

**CYFROWE PRZETWARZANIE
SYGNAŁÓW W AUTOMATYCE
ELEKTROENERGETYCZNEJ**

**Digital Signal Processing for Power System
Protection and Automation**

**PROBLEMY WSPÓŁCZESNEJ NAUKI
TEORIA I ZASTOSOWANIA**

AUTOMATYKA

Edytor serii: Leonard Bolc

Eugeniusz Rosołowski

**CYFROWE PRZETWARZANIE
SYGNAŁÓW W AUTOMATYCE
ELEKTROENERGETYCZNEJ**

(in Polish, corrected)

**Digital Signal Processing for Power System
Protection and Automation**

**Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT
Warszawa 2002**

© **Copyright by Eugeniusz Rosołowski**
Warszawa 2002

© **Copyright by EXIT**
Warszawa 2002

© **Copyright by „Akademicka Oficyna Wydawnicza”**
Warszawa 2002

Wydanie monografii było dofinansowane przez KBN (projekt badawczy 4 T10B 05922) i przez Dziekana Wydziału Elektrycznego Politechniki Wrocławskiej.

Wszystkie nazwy produktów są zastrzeżonymi nazwami handlowymi lub znakami towarowymi odpowiednich firm.

Recenzