2} \right) \quad (6.7)$$

W danych równaniach:

$\psi = \psi_i = q\nu k + \beta_i + \xi(\omega)$ - faza prądu,

$\varphi = \psi_u - \psi_i$ - kąt mocy,

$A = A(\omega)$, $B = B(\omega)$, $\xi(\omega)$, $\vartheta(\omega)$ - jak w (5.14).

Równania (6.4)-(6.7) przedstawiają ogólne zależności charakterystyki częstotliwościowej mocy w funkcji parametrów filtrów oraz harmonicznych sygnałów wejściowych prądu i napięcia o tej samej częstotliwości. Analiza tych równań pozwala sformułować następujące uwagi:

- wzory określające moc czynną zawierają składniki, które przy odchyłce częstotliwości $\{A(\omega) \neq B(\omega)\}$ są zależne od $\sin\varphi$ (a więc błąd zależy również od kąta mocy),

- w przypadku równania (6.6) błąd związany z odchyłką częstotliwości jest również zależny od fazy sygnału,

- niektóre z wymienionych błędów można korygować przez stosowanie wzorów zestawionych z odpowiednich par zależności ze składnikami o przeciwnych znakach.

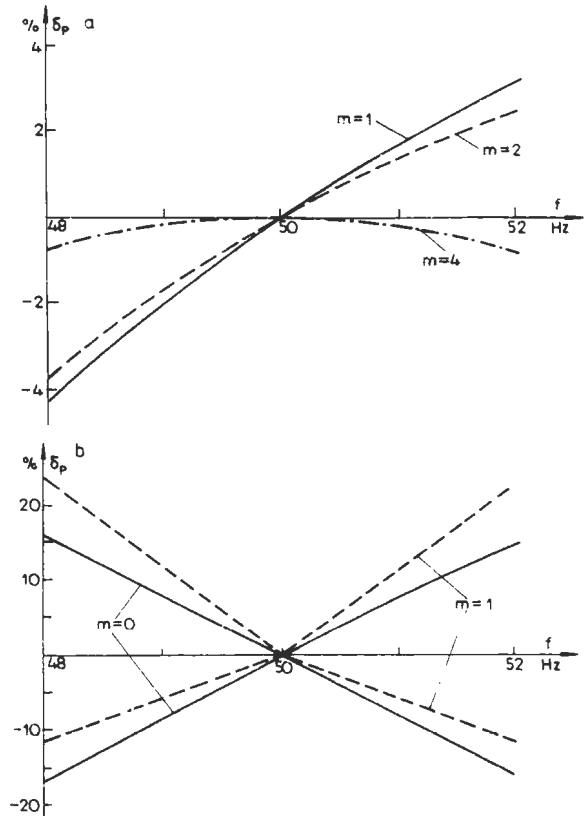
Rozpatrywane charakterystyki mogą się znacznie różnić w zależności od równań obwiedni odpowiednich filtrów zespolonych. Na rysunkach 6.2 i 6.3 pokazano błędy tych algorytmów z zastosowaniem pełnookresowych filtrów Fouriera - jednakowych dla prądu i napięcia. Widać, że stosowanie algorytmu (5.54a) (podobnie jak i (5.55a)) prowadzi do dużych błędów przy odchyłce częstotliwości. Wielkości tych błędów zależą również od kąta mocy φ , a ich wartości chwilowe są funkcją fazy prądu i napięcia względem środka okna filtrów zespolonych.

Przebieg krzywej 3 na rys. 6.3 potwierdza przypuszczenie, że w celu zmniejszenia rozpatrywanego błędu można tworzyć algorytmy pomiaru mocy przez takie sumowanie odpowiednich formuł

(5.52)-(5.56), aby w równaniach (6.4)-(6.7) były eliminowane składniki o przeciwnych znakach.

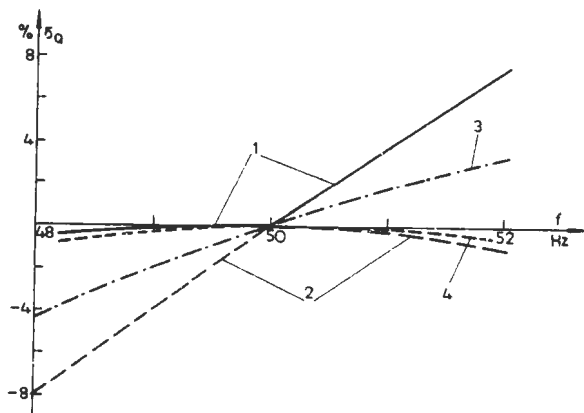
6.2.3. Błędy estymacji impedancji

Charakterystyki częstotliwościowe algorytmów pomiaru impedancji, oparte na ortogonalizacji sygnałów, można analizować, przedstawiając



Rys. 6.2. Błędy estymatorów mocy czynnej zbudowanych na podstawie pełnookresowego algorytmu Fouriera ($N=16$, $\varphi=75^\circ$): a - estymator (5.52a) lub (5.53a), b - (5.54a)

Fig. 6.2. Errors of the active power estimators employing full-wave Fourier algorithm ($N=16$, $\varphi=75^\circ$): a - estimator (5.52a) or (5.53a), b - estimator (5.54a)



Rys. 6.3. Błędy estymatorów mocy biernej (filtracja według pełno-okresowego algorytmu Fouriera ($N=16$, $\varphi=75^\circ$, $m=1$): 1 - estymator (5.52b), 2 - estymator (5.53b), 3 - suma wzorów (5.52b) i (5.53b), 4 - estymator (5.55b) - $m=0$

Fig. 6.3. Errors of the reactive power estimators (filtering by full-wave Fourier algorithm ($N=16$, $\varphi=75^\circ$, $m=1$): 1 - estimator (5.52b), 2 - estimator (5.53b), 3 - the sum of (5.52b) and (5.53b), 4 - estimator (5.55b) - $m=0$

fazy wyjściowe w formie (5.13). Składowe impedancji są wówczas określone zależnościami (5.58). Poszczególne algorytmy uzyskuje się przez kojarzenie w tych zależnościach odpowiednich wzorów do obliczania mocy i amplitudy prądu.

Na przykład, gdy moce będą obliczane według algorytmów (5.56), a prąd - według (5.49), wówczas uzyska się następujące formuły:

$$R(k) = \frac{u_C(k) i_C(k) + u_S(k) i_S(k)}{i_C^2(k) + i_S^2(k)}, \quad (6.8a)$$

$$X(k) = \frac{u_S(k) i_C(k) - u_C(k) i_S(k)}{i_C^2(k) + i_S^2(k)} \quad (6.8b)$$

Składowe prądu i napięcia można przedstawić w postaci określonej równaniem (5.13). Rozpatrując łącznie rezystancję i reaktancję, otrzymamy:

$$\underline{Z}(k) = R(k) + j X(k) = Z_1 \frac{\cos(\psi + \varphi) + j p(\omega) \sin(\psi + \varphi)}{\cos(\psi) + j p(\omega) \sin(\psi)}, \quad (6.9)$$

gdzie:

$$Z_1 = \frac{U_1}{I_1},$$

$$p(\omega) = \frac{B(\omega)}{A(\omega)}, \quad \psi = qv k + \beta_i + \xi(\omega), \quad \varphi = \beta_u - \beta_i,$$

indeksy u , i odnoszą się odpowiednio do napięcia i prądu.

Względny uchyb pomiaru impedancji można określić za pomocą następującego współczynnika zespolonego:

$$k(j\omega) = \frac{Z(k)}{Z_1} \quad (6.11)$$

Po podstawieniu (6.11) do (6.9) uzyskamy:

$$-j p(\omega) \operatorname{tg} \psi = \frac{-k(j\omega) + \cos \varphi + j p(\omega) \sin \varphi}{-k(j\omega) + \cos \varphi + j \frac{1}{p(\omega)} \sin \varphi} \quad (6.12)$$

Ponieważ $p(\omega) \operatorname{tg} \psi$ jest wielkością rzeczywistą, więc prawa strona równania (6.12) jest wielkością urojoną. Zatem:

$$\arg \left(\frac{k(j\omega) - [\cos \varphi + j p(\omega) \sin \varphi]}{k(j\omega) - [\cos \varphi + j \frac{1}{p(\omega)} \sin \varphi]} \right) = \pm \frac{\pi}{2} \quad (6.13)$$

Równanie (6.13) przedstawia okrąg, którego średnica wzdłuż osi urojonej jest ograniczona punktami [143]:

$$\begin{aligned} k_1(j\omega) &= \cos \varphi + j p(\omega) \sin \varphi, \\ k_2(j\omega) &= \cos \varphi + j \frac{1}{p(\omega)} \sin \varphi \end{aligned} \quad (6.14)$$

Po odjęciu stronami równań (6.14) uzyskamy średnicę okręgu:

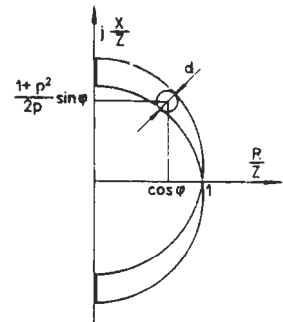
$$d = \frac{1 - p^2(\omega)}{p(\omega)} |\sin \varphi| \quad (6.15)$$

Współrzędne środka okręgu przyjmują następujące wartości (rys. 6.4):

$$k_{RO} = \cos \varphi, \quad k_{XO} = \left(1 + \frac{[1 - p(\omega)]^2}{2 p(\omega)} \right) \sin \varphi \quad (6.16)$$

Maksymalny błąd pomiaru rezystancji jest określony przez promień okręgu. Błąd pomiaru reaktancji jest powiększony o przesunięcie środka okręgu wzdłuż osi OX od wartości $\sin \varphi$ (6.16). W rezultacie uzyskuje się następujące wyrażenia określające maksymalne wartości błędów względnych:

$$\begin{aligned} \delta_{Rmax} &= \frac{1 - p^2(\omega)}{2 p(\omega)} |\sin \varphi|, \\ \delta_{Xmax} &= \frac{1 - p(\omega)}{p(\omega)} |\sin \varphi| \end{aligned} \quad (6.17)$$



Rys. 6.4. Trajektorja błędu pomiaru impedancji wg algorytmu (6.8)
Fig. 6.4. Trajectory of the impedance measurement error according to algorithm (6.8)

Błąd pomiaru reaktancji jest nieco większy, chociaż dla spotykanych algorytmów różnica obu

błędów nie przekracza wartości 0,1% przy rozważanych odchyłkach częstotliwości. Przykładowy przebieg maksymalnego błędu pomiaru reaktancji pokazano na rys. 6.5. Przy odchyłce częstotliwości fazora składowej podstawowej od wartości znamionowej, największy błąd występuje wówczas, gdy pętla zwarciova ma charakter reaktancyjny. Pomiar jest dokładny w przypadku czysto rezystancyjnego obwodu.

Uzyskane zależności nie mogą być stosowane do wszystkich algorytmów tej grupy. Każda kombinacja algorytmów pomiaru prądu i mocy w równaniach (5.58) generuje estymatory o odmiennych właściwościach. Szczególnie interesujące właściwości mają estymatory, w których moc jest obliczana na podstawie sumy odpowiednich zależności (5.52)-(5.55). Na przykład, jeśli moc czynna będzie obliczana na podstawie sumy zależności (5.52a) i (5.53a), a prąd - według (5.48b), to otrzyma się następującą formułę:

$$R(k) = \frac{u_C(k-m)i_S(k) - u_C(k)i_S(k-m) + u_S(k)i_C(k-m) - u_S(k-m)i_C(k)}{2[i_S(k)i_C(k-m) - i_C(k)i_S(k-m)]} \quad (6.18)$$

Po podstawieniu składowych prądu i napięcia, z uwzględnieniem parametrów filtra zespolonego, uzyska się następującą prostą zależność:

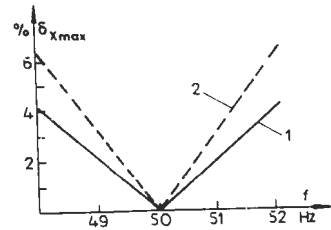
$$R = \frac{U}{I} \cos \varphi \quad (6.19)$$

Pomiar rezystancji na podstawie harmonicznych sygnałów prądu i napięcia jest zatem niezależny od sposobu uzyskiwania składowych ortogonalnych tych przebiegów. Podobna zależność dla estymatora reaktancji nie jest możliwa ze względu na różniczkową zależność wielkości elektrycznych i indukcyjności obwodu zwarciowego.

6.3. Błędy wynikające ze zmiany fazy sygnału

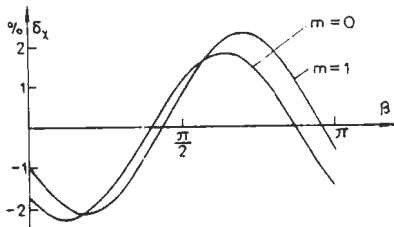
Na podstawie zależności uzyskanych w poprzednim punkcie można analizować błędy związane ze zmianą fazy mierzonych sygnałów. Odnoszą się one do algorytmów stosujących ortogonalizację sygnałów wejściowych.

W poprawnie zaprojektowanych estymatorach tego typu błąd związany ze zmianą fazy nie występuje przy częstotliwości znamionowej. Wynika to stąd, że obwiednie charakterystyk amplitudowych filtrów zespolonych mają



Rys. 6.5. Błąd wyznaczania reaktancji przy odchyłce częstotliwości sygnału (algorytm (6.8)); filtracja wg algorytmu Fouriera: 1-pełnokresowego, 2-półkresowego Fig. 6.5. Reactance estimation error caused by signal frequency deviation (algorithm (6.8)); filtering by use of: 1-full-wave, 2-half-wave Fourier algorithm

wówczas tę samą wartość: $A(\omega) = B(\omega)$. Warunek ten może być również spełniony w kilku innych punktach charakterystyki. Poza nimi charakterystyka



Rys. 6.6. Przebieg błędu estymatora amplitudy dla częstotliwości $f=49$ Hz (algorytm jak na rys. 6.1)

Fig. 6.6. Magnitude estimation errors for signal frequency $f=49$ Hz (algorithm like in Fig. 6.1)

amplitudowa algorytmów wywodzących się z równania (5.48a) jest niestacjonarna. Błędy estymatora amplitudy dla częstotliwości $f = 49$ Hz pokazano na rys. 6.6. Wprowadzenie opóźnienia (algorytm (5.48a)) prowadzi do zwiększenia tych błędów. Jak widać, częstotliwość oscylacji wartości chwilowej błędu jest dwukrotnie większa od częstotliwości sygnału, a jego wartość średnia jest bliska zeru. Wynika stąd możliwość prostej korekcji błędu przez uśrednianie. Łączy się to jednak z wydłużeniem okna pomiarowego o $1/4$ okresu.

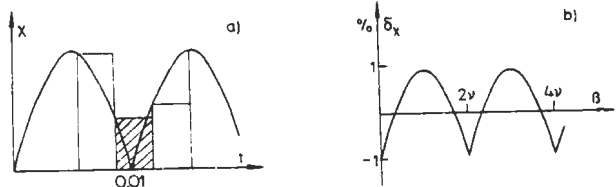
Stosowanie algorytmów opartych na przetwarzaniu wartości bezwzględnej sygnału jest związane z występowaniem omawianych błędów również przy znamionowej częstotliwości sygnału. W przypadku algorytmu przedstawionego w p. 5.3.2 występuje następująca zależność estymowanej amplitudy od fazy sygnału (dla metody prostokątów - rys.6.7) [119]:

$$X(\beta) = \frac{Y \nu}{2 \sin \frac{\nu}{2}} \cos\left(\beta - \frac{\nu}{2}\right) \quad (6.20)$$

Maksymalny błąd występuje wtedy, gdy moment próbkowania pokrywa się z przejściem sygnału przez zero. Jeśli wartość estymaty zostanie odniesiona do środka przedziału, wyznaczonego przez zależność (6.20), to błąd ten może być określony następującym równaniem [119]:

$$\delta_{max} = \operatorname{tg}^2 \frac{\nu}{4} \quad (6.21)$$

Jego przebieg dla $N = 16$ pokazano na rys. 6.7b. Wielkość omawianego błędu można wielokrotnie ograniczyć przez wprowadzenie prostej korekcji wartości pola obliczanego na podstawie próbek sygnału w pobliżu jego przejścia przez zero



Rys. 6.7. Błąd pomiaru amplitudy metodą uśredniania wartości bezwzględnej sygnału: a - ilustracja całkowania metodą prostokątów; b - błąd pomiaru ($N=16$)

Fig. 6.7. Error of magnitude measurement by averaging signal absolute value: a - integration by rectangular summation; b - measurement error ($N=16$)

(rys. 6.7a). W tym celu należy oszacować położenie punktu zmiany znaku sygnału [114].

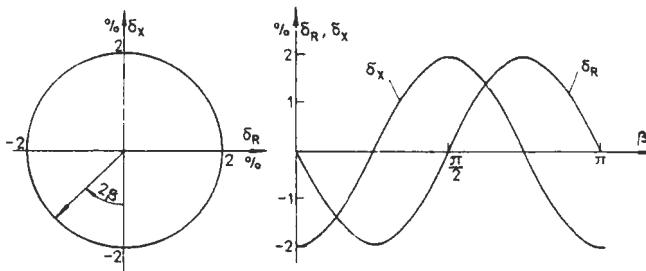
W przypadku pomiaru mocy, na podstawie składowych ortogonalnych prądu i napięcia, omawiane błędy występują przy stosowaniu algorytmów (5.54a) i (5.55a). Ich przebieg dla $f = 49$ Hz pokazano na rys. 6.8.

Maksymalne błędy, występujące w czasie pomiaru impedancji według algorytmu (6.8), zostały określone zależnościami (6.17). Przebiegi chwilowe błędów można analizować na podstawie równań (6.9)-(6.15). Koniec wektora $k(j\omega)$ wskazuje położenie względnych wartości impedancji w funkcji fazy sygnału prądu β_i na okręgu o średnicy d (rys. 6.4). Przyjmując punkt płaszczyzny $k(j\omega)$ o współrzędnych $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ za początek układu współrzędnych, uzyskamy odwzorowanie względnych błędów pomiaru impedancji (rys.6.9):

$$\delta_R = - \frac{[1 - p^2(\omega)] \sin(2\beta)}{2[\cos^2\beta + p^2(\omega) \sin^2\beta]} \quad (6.22a)$$

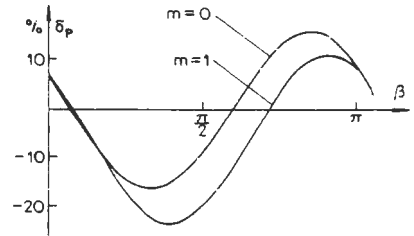
$$\delta_X = - \frac{[1 - p(\omega)][1 - [1 + p(\omega) \sin^2\beta]]}{\cos^2\beta + p^2(\omega) \sin^2\beta} \quad (6.22b)$$

gdzie: $p(\omega)$ - jak we wzorze (6.9).



Rys. 6.9. Błędy chwilowe estymatora impedancji (6.8)
Fig. 6.9. Instantaneous errors of the impedance estimator (6.8)

Funkcje błędów chwilowych mają częstotliwość dwukrotnie większą od częstotliwości sygnału. Wartość średnia błędu pomiaru rezystancji jest równa zero, a w przypadku reaktancji jest ona równa drugiemu składnikowi we wzorze (6.16) (po wymnożeniu przez wyrażenie w nawiasie).



Rys. 6.8. Przebieg błędu estymatora mocy czynnej dla częstotliwości $f=49$ Hz (oznaczenia jak na rys. 6.3b)
Fig. 6.8. Error of active power estimation for signal frequency $f=49$ Hz (symbols as in Fig. 6.3b)

6.4. Eliminacja oscylacyjnych składowych zakłócających

Eliminacja składowych oscylacyjnych jest klasycznym zadaniem filtrów. Problem ten jest również dobrze rozpoznany w odniesieniu do algorytmów zabezpieczeń cyfrowych. Synteza poprawnych estymatorów, z punktu widzenia tłumienia składowych zakłócających, w dużej mierze zależy od właściwego wydzielenia w obserwowanym procesie modelu sygnału użytecznego i zakłóceń. W charakterze sygnału użytecznego występują, oprócz składowej identyfikowanej, również te składowe, które ze względu na wyróżniające cechy nie mogą być przyjmowane za szum zakłócający.

Sprawą zasadniczą jest zatem właściwe rozpoznanie zakłóceń i zdefiniowanie modelu sygnału użytecznego. Z tego względu procedury pomiaru prądu i napięcia bazują zazwyczaj na różnych modelach.

W przypadku algorytmów stosujących ortogonalizację sygnałów omawiane błędy można analizować przez powiązanie sygnału wyjściowego filtru zespolonego z jego parametrami. Zastosowanie do tego celu charakterystyk omówionych w p. 6.2 nie jest możliwe, gdyż zostały one określone dla harmonicznego wymuszenia. W tym natomiast przypadku sygnał wymuszający jest utworzony z sumy podstawowej harmonicznnej i harmonicznnych składowych zakłócających. Ze względu na nieliniowy, w ogólnym przypadku, charakter estymatorów, ich analiza na podstawie reakcji na oddzielne wymuszenia może prowadzić do dużych błędów.

Jeśli na wejście filtru zespolonego zostanie podany sygnał, będący sumą dwóch przebiegów harmonicznnych:

$$y(k) = Y_1 \cos(\nu k + \beta_1) + Y_q \cos(q\nu k + \beta_q), \quad (6.23)$$

to analogicznie do wzoru (5.13) sygnał wyjściowy przyjmie następującą postać:

$$\underline{x}(k) = x_c(k) + j x_s(k), \quad (6.24)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} x_c(k) = & Y_1 [A_1 \cos\psi_1 \cos\vartheta(\omega_1) - B_1 \sin\psi_1 \sin\vartheta(\omega_1)] + \\ & + Y_q [A_q \cos\psi_q \cos\vartheta(\omega_q) - B_q \sin\psi_q \sin\vartheta(\omega_q)], \end{aligned} \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned} x_s(k) = & Y_1 [A_1 \cos\psi_1 \sin\vartheta(\omega_1) + B_1 \sin\psi_1 \cos\vartheta(\omega_1)] + \\ & + Y_q [A_q \cos\psi_q \sin\vartheta(\omega_q) + B_q \sin\psi_q \cos\vartheta(\omega_q)], \end{aligned}$$

$$\psi_q = q\nu k + \beta_q + \xi(\omega_q), \quad q = \omega_q/\omega_1,$$

$A_i = A(\omega_i)$, $B_i = B(\omega_i)$, $\vartheta(\omega_i)$, $\xi(\omega_i)$ - parametry filtru dla pulsacji ω_i z wzorem (5.14).

W celu zbadania wpływu parametrów filtru na skuteczność tłumienia harmonicznnych składowych zakłócających, wielkości (6.25) można podstawić do estymatorów odpowiednich wielkości kryterialnych. W przypadku

estymatorów amplitudy (5.48) uzyska się następujące zależności (dla uproszczenia zapisu podano je dla kwadratu amplitudy:

- dla estymatora (5.48a):

$$\begin{aligned}
 X^2(k) = & A_1^2 + \frac{1}{\cos(mv)} \left[A_q^2 \cos \psi_q \cos(\psi_q - m_q) + B_q^2 \sin \psi_q \sin(\psi_q - m_q) + \right. \\
 & + A_1 A_q \cos \Delta \vartheta \{ \cos \psi_1 \cos(\psi_q - m_q) + \cos \psi_q \cos(\psi_1 - m_1) \} + \\
 & + A_1 B_q \sin \Delta \vartheta \{ \cos \psi_1 \sin(\psi_q - m_q) + \sin \psi_q \cos(\psi_1 - m_1) \} - \\
 & - B_1 A_q \sin \Delta \vartheta \{ \sin \psi_1 \cos(\psi_q - m_q) + \cos \psi_q \sin(\psi_1 - m_1) \} + \\
 & \left. + B_1 B_q \cos \Delta \vartheta \{ \sin \psi_1 \sin(\psi_q - m_q) + \sin \psi_q \sin(\psi_1 - m_1) \} \right], \quad (6.26)
 \end{aligned}$$

- dla estymatora (5.48b):

$$\begin{aligned}
 X^2(k) = & A_1^2 + \frac{1}{\sin(mv)} \left[A_q B_q \sin m_q + \right. \\
 & + A_1 A_q \sin \Delta \vartheta \{ \cos \psi_1 \cos(\psi_q - m_q) - \cos \psi_q \cos(\psi_1 - m_1) \} - \\
 & - A_1 B_q \cos \Delta \vartheta \{ \cos \psi_1 \sin(\psi_q - m_q) - \sin \psi_q \cos(\psi_1 - m_1) \} + \\
 & + B_1 A_q \cos \Delta \vartheta \{ \sin \psi_1 \cos(\psi_q - m_q) - \cos \psi_q \sin(\psi_1 - m_1) \} + \\
 & \left. + B_1 B_q \sin \Delta \vartheta \{ \sin \psi_1 \sin(\psi_q - m_q) - \sin \psi_q \sin(\psi_1 - m_1) \} \right], \quad (6.27)
 \end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= Y_1 A(\omega_1), & B_1 &= Y_1 B(\omega_1), \\
 A_q &= Y_q A(\omega_q), & B_q &= Y_q B(\omega_q), \\
 \psi_1 &= kv + \beta_1 + \xi(\omega_1), & \psi_q &= kv + \beta_q + \xi(\omega_q), \\
 \Delta \vartheta &= \vartheta(\omega_1) - \vartheta(\omega_q), & m_1 &= mv, & m_q &= mqv.
 \end{aligned}$$

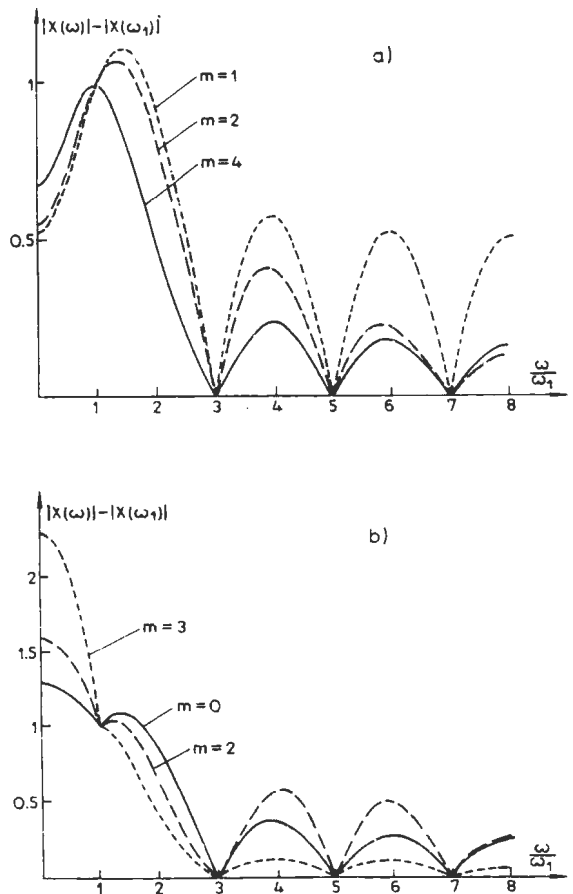
W równaniach (6.26) i (6.27) drugi składnik przedstawia błąd związany z obecnością sygnału zakłócającego. Wartość tego błędu jest proporcjonalna do odpowiednich iloczynów obwiedni filtrów dla pulsacji składowej podstawowej i sygnałów zakłócających. Zależy on również od chwilowych faz sygnałów wejściowych. Związki ilościowe można uzyskać poprzez analizę modelową. Na rysunku 6.10 pokazano charakterystyki częstotliwościowe estymatorów amplitudy, utworzonych na podstawie półokresowego algorytmu Fouriera, z uwzględnieniem wpływu rozważanego zakłócenia. W charakterze testowego wymuszenia przyjęto sygnał, będący sumą podstawowej harmonicznej i składowej zakłócającej o zmiennej częstotliwości: $y(k) = \cos(kv + \beta) + \cos(kqv + \beta_q)$. Widmo odpowiadające mu sygnału wyjściowego oznaczono przez $X(\omega)$, podczas gdy $X_1(\omega_1)$ przedstawia widmo odpowiedzi na wymuszenie w postaci podstawowej harmonicznej.

Przedstawione charakterystyki odpowiadają składnikom związanym z błędami od zakłóceń w równaniach (6.26), (6.27). Na ich podstawie można zatem oceniać zdolność tłumienia przez rozpatrywane estymatory zakłóceń oscylacyjnych. Należy zauważyć, że charakterystyka estymatora (5.48a) dla $m = 0$ pokrywa się z obwiednią $A(\omega)$ odpowiadającego mu filtru zespolonego. W pozostałych przypadkach nie występuje proste powiązanie charakterystyk częstotliwościowych filtrów zespolonych z właściwościami widmowymi utworzonych z nich estymatorów.

Omawiane błędy można łatwo określić, jeśli jest znany model zakłóceń. Ogólnie można powiedzieć, że lepsze właściwości pod tym względem mają te algorytmy, które opierają się na filtrach wąskopasmowych. Skracanie okna pomiarowego i stosowanie różniczkowania sygnałów prowadzi do zwiększenia tych błędów.

W podobny sposób można analizować błędy wprowadzane przez składowe oscylacyjne w estymatorach złożonych wielkości kryterialnych. Ze względu na złożoność uzyskiwanych wyrażeń analityczne rozważania muszą być ograniczone do prostych przypadków zakłóceń, występujących tylko w jednej wielkości wejściowej - w prądzie lub w napięciu.

Jeśli założyć, że sygnał zakłócający występuje tylko w napięciu, to analogicznie do wzoru (6.25), sygnały wyjściowe filtrów zespolonych prądu i napięcia (jednakowe filtry w obu torach pomiarowych) przyjmą



Rys. 6.10. Charakterystyki częstotliwościowe półokresowych estymatorów amplitudy (algorytm Fouriera, $N=16$): a - według estymatora (5.48b), b - według (5.48a) Fig. 6.10. Frequency response of the half-wave magnitude estimators (Fourier algorithm, $N=16$): a - according to the estimator (5.48b), b - according to (5.48a)

następującą formę:

$$i_c(k) = I_1[A_1 \cos\psi_i \cos\vartheta_1 - B_1 \sin\psi_i \sin\vartheta_1], \quad (6.28a)$$

$$i_s(k) = I_1[A_1 \cos\psi_i \sin\vartheta_1 + B_1 \sin\psi_i \cos\vartheta_1],$$

$$u_c(k) = U_1[A_1 \cos\psi_u \cos\vartheta_1 - B_1 \sin\psi_u \sin\vartheta_1] + U_q[A_q \cos\psi_q \cos\vartheta_q - B_q \sin\psi_q \sin\vartheta_q], \quad (6.28b)$$

$$u_s(k) = U_1[A_1 \cos\psi_u \sin\vartheta_1 + B_1 \sin\psi_u \cos\vartheta_1] + U_q[A_q \cos\psi_q \sin\vartheta_q - B_q \sin\psi_q \cos\vartheta_q]$$

Po podstawieniu tych sygnałów do estymatorów składowych impedancji (6.8), po niezbędnych przekształceniach, otrzymamy:

$$\underline{Z}(k) = R(k) + jX(k) = \underline{Z}_1(k) + \frac{U_q}{I_1} [A_q \cos\psi_q + jB_q \sin\psi_q] e^{j\theta}, \quad (6.29)$$

gdzie:

$$\underline{Z}_1(k) = \frac{U_1}{I_1} (\cos\varphi + j \sin\varphi), \quad \varphi - \text{kąt mocy,}$$

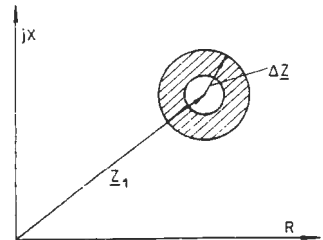
$$\theta = \vartheta_q - \vartheta_1 - \psi_i.$$

Drugi składnik równania (6.29) przedstawia bezwzględny uchyb pomiaru impedancji, związany z zakłóceniem oscylacyjnym w napięciu. Trajektorię wektora $\underline{Z}(k)$ można przedstawić na płaszczyźnie zespolonej - rys. 6.11. Zakładając dowolną wartość fazy sygnału zakłócającego ψ_q i prądu - ψ_i , łatwo zauważyć, że koniec wektora $\underline{Z}(k)$ porusza się wewnątrz pierścienia, którego środek jest określony położeniem wektora $\underline{Z}_1(k)$. Zewnętrzny promień tego pierścienia jest określony zależnością:

$$|\underline{\Delta Z}| = \frac{U_q}{I_1} A(\omega_q) \quad (6.30)$$

Jest to jednocześnie maksymalny bezwzględny uchyb pomiaru rezystancji i reaktancji. Jak widać, przy znanych amplitudach zakłócającego napięcia U_q i prądu I_1 , można go bezpośrednio określić na podstawie charakterystyki filtra zespolonego.

Ze względu na korelację zakłóceń występujących w prądzie i napięciu bardziej adekwatny obraz błędów tych algorytmów uzyskuje się w wyniku symulacyjnej analizy komputerowej. Sprawie tej poświęcony jest przykład w następnym rozdziale pracy (p. 7.4).



Rys. 6.11. Błąd pomiaru impedancji od zakłóceń oscylacyjnych
Fig. 6.11. Impedance measurement error due to higher harmonic interferences

6.5. Błędy wywołane aperiodyczną składową zakłócającą

6.5.1. Problemy eliminacji składowej aperiodycznej

W przeciwieństwie do składowych oscylacyjnych, identyfikacja i eliminacja składowej aperiodycznej natrafia spore trudności. Jest to związane z tym, że sygnał aperiodyczny ma ciągle widmo częstotliwościowe, a rozkład energii w widmie jest uzależniony od stałej czasowej zanikania T_a . Wartość tej stałej zależy od wielu czynników i jest trudna do oszacowania. Zakłócenia w postaci sygnałów aperiodycznych o bardzo krótkim czasie zanikania (kilka ms) są skutecznie ograniczane przez analogowe filtry wejściowe. Także algorytmy oparte na filtrach nierekursywnych, o szerokości okna pomiarowego bliskiej okresowi podstawowej harmonicznej, są mało wrażliwe na te zakłócenia. Z kolei zakłócenia o wartości stałych czasowych wielokrotnie przewyższających długość okresu podstawowej harmonicznej są dobrze tłumione przez algorytmy, które nie są wrażliwe na składową stałą.

W celu bliższej analizy warunków eliminacji składowej aperiodycznej rozpatrzmy przebieg prądu zwarciovego w obwodzie RL:

$$i(k) = I[\cos(\nu k + \beta) - \cos\beta e^{bk}] , \quad (6.31)$$

gdzie:

$$b = -\frac{T_1}{N T_a} \quad (\text{porównaj równanie (3.43)}) .$$

Jeśli powyższy sygnał poddany jest przetwarzaniu w filtrze o szerokości okna pomiarowego określonej przez K próbek, to skuteczność tłumienia składowej aperiodycznej może być określona przez porównanie jej dyskretnego widma z charakterystyką amplitudową filtru. Dyskretna transformata Fouriera składowej aperiodycznej może być w tym przypadku określona następująco [95]:

$$F(k) = \frac{2}{K} \sum_{i=0}^{K-1} f(i) e^{-j\nu ki} , \quad K \leq N \quad (6.32)$$

gdzie:

$$f(i) = e^{bi} .$$

Po dokonaniu niezbędnych przekształceń (Dodatek A) otrzymamy:

$$F(k) = \frac{2}{K} \sqrt{\frac{r^2 + q^2}{p^2 s^2}} e^{j\theta(k)} , \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6.33)$$

gdzie:

$$\theta(k) = \arctg \frac{pr - qs}{rs + pq} ,$$

$$p = e^b \cos(\nu k) - 1 ,$$

$$q = e^{bK} \cos(K\nu k) - 1 ,$$

$$r = e^{bK} \sin(K\nu k) ,$$

$$s = e^b \sin(\nu k) .$$

Stosując odpowiednie filtry, można bez trudu wyeliminować wszystkie człony rozkładu (6.33), z wyjątkiem pierwszego ($k = 1$), który określa amplitudę fazora o częstotliwości identyfikowanego sygnału. Warunek ten determinuje graniczne możliwości eliminacji składowej aperiodycznej przez estymator podstawowej harmonicznej sygnału [117].

Powiązanie charakterystyki filtru ze skutecznością tłumienia zakłócenia aperiodycznego można uzyskać przez poddanie sygnału (6.31) przetwarzaniu w filtrze zespolonym. Sygnał wyjściowy można zapisać w następującej postaci:

$$\underline{x}(k) = \underline{x}_1(k) + \underline{\delta}'(k) , \quad (6.34)$$

gdzie, analogicznie do wzoru (5.13):

$$\underline{\delta}'(k) = I \cos \beta \sum_{i=0}^{K-1} \left(e^{j\psi_i(\omega)} F(i) [A(\omega) \cos(\psi_i) + j B(\omega) \sin(\psi_i)] \right) ,$$

$$\psi_i = i\nu k + \theta(k) + \xi(\omega) ,$$

$\underline{x}_1(k)$ - wyjściowy fazor podstawowej harmonicznej sygnału.

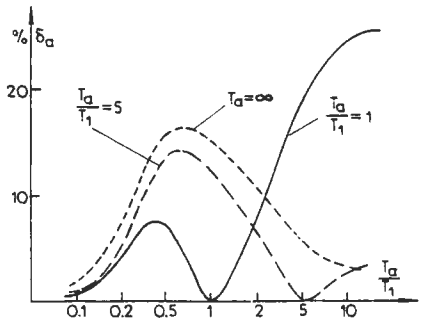
Do analizy błędu można posłużyć się kwadratem modułu sygnału $\underline{x}(k)$:

$$|\underline{x}(k)|^2 = |\underline{x}_1(k)|^2 + \delta^2(k) \quad (6.35)$$

Wielkość $\delta(k)$ jest miarą błędu związanego z zakłóceniem aperiodycznym.

6.5.2. Metody eliminacji zakłócenia aperiodycznego

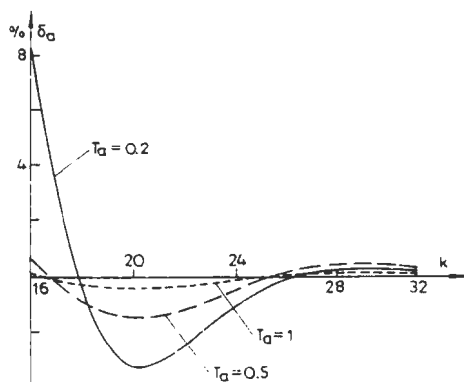
Można wykazać (choćby analityczny dowód jest rachunkowo złożony), że błąd występujący w równaniu (6.35) $\delta(k) = 0$, gdy filtr zespolony jest zbudowany na podstawie algorytmów, w których model sygnałowy składowej aperiodycznej jest równoważny zakłóceniu występującemu w sygnale. Syntezę takich filtrów przedstawiono w p. 3.3.2 (model regresji) oraz w p. 4.4.1 (model stanowy). Zazwyczaj jednak parametry zakłócenia nie są znane a priori i ten sposób minimalizacji błędów nie może być wówczas stosowany. W przypadku złego oszacowania stałej czasowej zakłócenia, błąd związany z tą metodą może być większy niż w przypadku stoso-



Rys. 6.12. Błędy od zakłóceń aperiodycznych w algorytmach z trzystanowym pełnookresowym modelem sygnałowym ($N=16$)
Fig. 6.12. Errors due to decaying d.c. offset in algorithm employing 3-state full-wave ($N=16$)

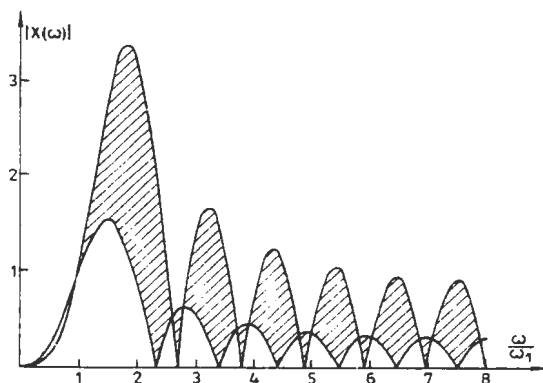
wania pełnokresowego algorytmu Fouriera bez dodatkowych zmian. Ilustrują to przebiegi na rys. 6.12. Charakterystyka częstotliwościowa takiego estymatora zależy od przyjętej stałej czasowej modelu składowej aperiodycznej (rys. 6.20, krzywa 1).

Przez modyfikację wspomnianego modelu sygnałowego składowej aperiodycznej można uzyskać nowe algorytmy eliminacji zakłócenia. W tym celu funkcja wykładnicza jest przedstawiana trzema pierwszymi wyrazami jej rozkładu w szereg Taylora (patrz 3.3.5 oraz 4.4.1). Takie algorytmy bardzo skutecznie eliminują zakłócenia aperiodyczne. Przebieg błędu estymacji amplitudy na podstawie pięciostanowego algorytmu Fouriera pokazano na rys. 6.13. Krzywe pokazują przebieg maksymalnego błędu po stanie przejściowym algorytmu ($N = 16$) dla wymuszenia, określonego zależnością (6.31). Dla zakłóceń o bardzo małych stałych czasowych występują krótkie przerosty pomiaru o znacznej wartości. Charakterystykę częstotliwościową tego algorytmu pokazano na rys. 6.14. Można zauważyć, że skuteczna filtracja składowej aperiodycznej prowadzi do zmniejszenia tłumienia zakłóceń oscylacyjnych. Z tego względu algorytmy te są rozbudowywane o większą liczbę stanów.



Rys. 6.13. Błędy od zakłóceń aperiodycznych w pięciostanowym estymatorze amplitudy ($N=16$)

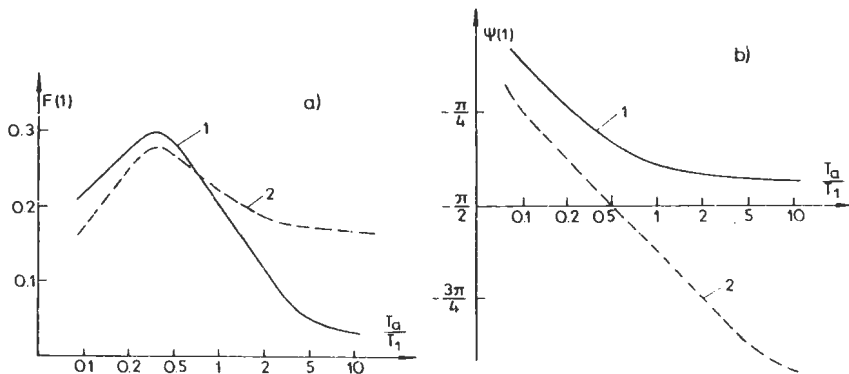
Fig. 6.13. Errors due to decaying offset in 5-state magnitude estimator ($N=16$)



Rys. 6.14. Charakterystyka częstotliwościowa pięciostanowego algorytmu Fouriera

Fig. 6.14. Frequency response of the 5-state Fourier algorithm

Gdy podstawowy algorytm identyfikacji sygnału eliminuje wszystkie składniki rozkładu (6.33), z wyjątkiem pierwszego, wówczas dalsze tłumienie tego zakłócenia można uzyskać przez wyzyskanie przesunięcia fazowego między identyfikowanym fazorem i składową $F(1)$. Na rysunku 6.15 (linie ciągłe) pokazano zależność amplitudy i fazy tej składowej od stałej czasowej zakłócenia. Można zauważyć, że dla znacznego zakresu zmian stałej czasowej faza sygnału $F(1)$ jest bliska $-\pi/2$. Właściwość tę



Rys. 6.15. Charakterystyka amplitudy (a) i fazy (b) pierwszej składowej dyskretnej transformaty Fouriera sygnału aperiodycznego: 1-sygnał bez filtracji, 2-sygnał wejściowy filtrowany w trzystanowym filtrze Butterwortha ($f_c = 265$ Hz, $N = 16$)

Fig. 6.15. Magnitude (a) and phase (b) frequency response of the DFT first component for decaying d.c. signal: 1- no analog filtering, 2-input signal filtering by 3-state Butterworth filter ($f = 265$ Hz, $N = 16$)

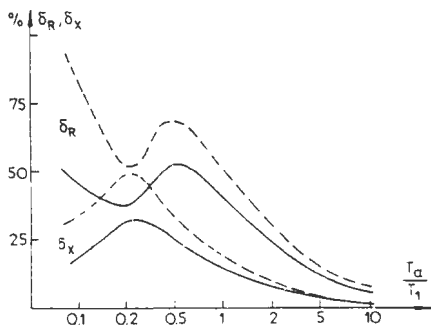
można spożytkować do syntezy algorytmów odpornych na zakłócenia aperiodyczne. Jej zasada polega na korelacji lub splocie mierzonego sygnału z funkcją, która jest ortogonalna do wspomnianej składowej zakłócającej [117], [140]. W ten sposób uzyskuje się jedną składową ortogonalną identyfikowanego sygnału. Druga jest tworzona przez jej opóźnienie o liczbę próbek, odpowiadającą kątowi $\pi/2$. Można pokazać, że funkcja impulsowa filtru, spełniająca podane warunki, powinna być symetryczna względem środka okna pomiarowego (na przykład kosinus). Szczegółowe zasady syntezy tych filtrów można znaleźć w pracy [142].

Należy zauważyć, że omówione warunki zmieniają się, gdy sygnał wejściowy poddany jest filtracji analogowej. Obraz amplitudy i fazy składowej $F(1)$ dla tego przypadku przedstawiają linie kreskowane na rys. 6.15. Widać, że dolnoprzepustowy filtr analogowy w dużym stopniu ogranicza amplitudę tej składowej dla małych stałych czasowych. Zasadnicze jednak zmiany zachodzą w przebiegu fazy tej składowej, chociaż w obszarze największych wartości amplitudy faza jest również bliska $-\pi/2$.

Porównanie maksymalnych błędów omawianej metody (pełnookresowa korelacja z kosinusem oraz przesunięcie) z błędami pełnookresowego algorytmu Fouriera pokazano na rys. 6.16. Ujemną stroną tego podejścia jest wydłużenie czasu pomiaru o wielkość wynikającą z opóźnienia sygnału ($1/4$ okresu podstawowej harmonicznej).

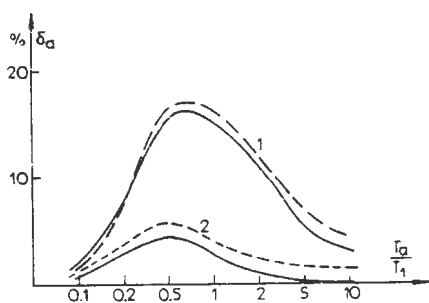
W dużej grupie metod eliminacji składowej aperiodycznej stosuje się operację różniczkowania, dzięki której usuwana jest składowa stała z mierzonego sygnału. W algorytmach pomiaru impedancji różniczkowanie jest konsekwencją korzystania z równań pętli zwarciowej. Zgodnie z

równaniami (5.61) operacji różniczkowania podlega sygnał prądowy. Porównanie omawianych błędów, występujących przy pomiarze impedancji według różnych algorytmów, jest bardzo kłopotliwe ze względu na niestacjonarny charakter zakłócenia i możliwość szerokiego doboru metod ortogonalizacji sygnałów prądu i napięcia. Na rysunku 6.17 pokazano maksymalne błędy pomiaru impedancji według algorytmów (5.61) i (5.62) w zależności od stałej czasowej zakłócenia w sygnale prądowym (6.31). W przypadku estymatora (5.62) składowe ortogonalne są określane według półokresowego trzystanowego algorytmu Fouriera (3.52). Również tą metodą są określane składowe synfazowe $[A(i)]$ oraz $A(u)$ w estymatorze (5.61). Pochodna prądu $D(i)$ jest natomiast obliczana zgodnie z równaniem (5.30) (aproxymacja IV rzędu; $\omega_1 = 50$ Hz, $\omega_2 = 75$ Hz, $\omega_3 = 100$ Hz, $\omega_4 = 150$ Hz). W obu przypadkach przyjęto następujące

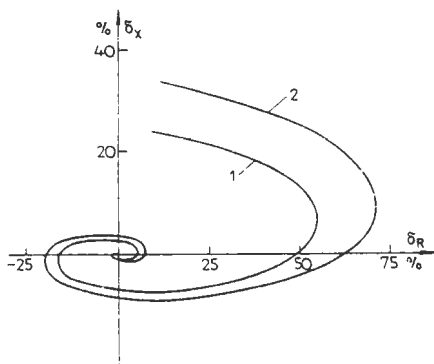


Rys. 6.17. Maksymalne błędy pomiaru impedancji przy zakłóceniu aperiodycznym w sygnale prądu: estymator (5.61) - linia ciągła i estymator (5.62) - linia przerywana

Fig. 6.17. Maximal impedance measurement errors at the presence of the decaying d.c. offset in current signal: estimator (5.61) - solid line, estimator (5.62) - dotted line



Rys. 6.16. Błędy od zakłóceń aperiodycznych: 1-pełnookresowy algorytm Fouriera (estymator 5.49), 2-korelacja z kosinusem z przesunięciem o $\pi/2$; linia kreskowana - sygnał wejściowy filtrowany jak na rys. 6.15
Fig. 6.16. Errors caused by decaying d.c. offset: 1- full-wave Fourier algorithm (estimator 5.49), 2-correlation with cosine wave shifted by $\pi/2$; dotted line - input signal filtered like in Fig. 6.15



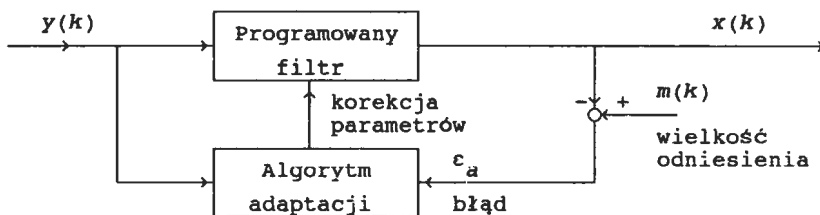
Rys. 6.18. Chwilowe błędy pomiaru impedancji przy zakłóceniu aperiodycznym ($T_a = 10$ ms): 1 - estymator (5.61), 2 - estymator (5.62)

Fig. 6.18. Instantaneous impedance measurement errors at the presence of the decaying d.c. offset ($T_a = 10$ ms): 1 - estimator (5.61), 2 - estimator (5.62)

sygnały wymuszające: napięcie - podstawowa harmoniczna, prąd - według równania (6.31), kąt mocy $\varphi = 75^\circ$. Błędy były mierzone dla ustalonej odpowiedzi estymatorów. Ich przebieg w czasie pokazano na rys. 6.18 (dla $T_a = 10$ ms). Maksymalne błędy występują w początkowym okresie po ustaleniu się odpowiedzi estymatora, po czym maleją w zależności od parametrów zakłócenia.

6.5.3. Adaptacyjny filtr składowej aperiodycznej

Koncepcja filtracji adaptacyjnej polega na wprowadzeniu sprzężenia zwrotnego w filtrze tradycyjnym w celu pożądanej zmiany jego parametrów [19]. Ogólną strukturę takiego filtru pokazano na rys. 6.19. Synteza algorytmu adaptacji jest prowadzona pod kątem minimalizacji błędu ε_a według przyjętego kryterium. Znane są metody adaptacji optymalnej, stosujące zasadę rekursywnego filtru Kalmana do określania nastaw w rozpatrywanym filtrze [19]. Wymaga to jednak znacznej rozbudowy podstawowego algorytmu. Poniżej przedstawiony jest filtr składowej aperiodycznej, w którym algorytm adaptacji jest tworzony według podejścia heurystycznego.



Rys. 6.19. Schemat filtru adaptacyjnego

Fig. 6.19. Block diagram of the adaptive filter

Korzysta się przy tym ze spostrzeżeń poczynionych podczas syntezy algorytmów filtracji, które zawierały model składowej aperiodycznej:

- przy znanych parametrach zakłócenia aperiodycznego można podać sposób jego całkowitej eliminacji;
- filtracja składowej aperiodycznej może być oddzielona od identyfikacji składowej podstawowej.

Prosty algorytm, który spełnia te uwagi, podano w p. 4.3. Jest to pełnokresowy algorytm rekursywny, wywodzący się z korelacyjnej metody przetwarzania sygnałów - równania (4.17)-(4.21) (odpowiednio dla modeli Fouriera i Walsh). Podstawowe równanie identyfikacji składowych ortogonalnych sygnału (4.18) można napisać w następującej postaci:

$$\begin{aligned}\hat{x}_S(k) &= \hat{x}_I(k) + q_S \Sigma y(k), \\ \hat{x}_C(k) &= \hat{x}_R(k) + q_C \Sigma y(k)\end{aligned}\tag{6.33}$$

Gdy znane są parametry zakłócenia aperiodycznego, wówczas współczynniki q_s , q_c można określić na podstawie równań (4.20). W innym przypadku można podać ich ograniczenia dolne i górne, zakładając minimalną i maksymalną wartość stałej czasowej zakłócenia. Wartość maksymalna (T_{a2}) może być określona na podstawie analizy układu elektrycznego związanego z chronionym obiektem. Wartość minimalną (T_{a1}) należy przyjąć na podstawie analizy filtrów w torze pomiarowym zabezpieczenia.

W ten sposób ograniczenia wartości współczynnika q_s mogą być zapisane następująco:

$$\begin{aligned} d_{s1}(k+1) \leq q_s \leq d_{s2}(k+1) \quad \text{gdy} \quad d_{s1}(k+1) \leq d_{s2}(k+1) \\ \text{lub:} \\ d_{s2}(k+1) \leq q_s \leq d_{s1}(k+1) \quad \text{gdy} \quad d_{s2}(k+1) \geq d_{s1}(k+1) \end{aligned} \quad (6.34)$$

i podobnie dla q_c .

Wielkości d_{s1} i d_{s2} mają przebieg okresowy i są określone wyrażeniami (4.20) lub (4.21) odpowiednio dla T_{a1} i T_{a2} .

W proponowanym algorytmie adaptacji wstępne oszacowanie wartości współczynników q_s i q_c dokonuje się na podstawie następujących zależności:

$$\begin{aligned} q_s &= \frac{\hat{x}_s(k-1) - \hat{x}_I(k)}{\Sigma y(k)}, \\ q_c &= \frac{\hat{x}_c(k-1) - \hat{x}_R(k)}{\Sigma y(k)}, \end{aligned} \quad (6.35)$$

które wywodzą się z równań (6.33). Zakłada się przy tym, że w danym kroku filtracji są określone już estymaty podstawowej harmonicznej $\hat{x}_I(k)$, $\hat{x}_R(k)$ - na podstawie (4.17). Wielkości q_s i q_c są następnie poddane dyskryminacji zgodnie z wzorem (6.34). W rezultacie przyjmują one wartości ograniczone przedziałami odpowiednio (d_{s1} , d_{s2}) lub (d_{c1} , d_{c2}). W tej postaci są stosowane jako współczynniki estymatorów (6.33). Pełny algorytm estymacji jednej składowej ortogonalnej identyfikowanego sygnału jest następujący:

1. Synteza filtru:

- określić graniczne stałe czasowe T_{a1} , i T_{a2} ,
- obliczyć ciągi ograniczające $d_{s1}[k]$, $d_{s2}[k]$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ - na podstawie (4.20),
- obliczyć współczynniki $h_s[k]$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ filtru składowej podstawowej - na podstawie (4.20).

2. Dane początkowe:

$$\Sigma y = 0; \hat{x}_I = 0; \hat{x}_s = 0; k = 0.$$

3. Wczytanie kolejnej próbki $y[k]$,

$$l = k \bmod N,$$

$$dy = y[k] - y[k-N],$$

$$\Sigma y = \Sigma y + dy,$$

$$\hat{x}_I = \hat{x}_I + h_s[l] * dy, \quad \{\text{identyfikacja składowej podstawowej}\}$$

if $|\Sigma y| < \epsilon_a$ then $\hat{x}_S = \hat{x}_I$; goto 7.

$$4. q_s = \frac{\hat{x}_S - \hat{x}_I}{\Sigma y}.$$

5. Dyskryminacja q_s zgodnie z wzorem (6.34).

6. $\hat{x}_S = \hat{x}_I + q_s * \Sigma y$, {korekcja błędu od zakłócenia aperiodycznego}

7. Obliczenie i kontrola wielkości kryterialnej.

8. $k = k + 1$; goto 3.

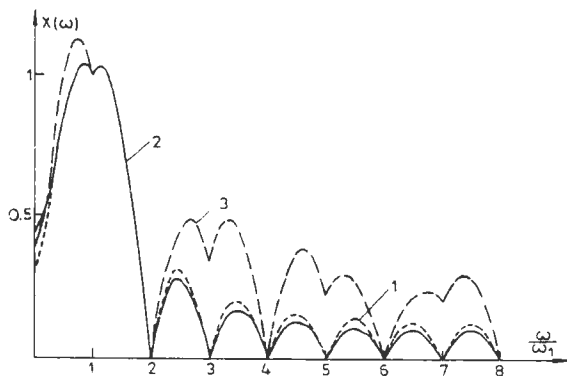
Algorytm filtracji składowej aperiodycznej (kroki 4-6) jest wykonywany wtedy, gdy składowa stała, mierzona sumą próbek Σy w okresie, przekroczy założoną wartość ϵ_a . Pełny algorytm jest niezwykle prosty, gdyż do estymacji jednej składowej wymagane jest wykonanie dwóch operacji mnożenia i jednego dzielenia. Większość pozostałych - to operacje logiczne.

W rezultacie analizy podanego algorytmu można również podać prosty sposób ograniczenia przerostów po przejściu zakłócenia przez okno pomiarowe przy niekorzystnej fazie sygnału. Polega on na przesunięciu wskaźników zbiorów d_{s1} i d_{s2} o $N/2$ (kompensacja fazowa) w pierwszych krokach po detekcji zakłócenia. Dodatkowym kryterium wystąpienia niekorzystnej fazy zakłóconego sygnału może być warunek:

$$(|\Sigma y| > |\Sigma y_1|) \wedge \{\text{sgn}(\Sigma y) = \text{sgn}(dy)\}, \quad (6.36)$$

gdzie: Σy_1 - suma próbek sygnału w połowie okna pomiarowego.

Powstały w ten sposób filtr adaptacyjny jest przetwornikiem niestacjonarnym. Analiza jego właściwości widmowych może być dokonana w umowny sposób przy założonych sygnałach wymuszających. Na rysunku 6.20 zesta-

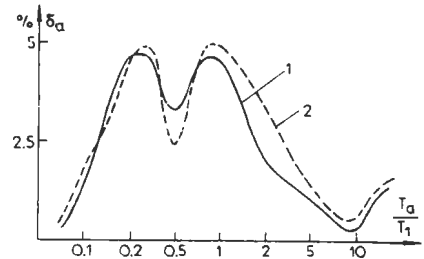


Rys. 6.20. Charakterystyki częstotliwościowe estymatorów amplitudy z eliminacją składowej aperiodycznej: 1-trzystanowy algorytm Fouriera ($T_a = 20$ ms), 2,3-filtry adaptacyjne z algorytmem Fouriera (2) i Walsha (3)

Fig. 6.20. Frequency response of the signal magnitude estimators with d.c. offset elimination: 1 - 3-state Fourier algorithm ($T_a = 20$ ms), 2,3-adaptive filters based on Fourier (2) and Walsh (3) algorithm

wiono charakterystyki częstotliwościowe trzech algorytmów identyfikacji sygnałów z eliminacją zakłócenia aperiodycznego. Charakterystyki filtrów adaptacyjnych uzyskano na drodze modelowania; przedstawiają one iloraz amplitud ustalonego sygnału wyjściowego i wejściowego wymuszenia harmonicznego o odpowiedniej pulsacji.

Maksymalny przerost odpowiedzi tych algorytmów na wymuszenie (6.31) ($\beta = 0$) w zależności od stałej czasowej zakłócenia aperiodycznego pokazano na rys. 6.21. Widać, że przedstawiony prosty estymator adaptacyjny, przy najbardziej niekorzystnych parametrach zakłóceń aperiodycznych, tłumi je do wartości poniżej 5% amplitudy składowej podstawowej. Stosowanie algorytmu Walsha daje jeszcze większą oszczędność obliczeniową przy tylko nieznacznym pogorszeniu właściwości częstotliwościowych.



Rys. 6.21. Błędy estymatora amplitudy z filtrem adaptacyjnym od zakłóceń aperiodycznych ($N = 16$, $T_{a1} = 9,7$ ms, $T_{a2} = 250$ ms): 1-wg algorytmu Fouriera, 2-wg algorytmu Walsha

Fig. 6.21. Errors of the magnitude estimator with the adaptive filter ($N = 16$, $T_{a1} = 9.7$ ms, $T_{a2} = 250$ ms): 1 - according to Fourier algorithm, 2 - according to Walsh algorithm

7. BŁĘDY STANU PRZEJŚCIOWEGO ALGORYTMÓW

7.1. Źródła błędów w stanie przejściowym algorytmów

Omówione dalej błędy powstają w rezultacie nieadekwatności między modelem sygnałowym przyjętym do wzorcowania algorytmu pomiarowego a mierzonym sygnałem rzeczywistym. Można wyróżnić kilka przyczyn tej nieadekwatności. Oto niektóre z nich:

1. Po skokowej zmianie parametrów systemu powstaje proces przejściowy, o intensywności i charakterze zależnym od wielu czynników. Przyjmując określony model tych zjawisk, należy się liczyć z błędami wynikającymi z różnicy między parametrami tego modelu i konkretnej realizacji procesu.

2. W procesie przejściowym algorytmu ocena nowego stanu systemu jest dokonywana na podstawie danych również z poprzedniego stanu.

3. Wiele algorytmów jest wyskalowanych na podstawie ustalonych warunków pomiaru - zarówno samego algorytmu, jak i obserwowanego procesu. Omawiany stan przejściowy prowadzi w związku z tym do powstania błędów.

Stosując deterministyczny model procesu i zakłóceń, przedstawione czynniki można uwzględnić jedynie w sensie jakościowym. Poszczególne

metody mogą być charakteryzowane przez podanie błędów maksymalnych, odpowiadających określonym wejściowym sygnałom wzorcującym (testującym). Probabilistyczny model procesu i zakłóceń umożliwia opisanie wymienionych źródeł również w sposób ilościowy. Wówczas błędy pomiarów można analizować na podstawie ich wariancji.

Z punktu widzenia organu decyzyjnego zabezpieczenia pożądane jest, aby proces przejściowy charakteryzował się jednostajną gładką zmianą wielkości kryterialnych między obszarami związanymi z dwoma stanami pracy nadzorowanego obiektu. Jednak w wielu przypadkach estymatory wielkości kryterialnych mogą w stanie przejściowym generować wielkości znacznie odbiegające od pożądanych. Szczególnie groźne w skutkach są takie stany, które mogą powodować nieuzasadnione działanie zabezpieczenia. Analiza dynamicznych właściwości omawianych algorytmów zmierza do określenia charakterystyk błędów związanych ze stanem przejściowym oraz sposobów ich ograniczenia.

7.2. Błędy algorytmów o stałym oknie pomiarowym

7.2.1. Analiza błędów

W przypadku algorytmów wywodzących się z modelu regresji, długość okna pomiarowego jest określona przez liczbę pomiarów, które są jednocześnie przetwarzane. Po wystąpieniu zakłócenia próbki sygnałów związanych z nowym stanem systemu zapełniają okno pomiarowe, co prowadzi do określenia nowej ustalonej wartości pomiaru.

Analiza tego procesu może być przeprowadzona na podstawie ogólnych równań estymatorów składowych ortogonalnych (p. 3.3). Bazą jest tutaj podstawowy algorytm estymacji, w którym zmienia się długość okna pomiarowego. W przypadku dwustanowego filtracyjnego algorytmu Fouriera o szerokości okna pomiarowego, odpowiadającej K próbkom, równanie estymatora (4.6) po k próbkach można zapisać następująco:

$$\begin{aligned} x_s(k) &= p_s \sum_{i=0}^{k-1} h_s(i) y(k-i), \\ x_c(k) &= p_c \sum_{i=0}^{k-1} h_c(i) y(k-i), \end{aligned} \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (7.1)$$

gdzie: p_s , p_c , h_s , h_c są określone zgodnie z (3.41) i (3.42), przy czym $\alpha = 0$.

Jeśli w charakterze wielkości $y(i)$ do równania (7.1) podstawić próbki sygnału harmonicznego: $y(i) = \cos(i\nu - \nu/2 + \beta)$, to otrzymamy:

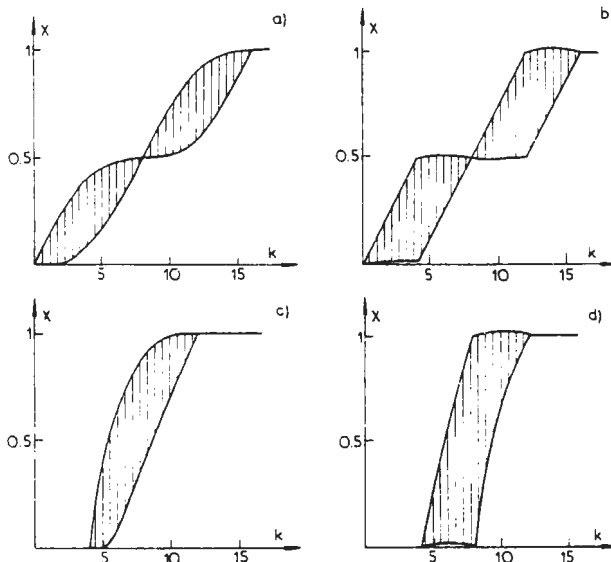
$$x_s(k) = \frac{P_s}{2 \sin \nu} \left(k \sin \nu \sin \left(k\nu - \frac{\nu K}{2} + \beta \right) - \sin(k\nu) \sin \left(\frac{\nu K}{2} + \beta \right) \right), \quad (7.2)$$

$$x_c(k) = \frac{P_c}{2 \sin \nu} \left(k \sin \nu \cos \left(k\nu + \frac{\nu K}{2} + \beta \right) + \sin(k\nu) \cos \left(\frac{\nu K}{2} + \beta \right) \right)$$

Po wprowadzeniu zależności (7.2) do równań estymatorów wielkości kryterialnych otrzyma się wyrażenia określające ich dynamikę. Na przykład, w przypadku pełnookresowego ($K = N$) estymatora amplitudy (5.49), odpowiedź na skokowe wymuszenie sygnałem harmonicznym jest określona równaniem:

$$X(k) = \frac{1}{N^2 \sin \nu} \left(\frac{\sin^2(k\nu)}{\sin \nu} + 2k \sin(k\nu) \cos(k\nu + 2\beta) + k^2 \sin \nu \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7.3)$$

W stanie przejściowym amplituda $X(k)$ jest zależna od fazy, z wyjątkiem punktu $k = N/2$, w którym $X(k) = 0,5$.

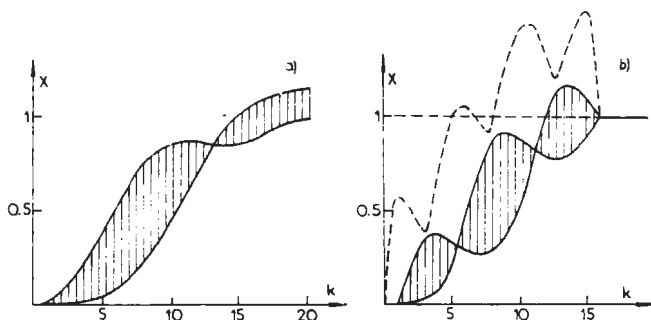


Rys. 7.1. Granice zmian odpowiedzi estymatorów amplitudy w stanie przejściowym: estymator (5.49) z algorytmem pełnookresowym Fouriera (a) i Walsha (b) oraz estymator (5.48b) z półookresowym algorytmem Fouriera (c) i Walsha (d) - przesunięcie $m=4$

Fig. 7.1. Limits to the magnitude estimator transient response: estimator (5.49) with full-wave Fourier (a) and Walsh (b) algorithm; estimator (5.48b) with full-wave Fourier (c) and Walsh (d) algorithm - displacement $m=4$

Granice zmian wielkości wyjściowych niektórych estymatorów amplitudy pokazano na rys. 7.1. Zakreskowane pole ukazuje możliwe wartości amplitudy w stanie przejściowym. Dla wymuszenia harmonicznego, krzywe narastania amplitudy mają przebieg monotoniczny lub niewiele od niego odbiegają. W większości algorytmów w tych warunkach nie występują przeregulowania.

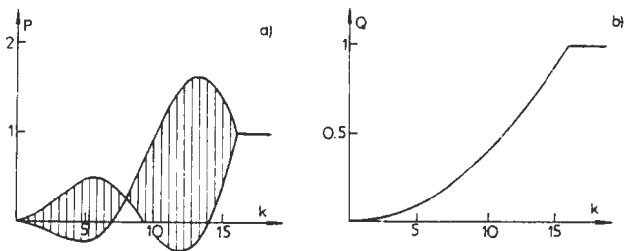
Zakłócenia prowadzą do zmiany charakteru stanu przejściowego estymatora. Obraz tych zmian przy zakłóceniu składową aperiodyczną pokazano na rys. 7.2. Można zauważyć, że algorytm o dużym tłumieniu tego zakłócenia w stanie ustalonym (rys. 7.2b) wykazuje przeregulowania w stanie przejściowym. Te przeregulowania mogą być bardzo duże przy braku zakłóceń w sygnale wejściowym. Jest to wynikiem wspomnianej nieadekwatności mierzonego sygnału i modelu przyjętego do syntezy algorytmu.



Rys. 7.2. Granice stanu przejściowego estymatorów amplitudy przy zakłóceniu składową aperiodyczną ($T_a = 20$ ms): a - pełnookresowy algorytm Fouriera; b - algorytm Fouriera z trzystanowym modelem składowej aperiodycznej. Linia przerywana - górna granica stanu przejściowego przy wymuszeniu harmonicznym bez zakłóceń

Fig. 7.2. Transient response limits of the magnitude estimators at the presence of decaying d.c. component ($T_a = 20$ ms): a - full-wave Fourier algorithm; b - Fourier algorithm with 3-state model of d.c. component. Dotted line marks the upper limit of transient states for the harmonic excitation without interferences

Podobny sposób analizy błędów przejściowych może być stosowany w odniesieniu do złożonych wielkości kryterialnych. Po podstawieniu wyrażeń (7.2), określających składowe ortogonalne sygnału harmonicznego prądu i napięcia w stanie przejściowym algorytmu, do równań estymatorów mocy (5.52)-(5.55) uzyskamy odpowiednie równania stanu przejściowego tych estymatorów. Zakres zmian rozpatrywanych błędów dla niektórych estymatorów mocy pokazano na rys. 7.3. Z powodu jednoczesnej zmiany parametrów sygnałów prądu i napięcia w estymatorach mocy czynnej mogą wystąpić duże błędy przejściowe, których wartość zależy również od kąta mocy (rys. 7.3a). W zależności od tego kąta i początkowej fazy sygnałów przebieg pomiaru może być silnie niemonotoniczny.



Rys. 7.3. Stan przejściowy estymatorów mocy z pełnookresowym algorytmem Fouriera dla składowych prądu i napięcia: a - moc czynna wg równania (5.54a), b - moc bierna wg równania (5.54b); w obu przypadkach przesunięcie $m=0$, kąt mocy $\varphi=75^\circ$

Fig. 7.3. Transient state of power estimators employing the full-wave Fourier algorithm for current and voltage signals: a - active power according to (5.54a), b - reactive power according to (5.54b); in both cases $m=0$, power angle $\varphi=75^\circ$

W przypadku estymatorów mocy biernej błąd ten jest niezależny od fazy sygnałów prądu i napięcia. Na przykład, dla estymatora (5.54b), w którym zastosowano pełnookresowy algorytm Fouriera, otrzymamy:

$$Q(k) = \frac{\sin\varphi}{2N^2 \sin^2\nu \cos(m\nu)} \left(k \sin\nu \left[(k-m) \sin\nu \cos(m\nu) - \sin(m\nu) \right] + \sin(k\nu) \left[m \sin\nu \cos((k-m)\nu) - \sin((k-m)\nu) \right] \right) \quad (7.4)$$

Stan przejściowy jest monotoniczny, bez przeregulowań. Obraz tych przebiegów zmienia się, gdy w sygnale wejściowym wystąpią składowe zakłócające.

7.2.2. Sposoby zmniejszania błędów dynamicznych

Jak wspomniano, przyczyną wystąpienia dużych dynamicznych błędów pomiaru jest to, że algorytm został dostosowany do warunków ustalonych, które zasadniczo odbiegają od stanu przejściowego (zwłaszcza w pierwszej fazie wystąpienia zakłócenia). Ta rozbieżność dotyczy modelu sygnałowego, a w konsekwencji i współczynnika skali.

Sposoby likwidacji wspomnianych błędów mogą zatem polegać na dynamicznym dostosowaniu parametrów estymatora do stanu obserwowanego procesu. Można tu wyróżnić dwie metody postępowania:

1. Algorytm pomiarowy zawiera dwa człony: rozruchowy i właściwego pomiaru. Pierwszy z nich, na podstawie bardzo uproszczonego kryterium, dokonuje identyfikacji momentu wystąpienia zakłócenia. Drugi - wykonuje pomiar na podstawie algorytmu, który zmienia swoje parametry dla kolejno zwiększającego się zbioru próbek sygnału.

2. Zmiana parametrów algorytmu pomiarowego jest dokonywana na

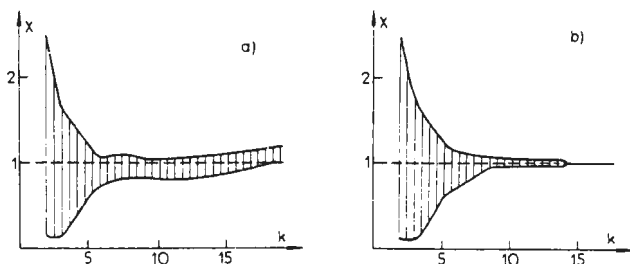
bieżący, na podstawie założonej metody adaptacji (filtr adaptacyjny).

Estymator dokonujący właściwego pomiaru w pierwszej z wymienionych metod może być zbudowany na podstawie algorytmu z modelem pomiarowym, dostosowanym do długości okna pomiarowego (p. 3.3.6). Algorytm może być przy tym różny: Fouriera o stałej lub zmiennej częstotliwości (odpowiednio do długości okna), Walsh'a lub inny. Jego zasada jest następująca: pomiar jest inicjowany po detekcji zakłócenia i rozpoczyna się według algorytmu o szerokości okna pomiarowego równej 2-3 próbek. W miarę napływania kolejnych próbek są stosowane nowe algorytmy, dostosowane do poszerzającego się okna [73], [163]. Po osiągnięciu maksymalnej szerokości okna, równej zazwyczaj okresowi podstawowej harmonicznej, dalszy pomiar odbywa się według konwencjonalnej zasady.

Estymator jest niestacjonarny, gdyż jego parametry zmieniają się do momentu osiągnięcia założonej szerokości okna pomiarowego. Ograniczona jest zatem przydatność charakterystyk częstotliwościowych do badania właściwości tego algorytmu.

Na rysunku 7.4 pokazano granice zmian odpowiedzi omawianego estymatora, który jest zbudowany na podstawie trzystanowego algorytmu Fouriera (3.51), przy zmianie szerokości okna w zakresie $3 \dots N$ próbek, $N = 16$. Sygnał wejściowy jest określony następującym równaniem:

$$y(k) = \cos(\nu k - \alpha) - a \cos(\alpha) \exp[-kT_1/(NT_a)] + b \cos(3\nu k + \alpha_1) + c \cos(5\nu k + \alpha_2) \quad (7.5)$$



Rys. 7.4. Stan przejściowy estymatora amplitudy o zmiennym oknie pomiarowym po wymuszeniu sygnałem (7.5): a - $T_a = 20$ ms, $a = 1$, $b = 0,1$, $c = 0,05$; b - $a = 0$

Fig. 7.4. Transient response of the magnitude estimator with varying data window to excitation (7.5): a - $T_a = 20$ ms, $a = 1$, $b = 0.1$, $c = 0.05$; b - $a = 0$, other coeff. like in a

Zakresowane pole na rys. 7.4a odpowiada możliwym stanom odpowiedzi estymatora przy zmianie kątów: α , α_1 , α_2 . Rezultaty pokazane na rys. 7.4b odnoszą się do wymuszenia (7.5), w którym nie występuje składowa aperiodyczna. Z porównania obu rysunków widać, że stan przejściowy estymatora z krótkim oknem pomiarowym jest zależny przede wszystkim od zakłóceń wysokoczęstotliwościowych. Składowa aperiodyczna oddziałuje

na stan przejściowy mniej więcej w tym samym stopniu, niezależnie od szerokości okna pomiarowego. Odpowiedź estymatora w połowie okresu podstawowej harmonicznej ($k = 8$) można uważać za ustaloną. Bardzo podobne zależności można uzyskać dla estymatora zbudowanego na podstawie algorytmu Fouriera (3.67), w którym częstotliwość funkcji modelu sygnałowego zależy od szerokości okna pomiarowego.

Adaptacja w drugiej z wymienionych metod może odnosić się do całego filtra lub tylko do pomiaru (eliminacji) poszczególnych składowych. W poprzednim rozdziale (6.5.3) przedstawiono filtr z adaptacją w członie pomiarowym składowej aperiodycznej. Odpowiedź tego filtra na wymuszenie w postaci składowej podstawowej oraz zakłócenia aperiodycznego (6.31) pokazano na rys. 7.5. Widać, że ze względu na dużą szerokość okna pomiarowego, składowe zakłócające wyższych częstotliwości nie mają istotnego wpływu na odpowiedź przejściową estymatora.

W algorytmach o krótkim oknie pomiarowym jest nieunikniona możliwość wystąpienia znacznych przeregulowań w stanie przejściowym. W celu wyeliminowania zbędnego działania zabezpieczeń, wprowadza się wówczas dodatkowe kryteria w algorytmach działania członu decyzyjnego [64], [100].

7.3. Błędy estymatorów z zastosowaniem obserwatorów stanu

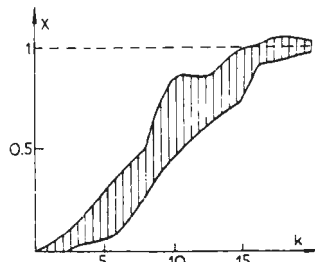
7.3.1. Błędy deterministycznych obserwatorów stanu

Z punktu widzenia przetwarzania sygnałów, obserwatory stanu można rozpatrywać jako rekursywne filtry cyfrowe. Ich właściwości widmowe można zatem analizować na podstawie charakterystyki częstotliwościowej. W przypadku stacjonarnego obserwatora jednowyjściowego systemu łatwo można określić jego transmitancję względem zmiennych stanu. Po poddaniu równania (4.24) transformacji Z i dokonaniu niezbędnych przekształceń otrzymamy:

$$G(z) = z \left(zI - (A - KH) \right)^{-1} K, \quad (7.6)$$

gdzie: $G(z)$ - wektor transmitancji względem kolejnych zmiennych stanu.

Po wprowadzeniu podstawienia: $z = \exp(j\omega T)$ uzyskujemy transmitancje widmowe obserwatora stanu. Transmitancje, odpowiadające składowym ortogonalnym fazora podstawowej harmonicznej, są określone przez dwa pier-

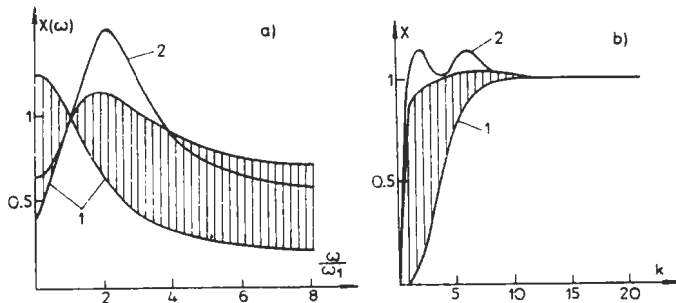


Rys. 7.5. Stan przejściowy adaptacyjnego estymatora amplitudy po wymuszeniu jak na rys. 7.4a
Fig. 7.5. Transient response of the adaptive magnitude estimator to excitation as in Fig. 7.4a

sze wiersze równania (7.6).

Charakterystyki częstotliwościowe amplitudy dwustanowego obserwatora stanu są pokazane na rys. 7.6a. Widać, że ich przebieg jest w znacznym stopniu uzależniony od położenia biegunów obserwatora (co odpowiednio wiąże się z wartościami współczynników wzmacnienia). Krzywa 2 odpowiada sytuacji, gdy charakterystyki obu składowych są jednakowe.

Gdy znane są charakterystyki widmowe obserwatora stanu, można analizować jego własności ustalone według zasad przedstawionych w poprzednim rozdziale dla filtrów nierekursywnych.



Rys. 7.6. Charakterystyki częstotliwościowe (a) i dynamiczne (b) dwustanowego obserwatora stanu (parametry jak w tabeli 7.1)

Fig. 7.6. Frequency response (a) and dynamic properties (b) of 2nd order state observer (parameters as in table 7.1)

T a b e l a 7.1

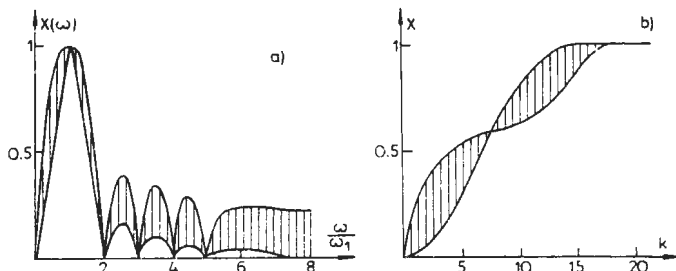
Parametry analizowanych obserwatorów stanu

Rysunek	Bieguny macierzy A - K H	Wektor wzmacnienia K
Rys. 7.6 (krzywa 1)	$b_1 = b_2 = 0,5$	$K[1] = -0,0868$ $K[2] = 0,848$
Rys. 7.6 (krzywa 2)	$b_{1,2} = 0,5 \pm j 0,43$	$K[1] = -0,570$ $K[2] = 0,848$
Rys. 7.7	$b_{1,2} = 0,625 \pm j 0,612$ $b_{3,4} = 0 \pm j 0,980$ $b_{5,6} = 0,360 \pm j 0,869$ $b_{7,8} = -0,348 \pm j 0,840$ $b_{9,10} = 0,758 \pm j 0,313$ $b_{11} = 0,895$	$K[1] = 0,0515$ $K[2] = 0,246$ $K[3] = 0,0484$ $K[4] = 0,173$ $K[5] = 0,0419$ $K[6] = 0,0680$ $K[7] = 0,0238$ $K[8] = 0,00921$ $K[9] = 0,113$ $K[10] = -0,000448$ $K[11] = 0,08$

Odpowiedzi estymatorów amplitudy, w których składowe ortogonalne sygnału są określone za pomocą tych obserwatorów, pokazano na rys. 7.6b. Wymuszeniem jest sygnał harmoniczny o zmiennej fazie początkowej. Widać, że stan przejściowy zanika dopiero po kilkunastu próbkach odpowiedzi.

Można uzyskać ustaloną odpowiedź już w drugiej próbie (dead beat), jednak wówczas estymator jest bardzo czuły na zakłócenia, a przeregulowania w stanie przejściowym sięgają kilkukrotnej wartości stanu ustalonego.

Na rysunku 7.7 pokazano charakterystyki estymatora amplitudy opartego na 11-stanowym obserwatorze o parametrach zamieszczonych w tabeli 7.1. Jego model uwzględnia kolejne harmoniczne 1..5 oraz składową stałą. Właściwości częstotliwościowe i dynamiczne tego estymatora są w dużym stopniu podobne do estymatorów o stałym oknie pomiarowym.



Rys. 7.7. Charakterystyka częstotliwościowa (a) i dynamiczna (b) 11-stanowego obserwatora stanu (parametry jak w tabeli 7.1)

Fig. 7.7. Frequency response (a) and dynamic properties of an 11th order state observer (parameters as in table 7.1)

Z analizy właściwości obserwatorów stanu stosowanych do identyfikacji sygnałów widać, że umożliwiają one bardzo szczegółowe kształtowanie charakterystyk algorytmów pomiarowych. Odbyna się to przez wybór modelu procesu (liczba zmiennych stanu i związane z nimi częstotliwości) oraz przez dobór współczynników wzmocnienia.

W procesie syntezy obserwatorów stanu jeszcze ostrzej niż w przypadku filtrów nierekursywnych wyłania się sprzeczność związana z szybkimi pomiarami: szybkość - dokładność. Algorytm obserwatora zmierza do likwidacji różnicy między wielkością wejściową i jej estymatą. Przyspieszenie zbieżności pomiaru przez przesunięcie biegunów obserwatora do początku układu prowadzi do zwiększenia współczynników wzmocnienia, co w efekcie wywołuje znaczne przeregulowania i wzmocnienie szumów. Na charakterystyce widmowej uwydatniają się wówczas wyższe częstotliwości i procedura pomiarowa staje się czuła na składowe zakłócające nie uwzględnione w modelu procesu. Przeciwdziałanie temu polega na zmniejszeniu wzmocnienia. W obu wypadkach prowadzi to do zwiększenia czasu pomiaru.

Przedstawione uwagi leżą u podstaw metod syntezy spektralnych obserwatorów stanu. Kształtowanie ich właściwości może się odbywać przez zmianę liczby stanów lub położenia biegunów. Obowiązuje przy tym zasada, że skrócenie czasu identyfikacji sygnału prowadzi do gorszej eliminacji

zakłóceń i odwrotnie: duże tłumienie zakłóceń (wysoka selektywność) jest okupiona długim czasem odpowiedzi. Przy ustalonym modelu sygnałowym, pogodzenie tych sprzeczności może być dokonane przez odpowiedni dobór jego biegunów. Mogą być w tym celu stosowane pomocnicze procedury optymalizacyjne [89]. Wymagana jest przy tym głębsza znajomość parametrów procesu i zakłóceń pomiarowych. Mogą być wówczas stosowane optymalne obserwatory stanu. Ze względu na stałe wartości wzmocnienia, obserwator stanu ma ograniczone możliwości kształtowania właściwości dynamicznych.

7.3.2. Właściwości filtru Kalmana jako estymatora składowych ortogonalnych sygnału

Podstawowe charakterystyki filtru Kalmana oraz zasady jego syntezy w przypadku stosowania w układach automatyki zabezpieczeniowej podano w p. 4.5. Dalej przedstawiono jego właściwości w zestawieniu z innymi estymatorami wielkości kryterialnych zabezpieczeń.

Filtr Kalmana jest optymalnym, w sensie minimum wariancji błędów, estymatorem stanu. Przy badaniu jego właściwości należy uwzględnić, że jest to w ogólnym przypadku przetwornik niestacjonarny, oparty na probabilistycznym modelu procesu i pomiarów. Poprawna synteza filtru Kalmana wymaga ustalenia a priori charakterystyk tego modelu.

W odniesieniu do rekursywnych algorytmów MNK (p.3.2.2) w filtrze Kalmana można dowolnie kształtować początkową wartość macierzy kowariancji błędów estymacji $P(0)$. Oznacza to, że można wstępnie zaprogramować "pamięć" filtru informacją o spodziewanym zakłóceniu. Macierz $P(0)$, jak i inne dane do projektowania filtru, można określić na podstawie statystycznej analizy zakłóceń w nadzorowanym obiekcie [43], [90]. Zgrubne określenie tych danych można dokonać na podstawie założeń podanych w p. 4.5.2. Uzyskuje się w ten sposób filtr suboptymalny. Dane do projektowania filtrów w obwodzie pomiaru napięcia (filtr dwustanowy) i prądu (filtr trzystanowy) linii 400 kV podano w tabeli 7.2.

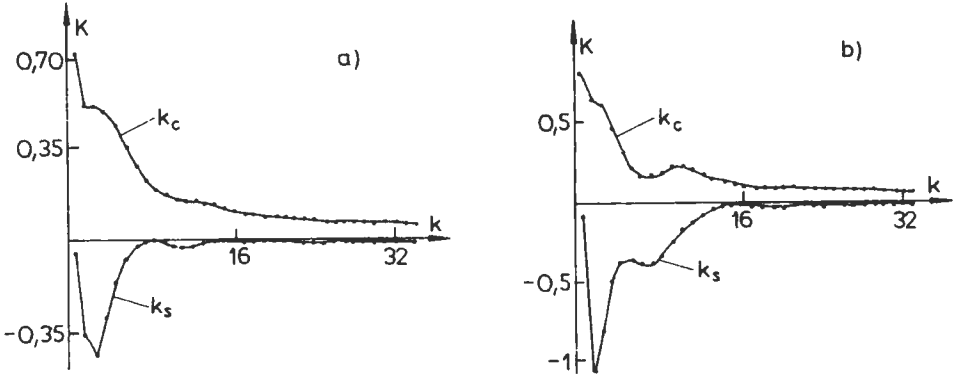
T a b e l a 7.2

Parametry filtrów Kalmana

Filtr	Elementy diagonalne $P(0)$	Elementy diagonalne Q	Wariancja błędu pomiaru R
filtr 2-stanowy	$P_{11} = P_{22} = 1$	$q_{11} = q_{22} = 0$	$R(k) = 0,4 \exp(-k/7)$
filtr 3-stanowy	$P_{11} = P_{22} = 10$ $P_{33} = 1$	$q_{11} = q_{22} = 0$ $q_{33} = 0,01$	$R(k) = 1,0 \exp(-k/14)$

W porównaniu z obserwatorem stanu filtr Kalmana jest estymatorem, w

którym zmienna macierz wzmocnienia K jest dostosowana do statystycznych parametrów procesu przejściowego wywołanego zakłóceniem w nadzorowanym systemie. Ta właściwość odróżnia go od innych procedur o stałym oknie pomiarowym. Przebieg zmian współczynników wzmocnienia analizowanych filtrów pokazano na rys. 7.8.

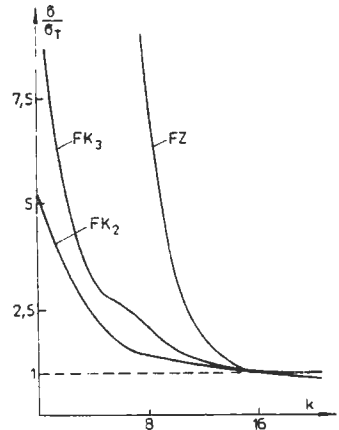


Rys. 7.8. Przebieg współczynników wzmocnienia 2-stanowego (a) i 3-stanowego (b) filtra Kalmana (parametry jak w tabeli 7.2)

Fig. 7.8. Gain coefficients of 2-state (a) and 3-state (b) Kalman filter (parameters as in table 7.2)

Współczynniki te dążą do wartości ustalonej, które w określonych warunkach (filtr nienasycony) są różne od zera [2]. Wówczas można analizować filtr Kalmana podobnie jak obserwator stanu. Należy jednak podkreślić, że analiza częstotliwościowa, odnosząca się do stajonarnego obszaru pracy filtra Kalmana nie charakteryzuje jego podstawowych właściwości. Są one bowiem związane ze stanem dynamicznym. W tym przypadku właściwą miarą jakości estymacji jest wariancja błędów oceny poszczególnych składowych w funkcji dyskretnego czasu. Zależność ta jest przedstawiana w jednostkach względnych, przy czym wielkością odniesienia może być wartość wariancji dla określonej chwili, na przykład jej wartość początkowa σ_0^2 lub dla czasu, odpowiadającego okresowi podstawowej harmonicznej - σ_T^2

Na rysunku 7.9 pokazano względne odchylenia standardowe analizowanych filtrów Kalmana i trzystanowego algorytmu o zmiennym



Rys. 7.9. Względne odchylenia standardowe dwu- i trzystanowego (FK_2 , FK_3) filtra Kalmana oraz trzystanowego algorytmu Fouriera o zmiennym oknie pomiarowym (FZ)

Fig. 7.9. Relative standard deviation of a 2-state and 3-state (FK_2 , FK_3) Kalman filter and 3-state Fourier algorithm (FZ)

oknie pomiarowym, przedstawionych w p. 7.2.2. Należy zwrócić uwagę, że początkowa wartość względnego odchylenia standardowego błędu estymacji w filtrze Kalmana zależy od parametrów projektowych. W przypadku algorytmu o zmiennym oknie pomiarowym wielkość ta jest nieskończona (brak możliwości uwzględnienia wstępnej informacji o wartości estymowanej). Widać, że obszary szybkiego zmniejszania się odchylenia standardowego w obu typach filtrów są przesunięte: w filtrze Kalmana występuje ono już po kilku próbkach, natomiast w filtrze o zmiennym oknie pomiarowym dokładność pomiaru szybko wzrasta, poczynając od połowy okna.

Algorytm o zmiennym oknie pomiarowym wykazuje pewne funkcjonalne podobieństwo do filtra Kalmana. Chodzi tu głównie o dynamiczne dostosowanie parametrów do stanu przejściowego sygnału. Poprawnie zaprojektowany filtr Kalmana ma pod tym względem statystycznie najlepsze właściwości.

7.4. Dynamika estymatorów impedancji - przykład obliczeniowy

7.4.1. Wprowadzenie

Badanie właściwości estymatorów wielkości kryterialnych jest zadaniem złożonym i w dużym stopniu subiektywnym. Próby opracowania pewnych standardów w celu uzyskania możliwości porównania różnych algorytmów nie uzyskały szerszej akceptacji [1], [58], [65], [75]. W tej sytuacji autorzy różnych opracowań na ten temat stosują metodę wybiórczego testowania algorytmów w określonych warunkach.

Jedną z podstawowych wielkości kryterialnych zabezpieczeń elektroenergetycznych jest impedancja. Ze względu na konieczność jednoczesnego pomiaru prądu i napięcia, które występują w nieliniowej zależności, estymator impedancji umożliwia krytyczną ocenę statycznych i dynamicznych właściwości algorytmów określania składowych ortogonalnych sygnału.

W celu dostatecznie adekwatnego odwzorowania warunków pomiaru impedancji przez zabezpieczenie używa się cyfrowych modeli symulacyjnych, imitujących przebieg zjawisk przejściowych w systemie elektroenergetycznym podczas zakłóceń [28]. Dalej przedstawiono wyniki symulacji procesów przejściowych na modelach cyfrowych realizowanych na podstawie metody modelowania funkcjonalnego, która została rozwinięta w pracy [115]. Wyniki te są dalej podstawą analizy własności niektórych algorytmów pomiaru impedancji.

7.4.2. Cyfrowy model systemu

Schemat analizowanego fragmentu systemu elektroenergetycznego pokazano na rys. 7.10. Poszczególne elementy systemu są przedstawione trzy-

fazowymi modelami według następujących zasad:

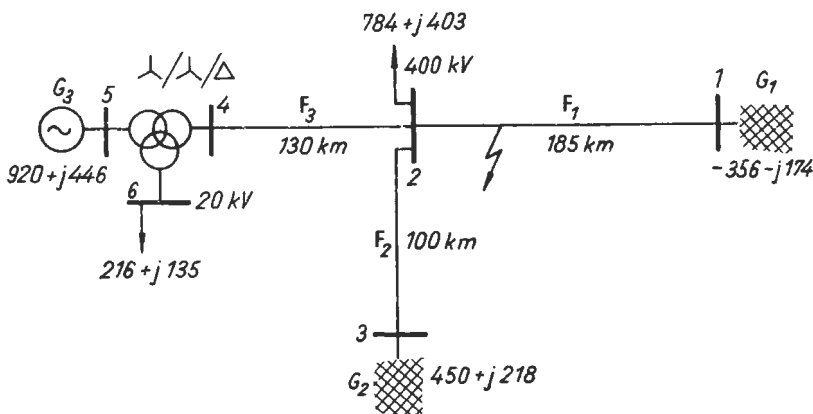
Generator synchroniczny G_3 jest przedstawiony liniowym modelem w składowych $dq0$ według równań Parka. Zakłada się stałe napięcie wzbudzenia oraz stałą prędkość obrotową turbiny. Podsystemy związane z szynami 1 i 3 są przedstawione obwodami RL o wartościach określonych na podstawie mocy zwarciovych na tych szynach.

Transformator trójzwojeniowy jest modelowany w postaci trzech niezależnych magnetycznie trójzwojeniowych transformatorów z uwzględnieniem powiązań elektrycznych (w tym przypadku jest to transformator $\lambda/\lambda/\Delta$). Charakterystyka magnesowania jest przedstawiona analitycznie.

Linia elektroenergetyczna jest rozpatrywana jako obiekt o parametrach rozłożonych. Model linii jest przedstawiony w modalnym układzie współrzędnych, wynikających z przekształcenia Karrenbauera [110]. Równania modelu linii o parametrach rozłożonych są rozwiązywane metodą charakterystyk. Zależność rezystancji ziemi od częstotliwości jest uwzględniana przez umieszczenie stosownych filtrów na końcach modeli składowej zerowej.

Odbiór jest modelowany statycznymi obwodami RL, podobnie jak generator o stałej impedancji. Konfiguracja modelu umożliwia uwzględnienie różnych wartości Z_0/Z_1 .

Zwarcie jest modelowane siecią rezystancyjną o stałych wartościach R_p , gdzie p - połączenie faza-faza lub faza-ziemia. Wyboru rodzaju zwarcia dokonuje się przez zmianę wartości odpowiednich elementów modelu.



Rys. 7.10. Schemat systemu elektroenergetycznego do symulacji procesów zwarciovych

Fig. 7.10. Power system diagram used in simulation of fault conditions

Równania różniczkowe opisujące modele elementów skupionych są aproksymowane według metody Geara III rzędu.

Krok modelowania jest określany na podstawie warunków wynikających z charakteru symulowanego systemu i sposobu wykorzystania wyników. Żąda się zazwyczaj, aby krok całkowania równań różniczkowych był kilkakrotnie mniejszy od najkrótszej stałej czasowej w obwodach z parametrami skupionymi. W odniesieniu do linii, długość kroku powinna być kilkakrotnie mniejsza od czasu przejścia fali elektromagnetycznej wzdłuż najkrótszej linii.

W danym przypadku krok modelowania był uwarunkowany możliwością cyfrowej symulacji analogowych filtrów odcinających, umieszczonych na wejściu członów pomiarowych zabezpieczeń. Ze względu na periodyczność widma filtru cyfrowego, charakterystyki częstotliwościowe filtru analogowego i jego modelu cyfrowego mają podobny przebieg dla częstotliwości dostatecznie odległych od częstotliwości Nyquista. Na podstawie zasad doboru odcinających filtrów analogowych ustalono, że warunek ten jest spełniony, gdy krok modelowania jest ok. 100 razy mniejszy od okresu próbkowania sygnału w torze pomiarowym zabezpieczenia.

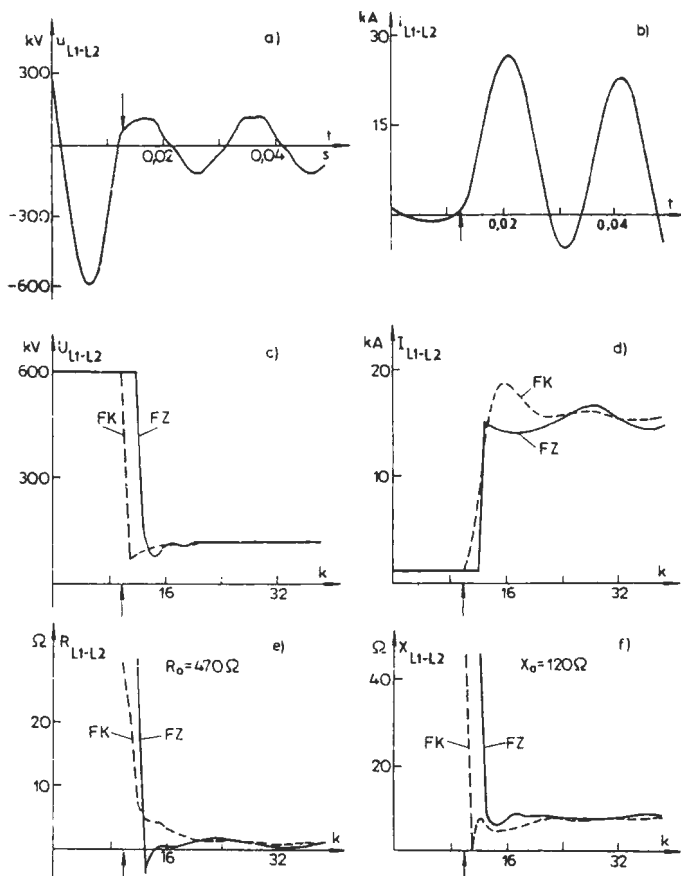
W danym przykładzie, w charakterze nadzorowanego obiektu, wybrano linię elektroenergetyczną F_1 . Mierzone są sygnały prądu i napięcia linii w węzle 2. Rozpatruje się zwarcie między fazami L_1 - L_2 w odległości 25 km od stacji 2 dla przypadków, gdy napięcie u_{L12} ma wartość maksymalną i zerową. W modelu pominięto przekładniki pomiarowe.

7.4.3. Rezultaty pomiarów

Uzyskane rezultaty modelowania posłużyły do pomiaru impedancji według estymatorów (6.8). Składowe ortogonalne były określane w filtrze Kalmana o przedstawionych parametrach oraz według algorytmu o zmiennym oknie pomiarowym (jednakowy dla prądu i napięcia). Wielkościami wejściowymi estymatorów są: prąd $i_{L12} = i_{L1} - i_{L2}$ oraz napięcie $u_{L12} = u_{L1} - u_{L2}$. Obliczenia wykonano dla przypadku bezpośredniego pomiaru tych wielkości oraz z zastosowaniem dolnoprzepustowego filtru odcinającego (filtr Butterwortha III rzędu, $f_c = 265$ Hz). Częstotliwość próbkowania $f_T = 800$ Hz ($N = 16$).

Na rysunku 7.11 pokazano wyniki pomiaru amplitudy prądu i napięcia oraz impedancji po zwarcie w momencie, gdy napięcie u_{L12} ma niewielką wartość. Występuje duża składowa aperiodyczna w przebiegu prądu oraz niewielkie zakłócenia oscylacyjne w prądzie i napięciu.

Estymaty amplitudy prądu w obu algorytmach mają podobny czas ustalania się, pomimo że wynik pomiaru w algorytmie o zmiennym oknie jest opóźniony o 2 próbki (pierwsze okno pomiarowe zawiera 3 próbki sygnału). To opóźnienie jest widoczne w wyniku pomiaru napięcia (rys. 7.11f).

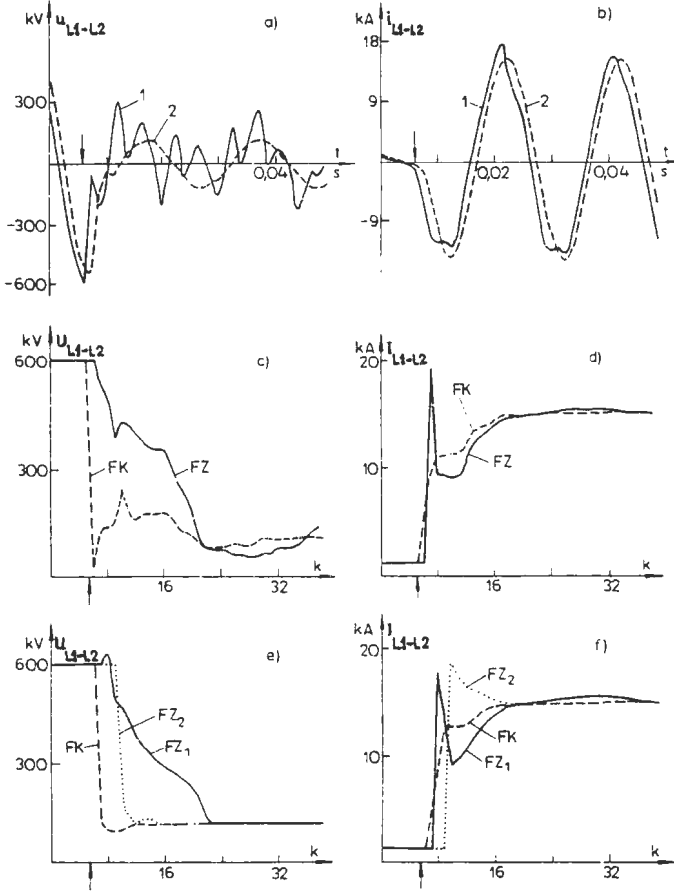


Rys. 7.11. Rezultaty pomiarów symulowanego zwarcia międzyfazowego: przebieg mierzonego napięcia (a), prądu (b), estymaty napięcia (c), estymaty prądu (d), estymaty rezystancji (e) oraz reaktancji (f); FK -filtr Kalmana, FZ - filtr o zmiennym oknie pomiarowym

Fig. 7.11. Simulation measurement results for phase-to-phase fault: voltage waveform (a), current waveform (b), voltage estimate (c), current estimate (d), resistance (e) and reactance (f) estimates; FK - Kalman filter, FZ - filter with varying data window

Rezultaty analogicznych pomiarów dla przypadku tego samego typu zwarcia, zachodzącego przy maksymalnej wartości napięcia u_{L12} , przedstawiono na rysunkach 7.12 i 7.13. Tym razem występują silne zakłócenia oscylacyjne w przebiegu napięcia oraz niewielka składowa aperiodyczna w sygnale prądu. Rzutuje to odpowiednio na proces pomiaru amplitud tych sygnałów.

W celu zbadania wpływu filtra odcinającego na wynik pomiaru, w obwodzie wejściowym został umieszczony model filtra Butterwortha III rzędu ($f_c = 265$ Hz). Można zauważyć, że filtr ten w dużym stopniu tłumi



Rys. 7.12. Rezultaty pomiarów symulowanego zwarcia międzyfazowego: przebieg mierzonych napięcia (a), prądu (b) (linie kreskowane - pomiar poprzez filtr odcinający), estymaty napięcia (c, e) oraz prądu (d, f); e, f - sygnał wejściowy filtrowany; FK - filtr Kalmana, FZ_1 - filtr o zmiennym oknie pomiarowym; FZ_2 - jak FZ_1 ale z opóźnieniem o jedną próbkę

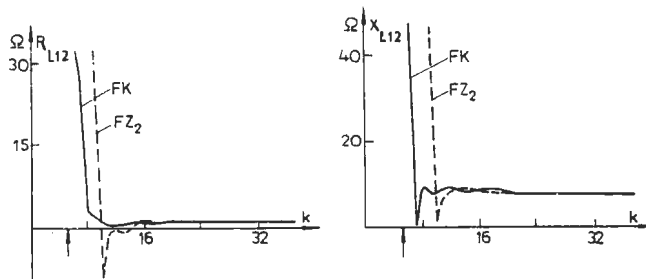
Fig. 7.12. Simulation measurement results for phase-to-phase fault: voltage waveform (a), current waveform (b) (dotted line - analog pre-filtering included), voltage (c, e) and current estimates (d, f); cases e, f - analog prefiltering of the input signals applied; FK - Kalman filter, FZ - filter with varying data window (FZ_1) and with a one-sample delay (FZ_2)

składowe zakłócające (linia przerywana na rys. 7.12 a,b) i poprawia warunki estymacji, zwłaszcza dla algorytmu o zmiennym oknie pomiarowym. Należy się przy tym liczyć z opóźnieniem wnoszonym przez ten filtr (w tym przypadku przekracza ono nieznacznie jeden okres próbkowania).

Zaobserwowano również dużą czułość algorytmu o zmiennym oknie

miarowym na moment rozpoczęcia pomiarów. Zbyt wczesne uruchomienie pomiarów po zwarciu powoduje, że filtr napełnia się danymi o małej wiarygodności informacji o nowym stanie systemu i następnie długo pozostaje pod ich wpływem (rys. 7.12e, krzywa FZ_1).

Wyniki pomiarów impedancji dla przypadku zastosowania filtra odcinającego pokazano na rys. 7.13.



Rys. 7.13. Rezultaty pomiarów rezystancji (a) i reaktancji (b) dla przypadku z rys. 7.12; pomiar z zastosowaniem filtra odcinającego
Fig. 7.13. Resistance (a) and reactance (b) measurement results for the case shown in Fig.7.12; analog prefiltering applied

Należy zauważyć, że pominięcie przekładników pomiarowych w modelu systemu może prowadzić do nieznacznego zaniżenia błędów pomiaru rozpatrywanych wielkości [59]. Nie wpływa to jednak istotnie na ocenę właściwości samych algorytmów.

Na podstawie analizy omówionego przykładu można sformułować następujące wnioski:

1. Oba przedstawione estymatory: o zmiennym oknie pomiarowym i Kalmana, wykazują dobrą dynamikę pomiaru. Wynik można uznać za wiarygodny po czasie równym ok. połowy okresu podstawowej harmonicznej.

2. Badania symulacyjne potwierdzają wcześniejsze spostrzeżenia, że rozpatrywane algorytmy są mało czułe na występowanie zakłócającej składowej aperiodycznej. Istotny wpływ mają natomiast zakłócenia oscylacyjne o dużej częstotliwości. Można je tłumić analogowym filtrem odcinającym, licząc się z odpowiednim wzrostem czasu pomiaru. W przypadku filtrów Kalmana zakłócenia te mogą być uwzględnione na etapie ich projektowania.

3. Filtr o zmiennym oknie pomiarowym ma nieco gorszą dynamikę (większe opóźnienie) w stosunku do filtra Kalmana.

8. SKUTKI PRÓBKOWANIA I KWANTOWANIA SYGNAŁU W ZABEZPIECZENIACH CYFROWYCH

8.1. Wprowadzenie

Projektowanie układów cyfrowego przetwarzania sygnałów obejmuje, oprócz syntezy algorytmu, również analizę warunków jego implementacji w konkretnym środowisku sprzętowym. W trakcie syntezy zakłada się zazwyczaj, że obliczenia są prowadzone dokładnie, a wejściowy sygnał ciągły jest przetwarzany na postać cyfrową bez uwzględnienia kwantowania amplitudy. Realizacja algorytmu w układzie cyfrowym zmienia te założenia. Określona rozdzielczość przetwornika A/C oraz ograniczona długość słowa maszynowego może niekiedy prowadzić do istotnej zmiany właściwości projektowanego układu. Związane są z tym następujące problemy, które należy rozstrzygnąć na etapie projektowania algorytmów:

1. Mierzone przez zabezpieczenia sygnały prądu i napięcia charakteryzują się dużymi zmianami wartości chwilowych, które w przypadku prądu mogą przekroczyć krotność 80. Zapewnienie określonej dokładności pomiaru wielkości kryterialnej w różnych stanach pracy systemu jest związane z graniczną dokładnością przetwarzania A/C.

2. Ważnym parametrem układów cyfrowego przetwarzania sygnałów jest częstotliwość próbkowania f_T . Graniczne wartości tej wielkości są narzucone z jednej strony przez właściwości obserwowanego procesu (górną częstotliwość zakłóceń lub sygnału użytecznego) i wymagania odnośnie do dokładności oraz szybkości reakcji zabezpieczenia, a z drugiej - przez rozsądne określenie kosztów urządzenia.

3. Dokładność operacji arytmetycznych w układzie komputerowym jest związana z długością rejestrów procesora. Błędy wynikające z zaokrąglenia (ucięcia) wyniku operacji objawiają się w postaci szumów, które rzutują na dokładność całego pomiaru, a niekiedy mogą prowadzić do niestabilności algorytmu.

4. W złożonym algorytmie, przy dużej dynamice sygnałów wejściowych, może wystąpić przepełnienie arytmetyczne, które objawia się w postaci rezultatu, znacznie odbiegającego od wartości oczekiwanej (nie-liniowość). Analiza algorytmu oraz systemu komputerowego powinna zidentyfikować węzły narażone na tego typu błędy i określić odpowiednie środki zaradcze.

Sposób analizy omawianych błędów zależy od przyjętego systemu kodowania liczb i związanych z tym operacji arytmetycznych. W większości rozpatrywanych układów jest stosowany stałopozycyjny system zapisu liczb i on będzie przyjęty w dalszych rozważaniach.

Wyszczególnione źródła błędów wynikają z charakterystyk użytego sprzętu lub związanego z nim tzw. oprogramowania systemowego. Ze względu na swoją uniwersalność, zagadnienia te są dość dobrze rozpoznane,

zwłaszcza w odniesieniu do stacjonarnych filtrów liniowych [57], [166]. Przedstawiona analiza ma na celu zbadanie związków między parametrami systemu mikroprocesorowego i charakterystykami algorytmów pomiarowych zabezpieczeń. W szczególności, pominięto podstawy analizy błędów związanych z próbkowaniem i kwantowaniem sygnałów, którymi zajmuje się teoria sygnałów [133], [165]. Przedstawiono jedynie te problemy, które są specyficzne dla zabezpieczeń cyfrowych.

8.2. Błędy związane z ograniczoną długością rejestrów procesora i przetwornika A/C

8.2.1. Określenie parametrów obwodu wejść analogowych

Podstawowymi parametrami projektowymi obwodu wejść analogowych członów pomiarowych zabezpieczeń są:

- częstotliwość próbkowania f_T ,
- częstotliwość odcięcia filtru analogowego f_C ,
- długość rejestru przetwornika A/C - s_x .

Wielkości te, wraz z charakterystykami częstotliwościowymi sygnału, decydują o możliwości uzyskania określonej dokładności pomiaru wielkości kryterialnych zabezpieczeń.

Częstotliwość próbkowania jest powiązana z częstotliwością graniczną f_g sygnału analogowego znanym twierdzeniem o próbkowaniu [95]:

$$f_T \geq 2 f_g \quad (8.1)$$

Po spełnieniu warunku (8.1) ściśle dolnopasmowy przebieg o częstotliwości granicznej f_g może być całkowicie określony przez próbki pobierane z częstotliwością f_T . Realnie obserwowane sygnały nie są jednak ściśle dolnopasmowe. W tej sytuacji ciąg próbek nie może całkowicie odtworzyć informacji o dostatecznie szybkich zmianach sygnału. Ze względu na okresowe widmo sygnału dyskretnego i asymptotyczne opadanie widma sygnału ciągłego powstaje błąd próbkowania, ujawniający się w postaci niezgodności przebiegu ciągłego $x(t)$ i odtworzonego sygnału dyskretnego $x^*(t)$:

$$e_T(kT) = x(kT) - x^*(kT) \quad , \quad (8.2)$$

w którym pomija się skalę i opóźnienie sygnału odtworzonego [165].

Błąd od składowych sygnału ciągłego, wynikający z nakładania się sąsiednich pasm widma, nie może być usunięty metodami cyfrowymi (po operacji próbkowania). Sytuację tę poprawia zastosowanie analogowego dolno-przepustowego filtru odcinającego przed układem próbkującym (rys. 2.2), który ogranicza pasmo sygnału do wielkości wynikającej z przyjętego

modelu procesu. Można tu korzystać z praktycznych wskazań, według których omawiane wielkości pozostają w następującym związku [164]:

$$f_c \leq \frac{1}{3} (f_T - f_p) , \quad (8.3)$$

gdzie: f_p - górna częstotliwość modelu obserwowanego sygnału.

Zastosowanie filtra analogowego wprowadza opóźnienie w torze przetwarzania sygnału, które można oszacować według następującej zależności [57]:

$$\Delta t = \frac{1}{2 f_c} \quad (8.4)$$

Na podstawie tych uwag można zauważyć, że błąd próbkowania zwiększa się wraz ze zmniejszeniem się różnicy $f_T - 2 f_p$ (lub $(f_T - 2 f_c)$ - przy stosowaniu filtra analogowego). W praktyce, częstotliwość próbkowania jest ustalana w drodze kompromisu między wymaganiami technologicznymi i ceną układu pomiarowego. W przypadku współcześnie realizowanych zabezpieczeń cyfrowych, częstotliwość próbkowania odpowiada 12 - 16 - 20 próbkom w okresie podstawowej harmonicznej sygnału. Wybór tej czy innej wartości z podanego zakresu jest dokonywany na podstawie symulacyjnego badania charakterystyk konkretnych algorytmów pomiarowych.

Przy analizie wpływu częstotliwości próbkowania na dokładność pomiaru należy odróżnić omówione błędy próbkowania od błędów estymacji poszczególnych wielkości kryterialnych zabezpieczeń, które mogą zależeć od okresu i fazy próbkowania. Zależność ta występuje w tzw. skalarnych algorytmach pomiarowych (bez określania składowych ortogonalnych sygnału). Błędy tych algorytmów są analizowane w p. 6.3.

Podstawowym parametrem przetwornika A/C, rzutuującym na jego dokładność, jest poziom kwantowania q_x , określony przez różnicę wartości sygnału między dwoma sąsiednimi poziomami dyskretnymi. Przy równomiernym kwantowaniu otrzymamy:

$$q_x = \frac{X_{max} - X_{min}}{M} , \quad (8.5)$$

gdzie: X_{max} , X_{min} - maksymalna i minimalna wartość sygnału wejściowego danego przetwornika,

M - liczba poziomów kwantowania.

Do zakodowania M poziomów potrzeba s_x bitów rejestru przetwornika, przy czym:

$$M = 2^{s_x} \quad (8.6)$$

Kwantowanie jest związane z błędem określonym przez różnicę między prawdziwą i skwantowaną wartością sygnału:

$$e_q = x - x_q \quad (8.7)$$

Liczba poziomów kwantowania, a zatem i długość słowa przetwornika A/C może być określona na podstawie probabilistycznego lub deterministycznego modelu błędu kwantowania e_q .

W probabilistycznym modelu, w odniesieniu do błędu e_q , czyni się następujące założenia [95]:

- e_q jest szumem generowanym jako stochastyczny proces stacjonarny,
- e_q nie jest skorelowany z sygnałem x_q ,
- próbki e_q nie są skorelowane wzajemnie,
- rozkład prawdopodobieństwa błędu jest równomierny w całym zakresie kwantowania.

Na podstawie tych założeń można określić główne charakterystyki tego procesu. W szczególności, średnia moc szumu (wariancja) jest określona zależnością [166]:

$$\sigma_x^2 = \frac{q_x^2}{12} \quad (8.8)$$

Użyteczną miarą jest średni kwadrat względnego błędu kwantowania δ_q odniesiony do średniego kwadratu zmiennej kwantowanej (mocy sygnału kwantowanego) P_x :

$$\delta_q^2 = \frac{\sigma_x^2}{P_x} = \frac{q_x^2}{12 P_x} \quad (8.9)$$

Widać z tego, że względny poziom błędu kwantowania wzrasta przy opadaniu poziomu dyskretyzowanego sygnału. Odwrotność tego parametru jest często przedstawiana w postaci logarytmicznej:

$$10 \lg[\delta_q^2]^{-1} = 10 \lg P_x - 10 \lg \sigma_x^2 \quad [\text{dB}] \quad (8.10)$$

Wielkość $[\delta_q^2]^{-1}$ wyrażona w [dB] określa odstęp mocy sygnału od mocy szumu kwantowania i może być parametrem wyjściowym do obliczenia poszukiwanej liczby poziomów kwantowania.

Założmy, że mierzony jest sygnał harmoniczny o zakresie dynamicznych zmian D :

$$D = \frac{X_{Dmax}}{X_{Dmin}}, \quad (8.11)$$

gdzie: X_{Dmax} , X_{Dmin} - maksymalna i minimalna amplituda mierzonego sygnału.

Zakładając równomierne próbkowanie, na podstawie zależności (8.5), (8.6), otrzymamy:

$$Mq_x = 2 X_{Dmax} = q_x 2^{s_x} \quad (8.12)$$

Moc kwantowanego sygnału o minimalnej amplitudzie jest określona zależnością:

$$P_{xDmin} = \frac{X_{Dmin}^2}{2} \quad (8.13)$$

Na podstawie równań (8.11)-(8.13), przy założonym odstępnie mocy sygnału od mocy szumu kwantowania (lub maksymalnym względnym błędzie kwantowania δ_{qm}), można określić liczbę bitów rejestru przetwornika A/C:

$$s_x = \text{INT} \left(\log_2 \frac{2 D}{\sqrt{6} \delta_{qm}} \right) \quad (8.14)$$

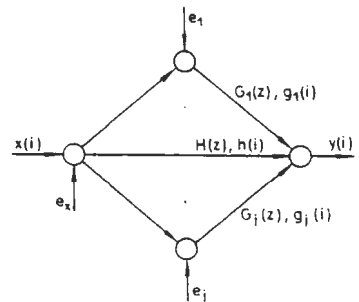
Na przykład, w torze pomiaru prądu można się spodziewać zakresu dynamicznych zmian $D = 80$ [164]. Jeśli jednocześnie założyć, że prąd znamionowy powinien być mierzony z dokładnością nie mniejszą niż $\delta_{qm} = 1\%$, to na podstawie równania (8.14) otrzymamy:

$$s_x = \text{INT} \left(\log_2 \frac{2 \cdot 80}{\sqrt{6} \cdot 0.01} \right) = 13 \quad (8.15)$$

Podobny wywód można przeprowadzić w odniesieniu do modelu deterministycznego. W tym przypadku błąd jest charakteryzowany maksymalną wartością, a nie wariancją. Prowadzi to zazwyczaj do nieco mniejszego oszacowania wielkości s_x [164].

8.2.2. Charakterystyki szumów w algorytmach zabezpieczeń cyfrowych

Zakładając probabilistyczny model błędów wynikających ze skończonej długości rejestrów procesora i przetwornika A/C, wygodnie jest posługiwać się pojęciem szumu do określenia procesu generacji tego błędu. W celu określenia szumowych charakterystyk (przede wszystkim wariancji szumu) filtru cyfrowego o dowolnej strukturze, przyjmuje się uogólniony model filtru, w którym źródła szumów wynikających z zaokrąglenia operacji arytmetycznych są umieszczone na wejściach węzłów sumacyjnych (rys. 8.1). Ich skutek na wyjściu filtru można ocenić przez poszczególne transmitancje $H(z)$, $G_1(z)$, ..., $G_j(z)$ między źródłami szumów i wyjściem filtru. Należy przy tym zauważyć, że poziom



Rys. 8.1. Schemat filtru do analizy właściwości szumowych Fig. 8.1. Signal flow graph of the filter used in noise characteristic analysis

kwantowania sygnału wejściowego jest zazwyczaj różny od poziomów kwantowania, związanych z zaokrągleniem operacji arytmetycznych, które są jednakowe we wszystkich węzłach q_j . Gałęzie grafu reprezentujące opóźnienia z^{-1} nie są oczywiście źródłami szumów.

Jeśli ograniczyć rozważania do filtrów liniowych, to na podstawie grafu z rys. 8.1 można napisać następujące charakterystyki szumowe filtru [162]:

- wariancja szumu na wyjściu j -tego sumatora:

$$\sigma_j^2 = \sum_k \sigma_{jk}^2 = r_j \frac{q_j^2}{12}, \quad (8.16)$$

gdzie: r_j - liczba gałęzi ze współczynnikami, dochodzących do j -tego sumatora (zakłada się, że zaokrąglenie operacji mnożenia odbywa się przed sumatorem; przeciwnie: $r_j = 1$);

- wariancja składowej szumu na wyjściu filtru od szumu kwantowania sygnału wejściowego:

$$\sigma_{xy}^2 = \sigma_x^2 \sum_{i=0}^{\infty} h^2(i), \quad (8.17)$$

gdzie: $h(i)$ - współczynniki charakterystyki impulsowej filtru;

- wariancja wyjściowego szumu kwantowania od wszystkich źródeł:

$$\sigma_y^2 = \sigma_{xy}^2 + \frac{q^2}{12} \sum_j r_j \sum_{i=0}^{\infty} g_j^2(i), \quad (8.18)$$

gdzie: q - poziom kwantowania w rejestrach procesora.

Równania powyższe wynikają z dobrze znanych zależności między mocą szumu na wejściu i wyjściu filtru (dla przypadku ciągłego związek ten jest określony równaniem (4.10)). Współczynniki charakterystyki impulsowej $h(i)$, $g_j(i)$ w równaniach (8.17), (8.18) powinny uwzględniać skalowanie filtru, które ma na celu niedopuszczenie do pojawienia się nadmiaru w operacjach arytmetycznych.

Omawiane charakterystyki filtrów można bez trudu analizować metodami komputerowymi. Granice sumowania w praktycznych obliczeniach są oczywiście skończone. W filtrach nierekursywnych charakterystyka impulsowa ma zerowe wartości poza oknem pomiarowym. W przypadku filtrów rekursywnych granica sumowania może być określona minimalną wartością kolejnych wyrazów charakterystyki impulsowej. W analizowanych dalej programach przyjęto graniczną wartość składnika sumy równą 10^{-10} . Kompleksowe programy komputerowej analizy filtrów są również wyposażone w procedury ich skalowania [162].

Algorytmy pomiarowe zawierają również procedury nieliniowe. Ogólna analiza występowania przepełnienia arytmetycznego jest w tym przypadku szczególnie trudna (zwłaszcza w operacjach dzielenia). Niezbędna jest wówczas programowa kontrola możliwości występowania przepełnienia i odpowiednia jego obsługa.

8.2.3. Analiza wrażliwości numerycznych procedur pomiarowych

Analizę wrażliwości filtru cyfrowego przeprowadza się w celu stwierdzenia wpływu zmiany wartości poszczególnych jego współczynników na charakterystyki częstotliwościowe. Zmiana wartości współczynników w stosunku do danych projektowych zachodzi z chwilą implementacji algorytmu w strukturze sprzętowej o innej długości słowa maszynowego niż zakładano w projekcie. Wyeliminowanie dużej wrażliwości filtru (lub niektórych jego węzłów) może być dokonane przez zmianę struktury algorytmu. Taka analiza może być również elementem oceny różnych algorytmów filtracyjnych.

Wrażliwość filtru o transmitancji $H(j\omega)$ na zmianę wartości współczynnika b_1 jest określona zależnością [162]:

$$\underline{S}_{b_1} = \frac{d H(j\omega)}{d b_1} \frac{b_1}{H(j\omega)} \quad (8.19)$$

Jest to zatem funkcja zespolona przedstawiająca względną wrażliwość charakterystyki częstotliwościowej amplitudy i fazy od współczynnika b_1 .

Do komputerowej analizy wrażliwości filtrów cyfrowych opracowano wiele programów, które stosują metodę opartą na twierdzeniu Tellegena [45], [162]. Nie różnią się one zasadniczo od metod stosownych w odniesieniu do układów ciągłych.

W celu praktycznego zastosowania wyników komputerowej analizy wrażliwości struktury cyfrowej, można posłużyć się zmienioną postacią równania (8.19). Jeśli różniczki zastąpić przyrostami, to otrzymamy:

$$\Delta H(j\omega) = \frac{\Delta b_1}{b_1} H(j\omega) \underline{S}_{b_1} \quad (8.20)$$

Przy znanej wartości \underline{S}_{b_1} można ocenić wielkość zmiany charakterystyki częstotliwościowej (amplitudy lub fazy) dla określonego błędu współczynnika b_1 . Zależność ta jest również funkcją częstotliwości.

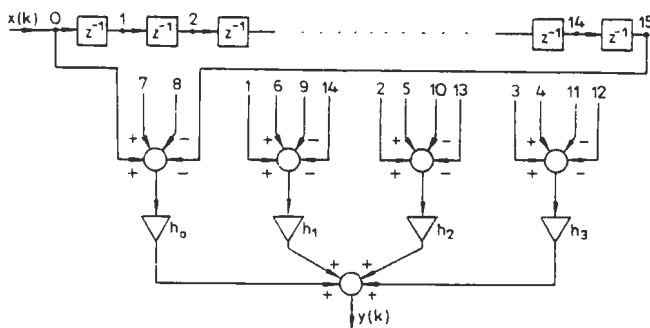
Należy zauważyć, że analiza wrażliwości może służyć do oceny różnych struktur tego samego filtru. Korzysta się przy tym z powiązania między wrażliwością i sumarycznymi błędami od zaokrągleń operacji arytmetycznych: struktura o mniejszej wrażliwości sumarycznej charakteryzuje się mniejszym wzmocnieniem szumów [57].

8.3. Badanie charakterystyk podstawowych algorytmów

Badanie charakterystyk algorytmów zabezpieczeń cyfrowych, związanych z realizacją w konkretnym układzie mikroprocesorowym, ma na celu określenie parametrów tego układu. Jeśli parametry obwodu wejściowego zostaną określone zgodnie z p. 8.2.1, to pozostaje do wyboru długość słowa rejestrów procesora, wyrażona liczbą bitów s . Wielkość tę można oszacować przez badanie udziału błędu związanego z kwantowaniem współczynników filtra, w ogólnym błędzie kwantowania.

Rozpatrzmy dwa typowe dla zabezpieczeń algorytmy filtracyjne: estymator amplitudy, oparty na pełnookresowym algorytmie Fouriera, oraz tenże estymator z zastosowaniem obserwatora stanu. W obu przypadkach liczba próbek w okresie podstawowej harmonicznej $N = 16$.

Struktura filtra do estymacji ortogonalnej składowej (kwadraturowej) sygnału według pełnookresowego algorytmu Fouriera jest pokazana na rys. 8.2. Ze względu na symetrię charakterystyki impulsowej liczbę współczynników można ograniczyć do 4 ($h_0 - h_3$). Jeśli przyjąć, że rezultaty mnożenia przez te współczynniki są zaokrąglane przed ich sumowaniem, to wystąpią cztery źródła szumu kwantowania (nie licząc kwantowania sygnału wejściowego). Podobną strukturę ma filtr składowej synfazowej.



Rys. 8.2. Struktura filtra nierekursywnego realizującego pełnookresowy algorytm Fouriera ($N=16$)

Fig. 8.2. Discrete-time representation of a full-wave Fourier algorithm ($N=16$)

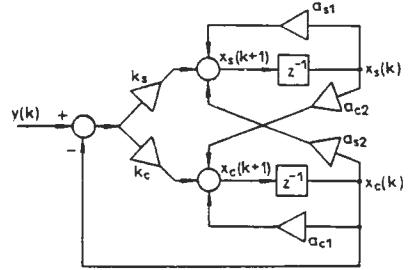
Obserwator stanu II rzędu ma strukturę jak na rys. 8.3. Odpowiada mu następujące równanie:

$$\begin{bmatrix} x_S(k+1) \\ x_C(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{S1} & a_{S2} \\ a_{C1} & a_{C2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_S(k) \\ x_C(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_S \\ k_C \end{bmatrix} \left(y(k) - \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_S(k) \\ x_C(k) \end{bmatrix} \right) \quad (8.21)$$

W tym przypadku do obliczenia każdej składowej należy wykonać 3 mnożenia przez współczynniki. Struktura filtra ulega odpowiedniemu powieleniu w miarę wzrostu liczby stanów obserwatora.

Do oceny wymaganej długości słowa s procesora przyjęto, że do kwantowania sygnału wejściowego używa się 12 bitów. Udział mocy szumów generowanych w związku z zaokrągleniem wyników operacji arytmetycznych do ogólnej mocy szumów kwantowania, w estymatorze amplitudy zbudowanym na podstawie powyższych filtrów przedstawiono w tabeli 8.1.

Widać, że rozpatrywany udział szumów gwałtownie maleje wraz ze wzrostem długości słowa procesora. Stosunek ten można jeszcze poprawić, gdy zaokrąglenie będzie wykonywane po zsumowaniu wyników mnożenia.



Rys. 8.3. Struktura obserwatora stanu II rzędu
Fig. 8.3. Discrete-time representation of a 2nd order state observer

T a b e l a 8.1

Udział mocy szumów kwantowania w procesorze do ogólnej
mocy szumów kwantowania

s_x	s	σ^2/σ_y^2		
		Algorytm Fouriera	Obserwator stanu	
			II rząd	IX rząd
12	12	0,67	0,97	0,99
	16	$3,9 \cdot 10^{-3}$	0,047	0,43
	24	$6,2 \cdot 10^{-8}$	$1,8 \cdot 10^{-7}$	$2,4 \cdot 10^{-5}$

Bardziej ogólną ocenę błędów kwantowania można uzyskać, analizując wpływ zaokrąglenia wyników operacji arytmetycznych na charakterystykę częstotliwościową algorytmu. W przypadku filtra nierekursywnego, pierwszego z rozpatrywanych, ten wpływ jest znikomy. Dla 8-bitowego słowa odchyłka charakterystyki amplitudowej nie przekracza 0,5%.

Filtry rekursywne wykazują zazwyczaj większą wrażliwość na zmiany wartości współczynników. Zależność ta zwiększa się wraz ze wzrostem rzędu filtra. W tym jednak przypadku dla obserwatora stanu IX rzędu, przy 8-bitowym słowie maszynowym, odchyłka charakterystyki amplitudowej nie przekracza 1%.

Analizę tę potwierdza również badanie wrażliwości. Wrażliwość amplitudowej charakterystyki obserwatora stanu z rys. 8.3 na zmianę jego współczynników dla częstotliwości $f = 50$ Hz pokazano na rys. 8.4. Maksymalna wartość wynosi 1,1 i jest związana ze współczynnikami a_{s1} oraz a_{c1} . Na podstawie równania (8.20) można obliczyć, że przy 8-bitowym kodowaniu współczynników filtra maksymalna odchyłka charakterystyki

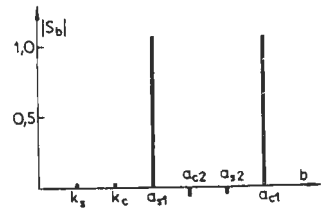
amplitudowej wynosi 0,4%. Wielkości te są znacznie mniejsze od błędów estymacji wywołanych zakłóceniami pomiarowymi.

Na podstawie powyższej analizy można sformułować następujące wnioski:

1. Przy kwantowaniu wielkości mierzonych przez zabezpieczenie cyfrowe, zgodnie z 12-bitowym rejestrem przetwornika A/C, długość słowa maszynowego może być ustalona na poziomie 16 bitów. Powstające wówczas błędy od zaokrągleń w typowych algorytmach pomiarowych są znacznie mniejsze od błędów wnoszonych przez zakłócenie pomiarowe.

2. Stosunkowo mała wrażliwość charakterystyki częstotliwościowej procedur stosowanych w zabezpieczeniach cyfrowych jest związana ze stosowaniem niezbyt złożonych algorytmów (filtry niskiego rzędu).

Stosowanie mikroprocesorów z dłuższym niż 16 bitów słowem maszynowym może być uwarunkowane względami technicznymi. Nowoczesne systemy mikroprocesorowe, o dużej częstotliwości taktowania, z wyspecjalizowanymi układami realizującymi operacje arytmetyki zmiennopozycyjnej mają najczęściej 32-bitowe rejestry operacyjne. Problem błędów kwantowania w omawianym zastosowaniu jest w tym przypadku do pominięcia.



Rys. 8.4. Wrażliwość charakterystyki amplitudowej obserwatora stanu II rzędu na zmiany wartości współczynników

Fig. 8.4. Sensitivity of frequency response of a 2nd order state observer to its coefficients variation

9. WNIOSKI

1. Uzyskanie właściwych parametrów technicznych układów zabezpieczeń jest jednym z podstawowych warunków niezawodnej pracy systemów elektroenergetycznych. Główne charakterystyki zabezpieczeń: czułość, selektywność i szybkość działania, zależą przede wszystkim od dokładności i szybkości pomiaru wielkości kryterialnych. Pomiar wykonywany przez zabezpieczenie odbywa się w warunkach dużych zakłóceń. Wzrastające wymagania stawiane zabezpieczeniom zmuszają do poszukiwania procedur pomiarowych, które eliminują wpływ zakłóceń na dokładność oceny obserwowanych parametrów systemu przy minimalnym czasie pomiaru. Cyfrowe metody pomiaru oferują nowe sposoby identyfikacji tych parametrów.

2. W niniejszej pracy pomiar rozpatruje się jako proces oceny wartości parametrów modelu sygnałowego przy zakłóceniach. Analizowane w pracy podstawowe algorytmy są oparte na dwóch rodzinach modeli sygnałowych: modelu regresji o równoległej (blokowej) strukturze przetwarzania oraz modelu zmiennych stanu o strukturze przetwarzania szere-

gowego. Zakłada się przy tym, że zasadnicza informacja o stanie nadzorowanego systemu jest zawarta w składowej wymuszającej prądu i napięcia lub w związanych z nią składowych harmonicznych. Zakłócenia są przedstawiane według modelu deterministycznego lub stochastycznego.

3. Przyjęto jednolity sposób zapisu algorytmów estymacji, charakterystyczny dla współczesnych metod cyfrowego przetwarzania sygnałów. Zarówno modele sygnałowe, jak i algorytmy identyfikacji parametrów tych modeli są przedstawiane w postaci równań macierzowych. Pozwoliło to znaleźć wspólne źródła bardzo obszernej klasy algorytmów stosowanych w członach pomiarowych zabezpieczeń cyfrowych, dostarczając jednocześnie spójnego aparatu ich syntezy i analizy.

4. Podstawowe algorytmy estymacji parametrów modeli sygnałowych opierają się na metodzie najmniejszych kwadratów (MNK). W zależności od przyjętego modelu sygnałowego stosuje się nierekursywny (model regresji) lub rekursywny (model zmiennych stanu) algorytm MNK. W ostatnim przypadku, przyjęcie deterministycznego modelu zakłóceń prowadzi do estymatora w postaci obserwatora stanu, a przy stochastycznym modelu zakłóceń właściwym estymatorem jest filtr Kalmana. Rozbudowa modelu jest równoważna przesunięciu określonej składowej sygnału z modelu zakłóceń do modelu sygnałowego (modelu procesu). Taka operacja jest związana z koniecznością pomiaru tej składowej lub wynika z uwydatnienia się jej charakteru w obserwowanym procesie. W modelu probabilistycznym jest to uzasadnione potrzebą dostosowania obserwowanego procesu zakłóceń do przyjętego sposobu ich opisu.

5. Dla modelu o strukturze równoległej (model regresji) zaproponowano ogólne podejście do syntezy nierekursywnych estymatorów, opartych na metodzie najmniejszych kwadratów. Algorytm estymacji jest określony przez bazowy model sygnałowy oraz model jego realizacji (sposób odwzorowania). Ogólne sformułowanie zależności między tymi modelami umożliwia syntezę zarówno algorytmów filtracyjnych, jak i korelacyjnych. Jego ważną cechą jest możliwość oceny błędów różnych estymatorów przez porównanie ich wariancji. Pokazano, że wiele różnorodnych algorytmów pomiaru składowych ortogonalnych sygnału można przedstawić w postaci równania nierekursywnego estymatora MNK. Modyfikacje tych algorytmów prowadzą do zmiany macierzy współczynników wagowych w podstawowym równaniu estymatora.

6. Na przykładzie estymatora trzystanowego, z modelem addytywnego zakłócenia w postaci składowej aperiodycznej, zaproponowano sposób oddzielnej estymacji poszczególnych składowych użytecznych sygnału i zakłócenia. Pokazano, że na tej podstawie można w określonych warunkach zbudować rekursywny algorytm eliminacji składowej aperiodycznej o znanej stałej czasowej. Na podstawie tej metody zbudowano efektywny

pełnookresowy algorytm filtracji składowej aperiodycznej również przy nieznanym parametrach, który ma strukturę filtru adaptacyjnego.

7. Rozpatrywane w algorytmach zabezpieczeń cyfrowych modele sygnałowe, niezależnie od ich struktury (szeregowej czy równoległej), opierają się na fazorowej reprezentacji sygnału. Oznacza to, że identyfikacji podlegają składowe ortogonalne sygnały. Korzystając z podobieństwa w tym zakresie struktury szeregowej i równoległej modeli sygnałowych, zaproponowano algorytm syntezy pary filtrów nierekursywnych przez przekształcenie estymatora rekursywnego, opartego na modelu stanowym.

8. Para estymatorów składowych ortogonalnych sygnału harmonicznego tworzy filtr sygnału zespolonego (fazora). Sygnały wyjściowe tego filtru są podstawą do obliczenia wielkości kryterialnych w większości algorytmów zabezpieczeń cyfrowych. W ogólnym przypadku, filtr sygnału zespolonego (filtr zespolony) może być utworzony z dwóch przetworników sygnałów, których fazowe charakterystyki dla częstotliwości identyfikowanego przebiegu są różne. Przetworniki te można zrealizować na wiele sposobów. W pracy podano zasady syntezy i analizy takiego filtru. Bliżej omówiono metody stosujące filtrację, korelację, różniczkowanie i przesuwanie sygnałów. Pokazano, że minimalny błąd estymacji fazora jest wówczas, gdy charakterystyki fazowe filtrów składowych różnią się o $\pi/2$. Pokazano, że parametry filtru zespolonego mogą być zastosowane do opisu częstotliwościowych charakterystyk estymatorów wielkości kryterialnych.

9. Duża grupa procedur estymacji impedancji wywodzi się z różniczkowego równania obwodu zwarciovego. W realizacji tych procedur mają zastosowanie metody cyfrowej aproksymacji pochodnej oraz wartości chwilowej sygnału. W pracy przedstawiono ogólny algorytm syntezy takich metod, które są dostosowane do przyjętej koncepcji reprezentacji mierzono-ego sygnału użytecznego i harmonicznych składowych zakłócających. Umożliwia to dostosowanie cyfrowej aproksymacji pochodnej do spodziewanych w sygnale składowych zakłócających.

10. W pracy rozpatruje się dwie grupy błędów estymacji wielkości kryterialnych: błędy stanu ustalonego i stanu przejściowego algorytmów. Podział ten jest w dużej mierze odbiciem założonego charakteru modelu zakłóceń: stacjonarnego bądź niestacjonarnego, oraz struktury estymatora: o przetwarzaniu równoległym (stałe okno pomiarowe) lub szeregowym (algorytm rekursywny). Charakterystyki te mogą służyć do oceny wybranych cech poszczególnych algorytmów.

11. Podstawą analizy błędów ustalonych jest charakterystyka częstotliwościowa estymatora. W tej grupie szczególnie istotne są błędy związane ze zmianą podstawowej częstotliwości sygnału, błędy wynikające ze zmiany fazy sygnału oraz błędy związane z obecnością zakłócających składowych: oscylacyjnych i aperiodycznej. Analizę tych błędów można

prowadzić na podstawie charakterystyk filtrów zespolonych.

12. Błędy dynamiczne są związane ze stanem przejściowym estymatorów o stałym oknie pomiarowym lub wynikają z niezgodności modelu sygnałowego z mierzonym sygnałem rzeczywistym - w estymatorach rekursywnych. Pokazano, że właściwymi metodami korekcji błędów dynamicznych w pierwszym przypadku jest stosowanie algorytmów adaptacyjnych lub o zmiennym oknie pomiarowym. W ogólnym przypadku, najlepsze rezultaty można uzyskać, stosując do estymacji składowych ortogonalnych filtr Kalmana. Wymagana jest jednak wiarygodna znajomość probabilistycznych charakterystyk modelu procesu generacji sygnału i zakłóceń pomiarowych. Filtr Kalmana, stosowany do estymacji składowych ortogonalnych sygnału, może być rozpatrywany jako układ z pamięcią o zmiennych parametrach. Dzięki tej pamięci, jego stan początkowy po zakłóceniu może być ustawiony statystycznie najbliższej oczekiwanej sytuacji, wynikającej z tego zakłócenia. Daje to możliwość najszybszej identyfikacji parametrów sygnału przy minimalnej wariancji. Filtr suboptymalny, utworzony według szacunkowych danych, również może mieć zadowalające charakterystyki.

13. Częstotliwość próbkowania decyduje o wielkości błędu związanego z nakładaniem się sąsiednich pasm okresowego widma sygnału dyskretnego. Błąd ten może być znacznie zredukowany przez poprawny dobór analogowego filtra odcinającego. Należy się jednak wówczas liczyć z określonym wydłużeniem czasu pomiaru. Inne błędy wynikające z ograniczonej częstotliwości próbkowania są związane z nieuchronnym opóźnieniem reakcji układu pomiarowego, z powodu braku informacji o stanie nadzorowanego procesu między kolejnymi próbkami sygnału. Dokładność estymacji parametrów sygnału bezpośrednio zależy od częstotliwości próbkowania w tych algorytmach, które są wrażliwe na chwilową fazę przebiegu wejściowego. W cyfrowych układach pomiarowych z przetwarzaniem "na bieżąco", jakimi są zabezpieczenia cyfrowe, częstotliwość próbkowania istotnie wpływa na koszt całego urządzenia. Stosowane obecnie częstotliwości próbkowania, odpowiadające 12-20 próbkom w okresie podstawowej harmonicznej, należy uznać za uzasadniony kompromis między wymaganiami technicznymi i ekonomicznymi.

14. W porównaniu z błędami estymacji wpływ ograniczonej długości rejestrów przetwornika A/C i procesora na dokładność pomiaru wielkości kryterialnych zabezpieczeń, przy stosowanych obecnie rozwiązaniach sprzętowych, jest niewielki. Udział tych błędów staje się znikomy przy stosowaniu specjalizowanych procesorów sygnałowych o długim słowie maszynowym.

DODATEK A

Niektóre użyteczne związki trygonometryczne

W celu obliczenia sumy ciągu próbek sygnału, określonego tłumionymi wykładniczo funkcjami harmonicznymi, można rozpatrzyć sumę N wyrazów zespolonego szeregu geometrycznego:

$$\{ w_n \} = \{ e^{z_0}, e^{z_0+z}, e^{z_0+2z}, \dots \}, \quad (\text{A.1})$$

gdzie: $z_0 = \alpha_0 + j\beta_0$,

$$z = \alpha + j\beta.$$

Jest ona określona równaniem:

$$\sum_{i=0}^{N-1} e^{z_0+zi} = e^{z_0} \frac{1-e^{Nz}}{1-e^z} \quad (\text{A.2})$$

Gdy rozdzielimy rzeczywiste i urojone części równania (A.2) i dokonamy niezbędnych przekształceń, otrzymamy następujące zależności:

$$\sum_{i=0}^{N-1} e^{\alpha_0+ai} \sin(\beta_0 + \beta i) = \frac{e^{\alpha_0}}{1 + e^\alpha (e^\alpha - 2\cos\beta)} \left\{ e^\alpha \left[e^{\alpha N} \sin(\beta_0 + \beta(N-1)) - e^{\alpha(N-1)} \sin(\beta_0 + \beta N) - \sin(\beta_0 - \beta) \right] + \sin\beta_0 \right\}, \quad (\text{A.3})$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} e^{\alpha_0+ai} \cos(\beta_0 + \beta i) = \frac{e^{\alpha_0}}{1 + e^\alpha (e^\alpha - 2\cos\beta)} \left\{ e^\alpha \left[e^{\alpha N} \cos(\beta_0 + \beta(N-1)) - e^{\alpha(N-1)} \cos(\beta_0 + \beta N) - \cos(\beta_0 - \beta) \right] + \cos\beta_0 \right\} \quad (\text{A.4})$$

Inne użyteczne zależności otrzymamy, gdy przyjmiemy w powyższych równaniach $\alpha = \alpha_0 = 0$:

$$\sum_{i=0}^{N-1} \sin(\beta_0 + \beta i) = \frac{\sin\left(\frac{\beta N}{2}\right) \sin\left[\beta_0 + \frac{\beta(N-1)}{2}\right]}{\sin(\beta/2)}, \quad (\text{A.5})$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} \cos(\beta_0 + \beta i) = \frac{\sin\left(\frac{\beta N}{2}\right) \cos\left[\beta_0 + \frac{\beta(N-1)}{2}\right]}{\sin(\beta/2)} \quad (\text{A.6})$$

Po podstawieniu do lewej strony równania (A.6) znanych związków trygonometrycznych:

$$\cos x = 2 \cos^2(x/2) - 1 = 1 - 2 \sin^2(x/2),$$

otrzymamy po przekształceniach następujące zależności:

$$\sum_{i=0}^{N-1} \sin^2(\beta_0 + \beta i) = \frac{1}{2} \left[N - \frac{\sin(\beta N) \cos[2\beta_0 + \beta(N-1)]}{\sin \beta} \right], \quad (\text{A.7})$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} \cos^2(\beta_0 + \beta i) = \frac{1}{2} \left[N + \frac{\sin(\beta N) \cos[2\beta_0 + \beta(N-1)]}{\sin \beta} \right] \quad (\text{A.8})$$

DODATEK B

Synteza obserwatorów stacjonarnych

Rozpatrzmy obserwator:

$$\hat{\chi}(k+1) = (A - K C) \hat{\chi}(k) + K y(k) \quad (\text{B1})$$

jednowyjściowego systemu określonego następującym modelem sygnałowym:

$$\begin{aligned} \chi(k+1) &= A \chi(k), \\ y(k) &= C \chi(k), \end{aligned} \quad (\text{B2})$$

gdzie:

C - wierszowa macierz wyjścia ($1 \times M$).

Zadanie syntezy obserwatora (B1) polega na określeniu wektora wzmocnienia K przy zadanych wartościach własnych (biegunach) macierzy $(A - K C)$. W standardowych metodach syntezy korzysta się z transformacji równania (B1) do postaci kanonicznej, co wymaga znajomości współczynników równania charakterystycznego macierzy A lub jej wartości własnych [5], [63].

Przedstawiona metoda oparta jest na reprezentacji macierzy A w dwudiagonalnej postaci kanonicznej [5]. Ogólne zasady syntezy są podobne do wspomnianych uprzednio, jednak przedstawienie pary $[A, C]$ w dwudiagonalnej formie obserwatorowej pozwala uprościć procedurę.

Niech para $[A, C]$ będzie obserwowalna, natomiast (s_1, s_2, \dots, s_M) - zbiór wartości rzeczywistych lub zespolonych parami sprzężonych. Ciąg wektorów t_k , $k = 1, 2, \dots, M$ określony następującą formułą rekurencyjną:

$$\begin{aligned} t_1 &= C, \\ t_{k+1} &= t_k [A - s_k I], \quad k = 1, 2, \dots, M-1 \end{aligned} \quad (\text{B3})$$

generuje macierz przekształceń T :

$$T = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_M \end{bmatrix} \quad (B4)$$

Jeśli zastosować macierz T do przekształcenia (A, C) , to otrzymamy następującą formę dwudiagonalną:

$$A^* = T A T^{-1} = \begin{bmatrix} s_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ h_1 & h_2 & h_3 & \dots & s_{M^+} h_M \end{bmatrix}, \quad (B5)$$

$$C^* = C T^{-1} = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$$

W celu bezpośredniego określenia poszukiwanego wektora K , należy przedstawić parę (A^*, C^*) w dwudiagonalnej postaci obserwatorowej:

$$A_1 = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & h_1 \\ 1 & s_2 & 0 & \dots & 0 & h_2 \\ 0 & 1 & s_3 & \dots & 0 & h_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & s_{M^+} h_M \end{bmatrix}, \quad (B6)$$

$$C_1 = [0 \ \dots \ 0 \ 1]$$

Poszukiwane przekształcenie zapiszemy w następującej formie:

$$\begin{aligned} A_1 &= T_1^{-1} A^* T_1, \\ C_1 &= C^* T_1 \end{aligned} \quad (B7a)$$

Sposób określenia macierzy T_1 staje się oczywisty, gdy równania (B7a) zapisać w postaci analogicznej do (B5):

$$\begin{aligned} A^* &= T_1 A_1 T_1^{-1}, \\ C^* &= C_1 T_1^{-1} \end{aligned} \quad (B7b)$$

Do wyznaczenia macierzy T_1 można zatem stosować procedurę (B3).

Łatwo sprawdzić, że macierz T_1 ma następującą strukturę:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 1 \\ 0 & & \cdot & 0 & 1 & q_{2,M} \\ 0 & & \cdot & 1 & q_{3,M-1} & q_{3,M} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & q_{M,2} & & q_{M,M-1} & q_{M,M} & \cdot \end{bmatrix} \quad (B8)$$

Elementy macierzy T_1 można także wyznaczyć bezpośrednio bez korzystania z algorytmu (B3). Jeśli przekształcenie (B7) zapisać w postaci: $A^* T_1 = T_1 A_1$, to bez trudu można otrzymać następującą rekurencyjną procedurę obliczania wyrazów q_{ij} macierzy T_1 :

$$q_{ij} = \begin{cases} 0 & - j < M - i + 1, \\ 1 & - j = M - i + 1, \\ q_{i-1,j}(s_j - s_{i-1}) + a & - j > M - i + 1, \end{cases} \quad (B9)$$

gdzie:

$$a = \begin{cases} q_{i-1,j+1} & - j < M, \\ \sum_{k=M-i+2}^M q_{i-1,k} h_k & - j = M, \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \dots, M, \quad j = M, M-1, \dots, 1.$$

Liczbę operacji w procedurze (B.9) można dwukrotnie zmniejszyć przez wykorzystanie faktu, że macierz T_1 jest symetryczna.

Macierz transformacji systemu (B2) do postaci dwudiagonalnej obserwatorowej:

$$\begin{aligned} A_1 &= P A P^{-1}, \\ C_1 &= C P^{-1} \end{aligned} \quad (B10a)$$

jest określona następującą zależnością (na podstawie (B5) i (B7)):

$$P = T_1^{-1} T \quad (B10b)$$

Łatwo sprawdzić, że forma (B6) jest uogólnieniem znanych obserwatorowych równań kanonicznych. Gdy $s_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, M$, wówczas zachodzi następujący związek: $h_i = -a_i$, gdzie a_i , $i = 1, 2, \dots, M$ - współczynniki równania charakterystycznego $m(s)$ macierzy A :

$$m(s) = \det[sI - A] = a_M + a_{M-1}s + \dots + a_1 s^{M-1} + s^M \quad (B11)$$

Jeśli natomiast zbiór (s_1, s_2, \dots, s_M) przedstawia pierwiastki równania (B11) (tzn. wartości własne macierzy A), to wtedy $h_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, M$. Korzystając z tej własności można natychmiast obliczyć wektor wzmocnie-

nia $K_1 = \{\kappa_i\}$:

$$A_1 - K_1 C_1 = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & h_1 - \kappa_1 \\ 1 & s_2 & 0 & \dots & 0 & h_2 - \kappa_2 \\ 0 & 1 & s_3 & \dots & 0 & h_3 - \kappa_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & s_M + h_M - \kappa_M \end{bmatrix} \quad (B12)$$

Gdy s_i , $i = 1, 2, \dots, M$ - wartości własne macierzy $(A_1 - K_1 C_1)$, wówczas zachodzi następujący związek:

$$\kappa_i = h_i, \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (B13)$$

gdzie: współczynniki h_i są określone na podstawie przekształcenia (B5).

Do obliczenia współczynników prawej strony równości (B13) wystarczy obliczyć ostatni wiersz macierzy A^* :

$$a^* = t_M A T^{-1} = [h_1 \quad h_2 \quad \dots \quad h_{M-1} \quad s_M + h_M] \quad (B14)$$

Poszukiwany wektor K obserwatora (B1) jest związany z wektorem K_1 następującym przekształceniem:

$$K = P^{-1} K_1 = T^{-1} T_1 K_1 \quad (B15)$$

Przy spełnieniu przyjętych założeń wektor K jest zawsze rzeczywisty. Ostatecznie otrzymujemy następujący algorytm:

1. Dla żądanych biegunów (s_1, s_2, \dots, s_M) obserwatora (B1) określić zgodnie z (B3), (B4) macierz T , a następnie T^{-1} .

2. Zgodnie z (B14) obliczyć wektor a^* .

3. Określić wektor $K_1 = [\kappa_1 \quad \kappa_2 \quad \dots \quad \kappa_n]^T$, gdzie:

$$\kappa_i = a_i^*, \quad i=1, 2, \dots, M-1,$$

$$\kappa_M = a_M^* - s_M$$

4. Na podstawie (B8), (B9) obliczyć macierz T_1 .

5. Obliczyć wektor K :

$$K = T^{-1} T_1 K_1$$

Należy zauważyć, że do określenia wektora K nie jest potrzebna znajomość równań charakterystycznych macierzy A lub $(A - K C)$.

Przykład obliczeniowy

Model obserwowanego procesu jest określony równaniami (B2), w których:

$$A = \begin{bmatrix} \cos \nu & \sin \nu & 0 \\ -\sin \nu & \cos \nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 1 \quad 1], \quad N = 16.$$

Określić wektor wzmocnienia K obserwatora (B1) tego procesu, aby bieguny macierzy $[A - K C]$ miały następujące wartości:

$$s_{1,2} = 0,2 \pm j 0,1, \quad s_3 = 0,25.$$

W celu wyznaczenia poszukiwanego wektora K , należy wykonać kolejne kroki przedstawionego powyżej algorytmu:

1. Macierz A ma następującą wartość:

$$A = \begin{bmatrix} 0,924 & 0,383 & 0 \\ -0,383 & 0,924 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Stosując procedurę (B3), przy zadanych wartościach biegunów, uzyskamy następującą macierz T :

$$T = \begin{bmatrix} 0 + j 0 & 1,000 + j 0 & 1,000 + j 0 \\ -0,383 + j 0 & 0,724 - j 0,100 & 0,800 - j 0,100 \\ -0,554 + j 0 & 0,388 + j 0 & 0,650 + j 0 \end{bmatrix}$$

oraz macierz odwrotną:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 2,755 - j 0,451 & -4,505 + j 0 & 1,307 + j 0 \\ -3,338 + j 0,951 & 9,510 + j 0 & -6,569 + j 0 \\ 4,338 - j 0,951 & -9,510 + j 0 & 6,569 + j 0 \end{bmatrix}.$$

2. Za pomocą równania (B14) oblicza się wektor a^* , przy czym wektor t_3 jest ostatnim wierszem macierzy T :

$$a^* = [0,514 - j 0,182 \quad -1,819 + j 0 \quad 2,448 + j 0]$$

3. Wektor K_1 :

$$K_1 = [\kappa_1 \quad \kappa_2 \quad \kappa_3]^T,$$

gdzie:

$$\kappa_1 = 0,514 - j 0,182 = a_1^*$$

$$\kappa_2 = -1,819 + j 0 = a_2^*$$

$$\kappa_3 = 2,198 + j 0 = a_3^* - s_3$$

4. Macierz T_1 (B8) może być określona zgodnie z algorytmem (B9):

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 + j 0 & 0 + j 0 & 1,000 + j 0 \\ 0 + j 0 & 1,000 + j 0 & 2,248 - j 0,100 \\ 1,000 + j 0 & 2,248 - j 0,100 & 3,244 + j 0 \end{bmatrix}$$

5. Ostatecznie wektor K określa się zgodnie z (B15):

$$K = T^{-1} T_1 K_1 = \begin{bmatrix} -3,362 \\ -1,004 \\ 3,202 \end{bmatrix} .$$

LITERATURA

- [1] ALEGRIA C.M., MALIK O.P., COSTA E., Performance comparison of Fourier and Kalman filter techniques for transmission line impedance. IEE Conference Publication No. 249, Developments in Power System Protection, London 1985.
- [2] ANDERSON B.D.O., MOORE J.B., Filtracja optymalna. Warszawa, WNT, 1984.
- [3] BEAUCHAMP K., Przetwarzanie sygnałów metodami analogowymi i cyfrowymi. Warszawa, WNT, 1978.
- [4] BENDAT J.S., CORNELL C.A., Metody analizy i pomiaru sygnałów losowych. Warszawa, PWN, 1976.
- [5] BLANCHINI F., New canonical form for pole placement. IEE Proceedings, Vol. 136, Pt. D, No. 6, 1989, s. 314-316.
- [6] BOX G.E.P., JENKINS G.M., Analiza szeregów czasowych. Warszawa, PWN, 1983.
- [7] BOZIC S.M., Digital and Kalman filtering. Edward Arnold Ltd, London 1979.
- [8] BRACEWELL R., Przekształcenie Fouriera i jego zastosowania. Warszawa, WNT, 1968.
- [9] BRAMMER K., SIFFLING G., Kalman-Bucy-Filter. Deterministische Beobachtung und Stochastische Filterung. Oldenbourg, München, 1975.
- [10] BRANDT S., Metody statystyczne i obliczeniowe analizy danych. Warszawa, PWN, 1976.
- [11] BREINGAN M.D., CHEN M.M., GALLEN T.F., The laboratory investigation of a digital system for the protection of transmission lines. IEEE Trans. PAS-98, 1979, No. 2, s. 320-368.
- [12] BROOKS A.W., Distance relaying using least-squares estimates of voltage, current and impedance. Proceedings of the IEEE PICA Conference, IEEE Pub. No 77 CH 1131-2-PWR, 1977, s. 394-402.
- [13] BURKE J.J., LAWRENCE D.J., Characteristics of fault currents on distribution systems. IEEE Trans. on PAS-103, No. 1, 1984, s. 1-6.
- [14] CARR J., JACKSON R., Frequency domain analysis applied to digital transmission line protection. IEEE Trans. PAS-94, 1975, No. 4, s. 1157-1166.
- [15] CARTER R.P., Ultra high speed relay for EHV/UHV lines based on directional wave detection principles. IEE Conference Publication No. 185, Developments in Power System Protection, London 1980, s. 168-170.
- [16] CHAMIA M., LIBERMAN S., Ultra high speed relay for EHV/UHV transmission lines - development, design and application. IEEE Trans. PAS-97, 1978, No. 6, s. 2104-2116.

- [17] CHU H.Y., CHEN S.L., Fault impedance calculation algorithms for transmission line distance protection. Electric Power System Research, 1986, No. 10, s. 69-75.
- [18] CORY B.J., RANJBAR A.M., Analogue and digital filtering techniques for digital relaying schemes. 12-th Universities Power Engineering Conference, Brunel University, Uxbridge, 1977.
- [19] COWAN C.F.N., GRANT P.M. (Ed.), Adaptive filters. Prentice-Hall, Englewood Cliff, 1985.
- [20] Criteria for the Evaluation of digital impedance methods of transmission line protection. IEEE Trans. PAS-104, 1985, No. 1, s. 126-135.
- [21] CROSSELEY P.A., McLAREN P.G., Distance protection based on traveling waves. IEEE Trans. PAS-102, 1983, No. 9, s. 2971-2983.
- [22] D'AMORE D., FERRERO A., A simplified algorithm for digital distance protection based on Fourier techniques. IEEE Trans. on Power Delivery, No. 1, 1989, s. 157-163.
- [23] DASGUPTA K.S., MALIK O.P., HOPE G.S., Digital impedance protection using a Kalman filter. Proceedings of the Eighth Power System Computation Conference, Helsinki 1984, s. 1135-1141.
- [24] DASH P.K., PUTHAL B., KHAWAS T.K., Microprocessor based power system monitoring and protection. Second International Symposium on Security of Power System Operation. Wrocław 1981, s. 243-249.
- [25] DASH P.K., Recursive functional expansion technique for computer-based impedance and differential protection. Electrical Power & Energy Systems, 1987, No. 4, s. 225-232.
- [26] DASH P.K., PANDA D.K., Digital impedance protection of power transmission lines using a spectral observer. IEEE Trans. on Power Delivery, vol. 3, No. 1, 1988, s. 102-110.
- [27] DAWID Z., SOWA P., WINKLER W., Wyższe harmoniczne w prądzie wtórnym konwencjonalnych przekładników prądowych. Prace Naukowe Instytutu Energoelektryki Politechniki Wrocławskiej Nr 66, Seria: Konferencje Nr 22, Wrocław 1985, s. 33-40.
- [28] DOMMEL H.W., Electromagnetic transient programm. Reference manual. Bonneville Power Administration, U.S.A., 1986.
- [29] EYKHOFF P., Identyfikacja w układach dynamicznych. Warszawa, PWN, 1980.
- [30] FAKRUDDIN D.B., PARTHASARATHY K., JENKINS L., Comparative evaluation of signal processing algorithms for power system protection. International Conference on Computers, Systems and Signal Processing. Bangalore, India, 1984.
- [31] FAKRUDDIN D.B., PARTHASARATHY K., JENKINS L., Transmission line protection using half - cycle Haar algorithm. Prace Naukowe Instytutu Energoelektryki Politechniki Wrocławskiej Nr 65, Seria: Konferencje Nr 21, nt. "Systemy Elektroenergetyczne - eksploatacja i rozwój", Wrocław 1985, s. 220-225.
- [32] Fault-induced wave distortion of interest to relay engineers. IEEE Committee Report, IEEE Trans. PAS-104, 1985, No. 12, s. 3574-85.
- [33] GETTA T.G., NOVELLA V.N., Ocenka primenenija optimalnoj filtracii v relejnoj zaščite. Električestvo. No 11, 1988, s. 51-55
- [34] GILBERT J.G., SHOVLIN R.J., High speed transmission line fault impedance calculation using a dedicated minicomputer. IEEE Trans. PAS-94, 1975, No. 3, s. 872-883.

- [35] GILBERT J.G., UDREN E.A., SACKIN M., The development and selection of algorithms for relaying of transmission lines by digital computers. Power System Control and Protection, Academic Press, New York 1978, s. 83-127.
- [36] GILCREST G.B., ROCKEFELLER G.D., UDREN E.A., High-speed distance relaying using a digital computer. Part I - system description. IEEE Trans. PAS-91, 1972, No. 3, s. 1235-1243.
- [37] GIRAY M.M., SACHDEV M.S., Off-nominal frequency measurement in electric power systems. IEEE Trans. on Power Delivery, No. 3, 1989, s. 1573-1578.
- [38] GIRGIS A.A., BROWN R.G., Application of Kalman filtering in computer relaying. IEEE Trans. PAS-100, 1981, No. 7, s. 3387-3397.
- [39] GIRGIS A.A., A new Kalman filtering based digital distance relay IEEE Trans. PAS-101, 1982, No. 9, s. 3471-3479.
- [40] GIRGIS A.A., BROWN R.G., Modelling of fault - induced noise signals for computer relaying applications. IEEE Trans. PAS-102, 1983, No. 9, s. 2831-2841.
- [41] GIRGIS A.A., HWANG T.L.D., Optimal estimation of voltage phasors and frequency deviation using linear and nonlinear Kalman filtering : theory and limitations. IEEE Trans. PAS-103, 1984, No. 10, s. 2943-52.
- [42] GIRGIS A.A., BROWN R.G., Adaptive Kalman filtering in computer relaying: fault classification using voltage models. IEEE Trans. PAS-104, 1985, No. 5, s. 1168-1177.
- [43] GIRGIS A.A., HART D.G., Implementation of Kalman and adaptive Kalman filtering algorithms for digital distance protection on a vector signal processor. IEEE Trans. on Power Delivery, No. 4, 1989, s. 141-149.
- [44] GODFREY K.R., Correlation methods. Automatica, vol. 16, 1980, s. 527-534.
- [45] GOLDENBERG L.M., MATJUŠKIN B.D., POLJAK M.M., Cifrovaja obrabotka signalov. Spravočnik. Radio i svjaz', Moskva, 1985.
- [46] HOPE G.S., MALIK O.P., DASH P.K., A new algorithm for impedance protection of transmission lines. IEEE PES Summer Meeting, 1979, Paper No A79 413-6.
- [47] HOPE G.S., MALIK O.P., RASMY M.E., Digital transmission line protection in real time. IEE Proc.123, 1976, s. 1349-1353.
- [48] HOSEMANN G., ŁOBOS T., Ermittlung der Symmetrischen Komponenten durch Abtastalgorithmen. Archiv für Elektrotechnik, 1985, vol.68, Nr. 1, s. 1-16.
- [49] HOSEMANN G., ŁOBOS T., Schnelle Algorithmen für zeitveränderliche symmetrische Komponenten. Archiv für Elektrotechnik, 70 (1987), s. 307-315.
- [50] HOSTETTER G.H., Recursive discrete functional expansion. IEEE Trans. on AC, vol. AC-29, No. 7, 1984, s. 654-656.
- [51] ISERMANN R., Digital control systems. Springer-Verlag, Berlin, 1981.
- [52] IŻYKOWSKI J., ROSOŁOWSKI E., SZAFRAN J.I., WISZNIIEWSKI A., Kształtowanie charakterystyk filtrów sygnałów wejściowych szybkich zabezpieczeń elektroenergetycznych. Prace Naukowe Instytutu Energoelektryki Politechniki Wrocławskiej Nr 66, Seria: Konferencje Nr 22, Wrocław 1985, s. 63-70.

- [53] IŻKOWSKI J., ROSOŁOWSKI E., SEBASTIAN R., SZAFRAN J.I., Synteza filtrów przeznaczonych do analizy sygnałów. Prace Naukowe Instytutu Energoelektryki Politechniki Wrocławskiej Nr 66, Seria: Konferencje Nr 22, Wrocław 1985, s. 71-77.
- [54] IŻKOWSKI J., ROSOŁOWSKI E., SZAFRAN J.I., Zabezpieczenia elektroenergetyczne jako układy decyzyjne. IV Międzynarodowa Konferencja Naukowa nt. "Aktualne problemy automatyki w energetyce", Gliwice 1985, część A, s. 56-68.
- [55] IŻKOWSKI J., SZAFRAN J.I., ROSOŁOWSKI E., Korrelationsalgorithmen der Identifizierung von den Grössen im elektroenergetischen System. VII Wissenschaftliche Konferenz für Energiewirtschaft. Ingenieurhochschule Zittau, DDR, 1985, H. III, s. 28-30.
- [56] IŻKOWSKI J., SZAFRAN J.I., WISZNIEWSKI A., Korelacyjna identyfikacja sygnałów. Rozprawy Elektrotechniczne, Tom XXXII, zeszyt 3, Warszawa 1986, s. 869-891.
- [57] JACKSON L.B., Digital filters and signal processing. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1986.
- [58] JEYASURYA B., SMOLIŃSKI W.J., Identification of a best algorithm for digital distance protection of transmission lines. IEEE Trans. PAS-102, 1983, No. 10, s. 3358-3369.
- [59] JEYASURYA B., VU T.H., SMOLIŃSKI W.J., Determination of transient apparent impedances of faulted transmission lines. IEEE Trans. PAS-102, 1983, No. 10, s. 3370-3378.
- [60] JEYASURYA B., SMOLIŃSKI W.J., Design and testing of microprocessor - based distance relay. IEEE Trans. PAS-103, 1984, No. 5, s. 1104-1110.
- [61] JOHNS A.T., MARTIN M.A., Fundamental digital approach to the distance protection of EHV transmission lines. Proceedings IEE, No. 125(5), 1978, s. 377-384.
- [62] JOHNSON N. G., SACHDEV M. S., WOOD H.C., Use of the Kalman filtering technique for power system protection - an insight. IEE Conference Publication No. 249, Developments in Power System Protection, London 1985.
- [63] KACZOREK T., Teoria wielowymiarowych układów dynamicznych liniowych. Warszawa, WNT, 1983.
- [64] KASZTENNY B., Algorytmy decyzyjne w cyfrowej automatyce zabezpieczeniowej. Praca doktorska. Instytut Energoelektryki PWr. Raport serii SPR. Nr 800, Wrocław, 1991 (praca nie publikowana).
- [65] KEZUNOVIC M., CAIN J.T., PERUNOVIĆ B., Digital protective relaying algorithm sensitivity study and evaluation. IEEE Trans. on Power Delivery, Vol.3, No. 3, July 1988, s. 912-923.
- [66] KOGLIN H.J., ŁOBOS T., Distanzschutz mit Mikrorechnern. ETZ-Archiv, 1981, Bd 3, H6, s. 169-177.
- [67] KOREJWO E., SYNAL B., TROJAK J., Short HV transmission line protection problems. IEE Conference Publication No. 185, Developments in Power System Protection. London 1980, s. 196-220.
- [68] KUDO H., WATANABE A., SEO K., OHURA Y., MATSUZAWA K., Development of new distance relays to cope with natural frequency transients in UHV/EHV transmission systems. IEEE Trans. PAS-104, 1985, No. 12, s. 3518-23.
- [69] KUDO H., SASAKI H., SEO K., TAKAHASHI M., YOSIDA K., MAEDA T., Implementation of a digital distance relay using an interpolated integral solution of a differential equation. IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 3, No. 4, 1988, s. 1475-1484.

- [70] KUMAR ASHOK B.S., Time delay compensation for high speed digital protection. IEEE Trans. on Power Delivery, PWRD-1, 1986, No. 4, s. 68-73.
- [71] LAYCOCK G.K., McLAREN P.G., REDFERN M.A., Signal processing techniques for power system protection applications. IEE Conference Publication No. 125, Modern Developments in Protection London 1975, s. 284-290.
- [72] Layer E., Podstawy teorii wzorcowania systemów pomiarowych w aspekcie błędów dynamicznych. Zeszyty Naukowe AGH, Nr 139/822/, Kraków, 1981.
- [73] LJAMEC JU.JA., EFIMOV N.S., Ortogonalizacja wieliżin relejnej zaščity po metodu naimenišich kvadratov. Energetika, No 3, 1987, s. 25-31.
- [74] LJAMEC JU.JA., ANTONOV V.I., ARSENTEV A.P., Adaptivnyj cifrovyy filtr osnovnoj garmoniki tokov i naprjaženij električeskoj seti. Energetika i Transport, No 6, 1989, s. 115-126.
- [75] ŁADNIAK L., Statystyczno-decyzyjna metoda oceny algorytmów pomiarowych cyfrowych zabezpieczeń odległościowych. Praca doktorska. Instytut Energoelektryki PWR. Raport serii SPR. Nr 648, Wrocław, 1987 (praca nie publikowana).
- [76] ŁOBOS T., KOGLIN H.J., Investigation of fast algorithms for digital line protections. Proceedings of the 6-th Power System Computation Conference, Darmstadt 1978, s. 620-628.
- [77] ŁOBOS T., Uproszczone algorytmy dla cyfrowych zabezpieczeń odległościowych. III Międzynarodowa Konferencja naukowa nt. "Aktualne problemy automatyki w energetyce", Gliwice 1979, s. 270-278.
- [78] ŁOBOS T., Algorytmy cyfrowej identyfikacji zwarć w liniach elektroenergetycznych. Przegląd Elektrotechniczny, 1982, Nr 1-4, s. 26-30.
- [79] ŁOBOS T., SCHNEIDER E., EICHHORN K., Digital methods for on-line estimation of the basic components of signals in electrical power systems. 9-th Power System Computational Conference, Lizbona, 1987, s. 739-745.
- [80] ŁOBOS T., Nonrecursive methods for real-time determination of basic waveforms of voltages and currents. IEE Proceedings, Vol. 136, Pt. C, No. 6, 1989, s. 347-351.
- [81] MANN B.J., MORRISON I.F., Digital calculation of impedance for transmission line protection. IEEE Trans. PAS-90, 1971, No. 1, s. 270-279.
- [82] MANN B.J., MORRISON I.F., Relaying a three-phase transmission line with a digital computer. IEEE Trans. PAS-90, 1971, No 2, s. 742-750.
- [83] MAŃCZAK K., NAHORSKIZ., Komputerowa identyfikacja obiektów dynamicznych. Warszawa, PWN, 1983.
- [84] MARTIN M.A., JOHNS A.T., Developments in distance protection for power lines using the finite transform processing principle. IEE Conference Publication No. 185, Developments in Power System Protection, London 1980, s. 177-181.
- [85] McINNES A.D., MORRISON I.F., Real time calculation of resistance and reactance for transmission line protection by digital computer. Electrical Engineering Transactions, Institute of Engineers (Australia), 1971, vol EE7, No. 1, s. 16-23.
- [86] McLAREN P.G., REDFERN M.A., Fourier series techniques applied to distance protection. IEE Proc. No. 122, 1975, s. 1301-1305.

- [87] MIKINO J., MIKI Y., Study of operating principles and digital filters for protective relays with digital computer. IEEE Winter Power Meeting, Paper No. C 755 197-9, New York 1975.
- [88] MIR M., McCLEER P.J., Simulation methods for optimum performance estimation of analog and computer impedance relays. IEEE Trans. PAS-103, 1984, No. 6, s. 1142-54.
- [89] MURTY Y.V.V.S., SMOLINSKI W.J., SIVAKUMAR S., Design of a digital protection scheme for power transformers using optimal state observers. IEE Proceedings, Vol. 135, Pt. C, No. 3, 1988, s. 224-230.
- [90] MURTY Y.V.V.S., SMOLINSKI W.J. A Kalman filter based digital percentage differential and ground fault relay for a 3-phase power transformer. IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 5, No. 3 July 1990, s. 1299-1308.
- [91] NGUYEN C.T., SRINIVASAN K., A new technique for rapid tracking of frequency deviation based on level crossing. IEEE Trans. on PAS, No. 8, 1984, s. 2230-2236.
- [92] OHURA Y., MATSUDA T., SUZUKI M., YAMAURA M., KUROSAWA Y., YOKOYAMA T., Digital distance relay with improved characteristics against distorted transient waveforms. IEEE Trans. on Power Delivery, Vol.4, No. 4, 1989, s. 2025-2041.
- [93] OKAMURA M., ANDOW F., MITANI I., OKITA Y., MASUI M., Development of new relays with significantly improved performance against badly distorted transient waveforms. IEEE Trans. PAS-99, 1980, No. 4, s. 1426-1436.
- [94] OKAMURA M., ANDOW F., SUZUKI S., Improved phase comparison relaying with higher performance. IEEE Trans. PAS-99, 1980, No. 2, s. 522-527.
- [95] OPPENHEIM A.V., SCHAFER R.W., Cyfrowe przetwarzanie sygnałów. Warszawa, WKŁ, 1979.
- [96] PHADKE A.G., HLIBKA T., ADAMIAK M.G., IBRAHIM M., THORP J., A microcomputer based ultra-high-speed distance relay : field tests. IEEE Trans. PAS-100, 1981, No. 4, s. 2026-2036.
- [97] PHADKE A.G., HLIBKA T., IBRAHIM M., A digital computer system for EHV substations : analysis and field tests. IEEE Trans. PAS-95, 1976, No. 1, s. 291-301.
- [98] PHADKE A.G., IBRAHIM M., HLIBKA T., Fundamental basis for distance relaying with symmetrical components. IEEE Trans. PAS-96 1977, No. 2, s. 635-645.
- [99] PHADKE A.G., THORP J.S., ADAMIAK M.G., A new measurement technique for tracking voltage phasors, local system frequency, and rate of change of frequency. IEEE Trans. PAS-102, 1983, No. 5, s. 1025-1038.
- [100] PHADKE A.G., THORP J.S., Computer relaying for power systems. Research Studies Press Ltd., 1988.
- [101] PILCH Z., SAUCZEK M., WINKLER W., Generation and transformation of harmonics and oscillations in current and potential transformers. 12-th Universities Power Engineering Conference, Brunel University, Uxbridge UK, 1977, Va 5.4 s. 1-5.
- [102] PINTO de S J.L. PEDRO L., Modal Kalman Filtering based impedance relaying. IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 6, No. 1, 1991, s. 78-84.
- [103] PIOTROWSKI J., Teoria pomiarów. Pomiar y w fizyce i technice. Warszawa, PWN, 1986.

- [104] Power system harmonics : an overview. IEEE Trans. PAS-102, 1983, No. 8, s. 2455-2460.
- [105] RAHMAN M.A., DASH P.K., DOWNTON E.R., Digital protection of power transformer based on weighted least square algorithm. IEEE Trans. PAS-101, 1982, No. 11, s. 4204-4210.
- [106] RAHMAN M.A., JEYASURYA B., A state-of-art review of transformer protection algorithms. IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 3, No. 2, 1988, s. 534-544.
- [107] RANJBAR A.M., CORY B.J., An improved method for the digital protection of high voltage transmission lines. IEEE Trans. PAS-94, 1975, No. 2, s. 544-550.
- [108] ROCKEFELLER G.D., Fault protection with a digital computer. IEEE Trans. PAS-88, 1969, No. 4, s. 438-464.
- [109] ROCKEFELLER G.D., UDREN E.A., High-speed distance relaying using a digital computer. Part II - Test results. IEEE Trans. AS-91, 1972, No. 3, s. 1234-1258.
- [110] ROSOŁOWSKI E., Cyfrowy model trójfazowej linii elektroenergetycznej. Materiały VIII Sympozjum "Metody matematyczne w elektrotechnice". Zeszyty Naukowe WSI w Opolu, Nr 64, Opole 1980, s. 143-150.
- [111] ROSOŁOWSKI E., SZAFRAN J.I., IŻYKOWSKI J., Metoda cyfrowego określania miejsca zwarcia w linii elektroenergetycznej z wykorzystaniem sygnału analitycznego. IV Międzynarodowa Konferencja Naukowa nt. "Aktualne problemy automatyki w energetyce", Gliwice 1985, część A, s. 225-234.
- [112] ROSOŁOWSKI E., SZAFRAN J.I., Rekursywne i nierekursywne algorytmy identyfikacji parametrów sygnałów. Materiały konferencji nt. "Metody komputerowe w automatyce i elektrotechnice", Częstochowa 1986, zeszyt III, s. 24-32.
- [113] ROSOŁOWSKI E., SZAFRAN J.I., Wybrane zagadnienia z teorii filtracji i korelacji. Prace Naukowe Instytutu Energoelektryki Politechniki Wrocławskiej Nr 70, Seria: Konferencje Nr 25, Wrocław 1986, s. 87-103.
- [114] ROSOŁOWSKI E., SZAFRAN J.I., SEBASTIAN R., Szybki pomiar wartości skutecznej prądu i napięcia. Materiały konferencji nt. "Metody komputerowe w automatyce i elektrotechnice", Częstochowa 1986, zeszyt I, s. 91-97.
- [115] ROSOŁOWSKI E., SZAFRAN J.I., Functional modelling of fast transients of power system. Modelling, Simulation & Control, AMSE Press, Vol. 14, No. 3, 1987, s. 47-55.
- [116] ROSOŁOWSKI E., SZAFRAN J.I., Application of median filters to fast signal recognition. Proceedings of the International Symposium on Electric Devices, Circuits and Systems. Kharagpur, India, 1987, s. 900-902.
- [117] ROSOŁOWSKI E., SZAFRAN J.I., Nowa metoda filtracji zakłóceń aperiodycznych. Prace Naukowe Instytutu Energoelektryki Politechniki Wrocławskiej Nr 76, Seria: Konferencje Nr 27, Wrocław 1987, s. 83-93.
- [118] ROSOŁOWSKI E., Točnost' bystrykh algoritmov identifikacii signalov. Intern. Conference "EMISCON '89", Praha 1989, Summary of papers, s. 156-158.
- [119] ROSOŁOWSKI E., Dokładność szybkich algorytmów określania amplitudy sygnału. V Międzynarodowa Konferencja Naukowa nt. "Aktualne problemy automatyki w energetyce", Gliwice 1989, t. 2, s. 348-353.

- [120] ROSOŁOWSKI E., Dynamika szybkich pomiarów impedancji. Prace Naukowe Instytutu Energoelektryki Politechniki Wrocławskiej Nr 87, Seria: Konferencje Nr 31, Wrocław 1991, s. 30-40.
- [121] SACHDEV M.S., BARIBEAU M.A., A new algorithm for digital impedance relays. IEEE Trans. PAS-98, 1979, No. 6, s. 2232-2240.
- [122] SACHDEV M.S., GIRAY M.M., A least error squares technique for determining power system frequency. IEEE Trans. PAS-104, 1985, No. 2, s. 437-443.
- [123] SACHDEV M.S., WOOD H.C., JOHNSON N.G., Kalman filtering applied to power system measurements for relaying. IEEE Trans. PAS-104, 1985, No. 12, s. 3565-73.
- [124] SACHDEV M. S., SCHEN J., A new digital technique for measuring frequency. IEE Conference publication No. 302, Developments in Power System Protection, London 1989, s. 102-106.
- [125] SANDERSON J.W.H., KWONG W.S., WONG C.C., Microprocessor based distance relaying - some design considerations. IEE Conference Publication No. 185, Developments in Power System Protection, London 1980, s. 127-132.
- [126] SLEMON G.R., ROBERTSON .D.T., RAMAMOORTY M., High speed protection of power systems based on improved power system models. CIGRE paper 31-09, Paris 1969.
- [127] SMOLINSKI W., An algorithm for digital impedance calculation using a single PI section transmission line model. IEEE Trans. PAS-98, 1979, No. 5, s. 1546-1551.
- [128] SRINIVASAN K., Errors in digital measurement of voltage, active and reactive powers and an on-line corrections for frequency drift. IEEE Trans. on Power Delivery, PWRD-2, No. 1, 1987, s. 72-76.
- [129] ST.-JACQUES A.L., SANTERRE G., A multiprocessor based distance relay : design features. IEEE Trans. PAS-102, 1983, No. 12, s. 3842-3849.
- [130] STOJNIJ B.S. i dr., Mikroprocessornyje sistemy v elektroenergetike. Naukova Dumka, Kiev, 1988.
- [131] STREJC V., Least squares parameter estimation. Automatica, vol. 16, 1980, s. 535-550.
- [132] SWIFT G.W., The spectra of fault induced transients. IEEE Trans. PAS-98, 1979, No. 3, s. 940-947.
- [133] SZABATIN J., Podstawy teorii sygnałów. Warszawa WKŁ, 1982.
- [134] SZAFRAN J.I., Identyfikacja przebiegów zniekształconych metodą korelacji z sygnałem prostokątnym. Sympozjum AGH nt. "Metody matematyczne w elektrotechnice", Zakopane 1983, s. 364-373.
- [135] SZAFRAN J.I., An accurate method of signal recognition. International Conference on Computers, Systems and Signal Processing. Bangalore, India, 1984.
- [136] SZAFRAN J.I., Dynamika metody korelacyjnej rozpoznawania sygnałów z funkcjami Walsha. Materiały IX Sympozjum nt. "Zastosowanie maszyn matematycznych w elektrotechnice", Łódź 1984, s. 333-338.
- [137] SZAFRAN J.I., IZYKOWSKI J., ROSOŁOWSKI E., Ocena granicznych możliwości filtracji zakłóceń aperiodycznych. Międzynarodowe Sympozjum nt. "Systemy elektroenergetyczne - eksploatacja i rozwój". Prace Naukowe Instytutu Energoelektryki Politechniki Wrocławskiej Nr 65, Seria Konferencje Nr 21, Wrocław 1985, s. 180-185.

- [138] SZAFRAN J.I., ROSCŁOWSKI E., IŻYKOWSKI J., Estymacja sygnałów zakłócanych losowo w zastosowaniu do automatyki elektroenergetycznej. Międzynarodowe Sympozjum nt. "Systemy elektroenergetyczne - eksploatacja i rozwój". Prace Naukowe Instytutu Energoelektryki Politechniki Wrocławskiej Nr 65, Seria: Konferencje Nr 21, Wrocław 1985, s. 225-234.
- [139] SZAFRAN J.I., Metoda szybkiej analizy sygnałów elektrycznych. Archiwum Elektrotechniki, tom XXXIV, zeszyt 131/132-1/2, 1985, Warszawa 1986.
- [140] SZAFRAN J.I., ROSOŁOWSKI E., Fast signal recognition for power system protection. 2-nd International Symposium on Measurement of Electrical Quantities. Warsaw 1987.
- [141] SZAFRAN J.I., Charakterystyki dwustanowego filtra Kalmana w dziedzinie czasu i częstotliwości. Prace Naukowe Instytutu Energoelektryki PWR. Nr 79, Seria: Konferencje Nr 29, Wrocław 1988.
- [142] SZAFRAN J.I., Rozpoznawanie sygnałów w cyfrowej automatyce zabezpieczeniowej. Prace Naukowe Instytutu Energoelektryki PWR. Nr 83, Seria: Monografie Nr 23, Wrocław 1990.
- [143] ŚNEERSON E.M., Distancionnyje zaščity. Energoatomizdat, Moskwa, 1986.
- [144] ŠČERBINA JU.V., MELNIK W.P., ROSOŁOWSKI E., Analiz uslovij funkcionirovanija relejnoj zaščity metodom imitacionnogo modelirovanija. Probl. techn. elektrodinamiki, vyp. 70, Kijev 1979, s. 32-38.
- [145] TANAKA K., KANOU K., HARUMOTO Y., MORI T., SUZUKI K., GOUDA T., Application of microprocessors to the control and protection system at substation. IEEE Trans. PAS-99, 1980, No. 1, s. 344-351.
- [146] The impact of sine-wave distortions on protective relays. Wave Distortion Working Group of Power System Relaying Committee. IEEE Trans. on Ind. Appl., Vol. IA-20, 1984, No. 2, s. 335-343.
- [147] THORP J., PHADKE A.G., A microprocessor based three - phase transformer differential relay. IEEE Trans. PAS-101, 1982, No. 2, s. 426-432.
- [148] THORP J.S., PHADKE A.G., HOROWITZ S.H., BEEHLER J.G., Limits to impedance relaying. IEEE Trans. PAS-98, 1979, No. 1, s. 246-260.
- [149] VITINS M., A correlation method for transmission line protection IEEE Trans. PAS 97, 1978, No. 5, s. 1607-1618.
- [150] VITINS M., A fundamental concept for high speed relaying. IEEE Trans. PAS-100, 1981, No. 1, s. 163-171.
- [151] WINKLER W., Ocena wrażliwości algorytmów cyfrowej lokalizacji zwarć na sygnały zakłócające w prądzie i napięciu. Prace Naukowe Instytutu Energoelektryki PWR. Nr 66, Seria: Konferencje Nr 22, Wrocław 1985, s. 41-47.
- [152] WINKLER W., KORBASIEWICZ I., KORBASIEWICZ M., A microprocessor based protective system for generator-transformer unit. Fourth International Conference on Developments in Power System Protection, IEE Conference Publication No. 302, Edinburgh 1989, s. 56-60.
- [153] WINKLER W., MIRKUT M., WITEK B., Performance of differential protection for three winding power transformers during transient CTs saturation. Fourth International Conference on Developments in Power System Protection, IEE Conference Publication No. 302, Edinburgh 1989, s. 66-69.

- [154] WISZNIEWSKI A., Filtracja analogowa sygnałów w układach sterowania systemem energetycznym za pomocą maszyn cyfrowych. Przegląd Elektrotechniczny, Nr 6, 1975, s. 244-247.
- [155] WISZNIEWSKI A., Signal recognition in protective relaying. IEE Conference Publication No. 185, Developments in Power System Protection, London 1980, s. 132-136.
- [156] WISZNIEWSKI A., How to reduce errors of distance fault locating algorithms. IEEE Trans. PAS-100, 1981, No. 12, s. 4815-4821.
- [157] WISZNIEWSKI A., Przekładniki w elektroenergetyce. Warszawa, WNT, 1982.
- [158] WISZNIEWSKI A., Accurate fault impedance locating algorithm. IEE Proc. vol 130, 1983, s. 311-314.
- [159] WISZNIEWSKI A., Fault location correction of errors due to current transformers. IEE Conference Publication No. 249, Developments in Power System Protection, London 1985, s. 185-187.
- [160] WISZNIEWSKI A., New algorithm of calculating current and voltage phasors for fast protection. IEE Proc. 134, 1987, No. 1, s. 81-82.
- [161] WISZNIEWSKI A., SZAFRAN J.I., Distance digital algorithm immune to saturation of current transformers. Fourth International Conference on Developments in Power System Protection, IEE Conference Publication No. 302, Edinburgh 1989, s. 196-199.
- [162] WISZNIEWSKI A., IŻYKOWSKI J., MICHALIK M., ROSOŁOWSKI E., SZAFRAN J.I., Podstawy teoretyczne pomiarów dokonywanych przez urządzenie podejmujące decyzje w komputerowych układach automatyki elektroenergetycznej (etap IV). Instytut Energoelektryki PWR. Raport serii SPR. Nr 728, Wrocław, 1989 (praca nie publikowana).
- [163] WISZNIEWSKI A., Digital high-speed calculation of the distorted signal fundamental component. IEE Proceedings, Vol. 137, Pt. C, No. 1, 1990, s. 19-24.
- [164] WISZNIEWSKI A., Algorytmy pomiarów cyfrowych w automatyce elektroenergetycznej. Warszawa, WNT, 1990.
- [165] WOJNAR A., Teoria sygnałów. Warszawa, WNT, 1980.
- [166] WOJTKIEWICZ A., Elementy syntezy filtrów cyfrowych. Warszawa, WNT, 1984.
- [167] YAMAGUCHI H., HORI A., MORI T., SUZUKI K., The use of micro-processors in digital protection and control in substations. IEE Conference Publication No. 185, Developments in Power System Protection, London 1980, s. 74-78.
- [168] YOUNG P., Recursive estimation and time-series analysis. An introduction. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [169] ŻUCHOWSKI A., Pomiar dynamiczne. Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Szczecińskiej, Szczecin, 1984.
- [170] ŻYDANOWICZ J., Elektroenergetyczna automatyka zabezpieczeniowa. Tom 1, Podstawy zabezpieczeń elektroenergetycznych. Warszawa, WNT, 1979.
- [171] ŻYDANOWICZ J., Elektroenergetyczna automatyka zabezpieczeniowa. Tom 2, Automatyka eliminacyjna. Warszawa, WNT, 1985.

ANALYSIS OF DIGITAL ALGORITHMS
APPLIED IN POWER SYSTEM PROTECTION

The monograph deals with the basic problems encountered in analysis and synthesis of digital algorithms which are used in electric signals estimation for power system protection purposes. The general classification of existing algorithms is presented with respect to the structure of the estimated process models and expected noise. Both deterministic and probabilistic process models of parallel and series structure are considered.

The measurements of the input signals which are realized by the power protections are considered in terms of signal parameter estimation. The basic estimation procedures which are analysed employ the least-squares method. With respect to the assumed process model, the estimation procedures can have either nonrecursive or recursive form. It has been shown that most of the existing algorithms can take one of those two forms.

The fundamental quantities, on which power protection operating criteria are based, are determined by orthogonal components of current and/or voltage signals. In the monograph a general method of the signal orthogonal component filter analysis and synthesis is presented. Analysis of signal orthogonal component estimation by means of nonrecursive and recursive digital filters, time delay and differentiation procedures as well as spectral state observers and Kalman filtering is presented. It has been shown that basic spectral and dynamic properties of the analysed signal estimators can be determined by the orthogonal filter characteristics. The synthesis algorithm of nonrecursive filter pair of mutually orthogonal characteristics is presented. The algorithm is based on state variable recursive filter transformations.

The algorithm errors caused by frequency and phase deviations of the estimated signal as well as other error sources like damped higher harmonic and decaying d.c. offset components are also analysed. As a result an effective adaptive algorithm which can be used to eliminate the d.c. component from the estimated signal has been developed. The general method of transient and steady state error analysis for digital algorithms is also presented and the errors caused by sampling and A/C conversion is included.

АНАЛИЗ АЛГОРИТМОВ ЦИФРОВЫХ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЗАЩИТ

В работе рассматриваются вопросы анализа и синтеза алгоритмов цифрового измерения параметров контролируемых релейными защитами. Проведена классификация этих алгоритмов в зависимости от структуры моделей наблюдаемого процесса и помех. При этом рассматриваются модели с параллельной и последовательной структурами, а параметры этих моделей могут быть определены с использованием детерминированных или вероятностных характеристик.

Измерение, выполняемое защитой, рассматривается как процедура оценки параметров, значения которых являются основой принятия решения. Основные анализируемые в работе измерительные алгоритмы, базируются на методе наименьших квадратов. В зависимости от принятой модели процесса, эти алгоритмы имеют рекурсивную или нерекурсивную структуру. Было показано, что большинство существующих алгоритмов можно свести к таким именно видам.

Представлена идея синтеза и анализа процедур нерекурсивной оценки, которая позволяет представить в сжатом матричном виде большую совокупность алгоритмов. Показано, что это даёт возможность непосредственно определить параметры этих алгоритмов, а также получить оценку измерительных ошибок в виде дисперсии.

Основные контролируемые защитой параметры определяются посредством ортогональных составляющих тока и/или напряжения. В работе представлен общий подход к синтезу и анализу фильтров ортогональных составляющих, именуемых комплексными фильтрами. Проанализировано применение для этой цели преобразования сигналов методами рекурсивной и нерекурсивной фильтрации, задержки, дифференцирования, а также спектральных наблюдателей состояния и фильтров Калмана. Показано, что основные частотные и динамические свойства анализируемых алгоритмов могут быть описаны с помощью характеристик комплексных фильтров. Представлен алгоритм синтеза пары нерекурсивных фильтров, основанных на модели переменных состояния.

Проанализированы вызванные помехами ошибки алгоритмов, проявляющихся в виде отклонения частоты или фазы сигнала, а также наличия периодических и аperiodической составляющих. Предложено эффективный алгоритм подавления аperiodической составляющей, использующий адаптационный принцип цифровой фильтрации. Представлен способ анализа установившихся и переходных ошибок рассматриваемых алгоритмов.

Проведена также оценка влияния ошибок наложения и квантования сигналов на точность измерения параметров, контролируемых цифровыми релейными защитами.

Проверил Станислав Ганцаж

SPIS TREŚCI

1. Wstęp	3
2. Źródła błędów algorytmów zabezpieczeniowych	8
2.1. Struktura zabezpieczenia cyfrowego	8
2.2. Błędy członu pomiarowego zabezpieczeń cyfrowych	10
2.3. Modele matematyczne sygnałów wejściowych zabezpieczeń	13
3. Estymacja parametrów modeli sygnałowych	19
3.1. Wprowadzenie	19
3.2. Metoda najmniejszych kwadratów	20
3.2.1. Matematyczne podstawy metody.....	20
3.2.2. Rekursywny algorytm MNK	25
3.3. Nierekursywne algorytmy estymacji parametrów sygnału	29
3.3.1. Dwustanowy algorytm Fouriera	29
3.3.2. Trzystanowy algorytm Fouriera	31
3.3.3. Dwustanowy algorytm Walsha	35
3.3.4. Trzystanowy algorytm Walsha	36
3.3.5. Pięciostanowy algorytm Fouriera	37
3.3.6. Algorytm Fouriera z modelem pomiarowym dostosowanym do długości okna	39
3.4. Wariancja błędów estymacji	40
3.5. Podsumowanie	43
4. Algorytmy wstępnego przetwarzania sygnałów	44
4.1. Wprowadzenie	44
4.2. Filtracja cyfrowa	45
4.2.1. Filtry o skończonej odpowiedzi impulsowej	47
4.2.2. Filtry o nieskończonej odpowiedzi impulsowej	51
4.3. Korelacja cyfrowa	52
4.4. Obserwatory stanu	57
4.4.1. Stacjonarne obserwatory stanu	59
4.4.2. Niestacjonarne obserwatory stanu	61
4.5. Filtracja Kalmana	62
4.5.1. Algorytm filtracji	62
4.5.2. Zasady projektowania filtru	63
4.6. Przekształcenie procedur rekursywnych w filtry nierekursywne	64
5. Algorytmy pomiaru wielkości kryterialnych	69
5.1. Wprowadzenie	69
5.2. Estymacja sygnału zespolonego	70
5.2.1. Zastosowanie filtrów cyfrowych	70
5.2.2. Zastosowanie korelacji	76

5.2.3. Zastosowanie opóźnienia sygnału	76
5.2.4. Zastosowanie różniczkowania sygnału	79
5.2.5. Błędy estymacji sygnału zespolonego	82
5.3. Pomiar amplitudy prądu i napięcia	84
5.3.1. Korzystanie z modelu sygnału zespolonego	84
5.3.2. Uśrednianie bezwzględnej wartości sygnału	84
5.4. Pomiar mocy	85
5.5. Pomiar składowych impedancji	86
5.5.1. Zastosowanie fazorów prądu i napięcia	86
5.5.2. Korzystanie z równania pętli zwarciowej	87
5.6. Podsumowanie	88
6. Błędy stanu ustalonego algorytmów	89
6.1. Wprowadzenie	89
6.2. Błędy związane ze zmianą częstotliwości podstawowej sygnału	90
6.2.1. Błędy estymacji amplitudy sygnału	90
6.2.2. Błędy estymacji mocy	91
6.2.3. Błędy estymacji impedancji	93
6.3. Błędy wynikające ze zmiany fazy sygnału	96
6.4. Eliminacja oscylacyjnych składowych zakłócających	99
6.5. Błędy wywołane aperiodyczną składową zakłócającą	103
6.5.1. Problemy eliminacji składowej aperiodycznej	103
6.5.2. Metody eliminacji zakłóceń aperiodycznych	104
6.5.3. Adaptacyjny filtr składowej aperiodycznej	108
7. Błędy stanu przejściowego algorytmów	111
7.1. Źródła błędów w stanie przejściowym algorytmów	111
7.2. Błędy algorytmów o stałym oknie pomiarowym.....	112
7.2.1. Analiza błędów	112
7.2.2. Sposoby zmniejszania błędów dynamicznych	115
7.3. Błędy estymatorów stosujących obserwatory stanu	117
7.3.1. Błędy deterministycznych obserwatorów stanu	117
7.3.2. Własności filtru Kalmana jako estymatora składowych ortogonalnych sygnału	120
7.4. Dynamika estymatorów impedancji - przykład obliczeniowy.....	122
7.4.1. Wprowadzenie	122
7.4.2. Cyfrowy model systemu	123
7.4.3. Rezultaty pomiarów	124
8. Skutki próbkowania i kwantowania sygnału w zabezpieczeniach cyfrowych	128
8.1. Wprowadzenie	128

	161
8.2. Błędy związane z ograniczoną długością rejestrów procesora i przetwornika A/C	129
8.2.1. Określenie parametrów obwodu wejść analogowych	129
8.2.2. Charakterystyki szumów w algorytmach zabezpieczeń cyfrowych	132
8.2.3. Analiza wrażliwości numerycznych procedur pomiarowych	134
8.3. Badanie charakterystyk podstawowych algorytmów	135
9. Wnioski	137
Dodatek A. Niektóre użyteczne związki trygonometryczne	141
Dodatek B. Synteza obserwatorów stacjonarnych	142
Literatura	147

CONTENTS

1. Introduction	3
2. Sources of errors for digital protection algorithms	8
2.1. General structure of a digital protection	8
2.2. Errors for a digital protection measurement unit	10
2.3. Mathematical models of protection input signals	13
3. Estimation of signal model parameters	19
3.1. Introduction	19
3.2. The least squares method	20
3.2.1. Mathematical background	20
3.2.2. Recursive LSE algorithm	25
3.3. Nonrecursive algorithms for signal parameter estimation	29
3.3.1. 2-state Fourier algorithm	29
3.3.2. 3-state Fourier algorithm	31
3.3.3. 2-state Walsh algorithm	35
3.3.4. 3-state Walsh algorithm	36
3.3.5. 3-state Fourier algorithm	37
3.3.6. Fourier algorithm with variable data window	39
3.4. Variance of estimation errors	40
3.5. Summary	43
4. Input signal processing algorithms	44
4.1. Introduction	44
4.2. Digital filtering	45
4.2.1. FIR filters	47
4.2.2. IIR filters	51
4.3. Digital correlation	52

4.4. State observers	57
4.4.1. Time invariant state observers	59
4.4.2. Time variant state observers	61
4.5. Kalman filtering	62
4.5.1. Filtering algorithm	62
4.5.2. Filter design rules	63
4.6. Recursive to nonrecursive filter transformation	64
5. Algorithms for signal parameter estimation for power protection purposes	69
5.1. Introduction	69
5.2. Complex signal estimation	70
5.2.1. Application of digital filters	70
5.2.2. Application of correlation methods	76
5.2.3. Application of time delay	76
5.2.4. Application of differentiation	79
5.2.5. Errors of complex signals estimation	82
5.3. Measurement of current and voltage amplitude	84
5.3.1. Application of complex signal models	84
5.3.2. Averaging of signal absolute values	84
5.4. Electric power measurement	85
5.5. Impedance measurement	86
5.5.1. Application of current and voltage phasors	86
5.5.2. Application of short-circuit differential equations ..	87
5.6. Summary	88
6. Steady state errors of estimation algorithms	89
6.1. Introduction	89
6.2. Errors caused by signal fundamental frequency variations ..	90
6.2.1. Signal amplitude estimation errors	90
6.2.2. Power estimation errors	91
6.2.3. Impedance estimation errors	93
6.3. Errors caused by signal phase angle variations	96
6.4. Elimination of higher harmonics	99
6.5. Errors caused by decaying d.c. component	103
6.5.1. Problem of decaying d.c. component elimination	103
6.5.2. Methods of decaying d.c. component elimination	104
6.5.3. Adaptive filter of decaying component	108
7. Transient errors of the algorithms	111
7.1. Error sources in the algorithm transient state	111
7.2. Errors of algorithms with a fixed data window	112
7.2.1. Error analysis	112
7.2.2. Methods of the error reduction	115

	163
7.3. Errors of the estimators employing state observers	117
7.3.1. Errors of the deterministic state observers	117
7.3.2. Properties of the Kalman filter as the orthogonal component estimator	120
7.4. Transient performance of the impedance estimators - calculation example	122
7.4.1. Introduction	122
7.4.2. Digital model of the system.....	123
7.4.3. Measurement results	124
8. Effect of signal sampling and quantization in digital properties	128
8.1. Introduction	128
8.2. Errors caused by a finite word length	129
8.2.1. Determination of the analog input circuit parameters	129
8.2.2. Noise characteristics of digital protection algorithms	132
8.2.3. Sensitivity analysis of digital of digital measurement procedures	134
8.3. Determination of the basic algorithm characteristics	135
9. Conclusions	137
Appendix A. Some useful trigonometric relations	141
Appendix B. Synthesis of the time invariant observers	142
References	147

PRACE NAUKOWE INSTYTUTU ENERGOELEKTRYKI
(wydane w latach 1988—1992)

- Nr 78, Monografie nr 20, M. Zielichowski, *Procesy ziemnozwarciowe w stojanach turbogeneratorów*, Wrocław 1988
- Nr 79, Konferencje nr 29, *Teoria cyfrowych systemów zabezpieczeń*, Wrocław 1988
- Nr 80, Monografie nr 21, Z. Wróblewski, *Wielowariantowa metoda prognozowania niezawodności styczników elektromagnetycznych prądu przemiennego z bieżącej produkcji*, Wrocław 1988
- Nr 81, Konferencje nr 30, *Systemy elektroenergetyczne — eksploatacja i rozwój*, Wrocław 1988
- Nr 82, Monografie nr 22, Z. Kremens, *Analiza błędnych danych z testem obserwowalności w ocenie stanu pracy systemu elektroenergetycznego*, Wrocław 1989
- Nr 83, Monografie nr 23, J. Szafran, *Rozpoznawanie sygnałów w cyfrowej automatyce zabezpieczeniowej*, Wrocław 1990
- Nr 84, Monografie nr 24, K. Wilkosz, *Metody wstępnego zweryfikowania danych pomiarowych parametrów stanu pracy systemu elektroenergetycznego*, Wrocław 1990
- Nr 85, Monografie nr 25, A. Wilczyński, *Systemy taryfowe jako narzędzie ekonomicznego sterowania zapotrzebowaniem na moc i energię elektryczną*, Wrocław 1990
- Nr 86, Monografie nr 26, Z. Kozik, *Niezawodność wytwarzania energii elektrycznej. Rezerwa mocy SEE*, Wrocław 1991
- Nr 87, Konferencje nr 31, *Symulacja cyfrowa procesów dynamicznych i przetwarzania sygnałów do celów automatyki elektroenergetycznej*, Wrocław 1991

**Subscription should be sent (at any time of the year) to:
"Ars Polona"**

Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

Bank account number: PBK XIII Oddz. W-wa 370044-1195-139-11

Zamówienia na prenumeratę można składać:

OR PAN, PKiN, 00-901 Warszawa

Nr konta bankowego: PBK IX Oddz. W-wa, 370031-4792

**Wydawnictwa Politechniki Wrocławskiej
są do nabycia w następujących księgarniach:
„Politechnika”**

**Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław
(budynek A-1 PWr.)**

**oraz Wydawnictwa Politechniki Wrocławskiej
plac Grunwaldzki 13, 50-377 Wrocław
(budynek D-1 PWr.)**

ISSN 0324-976X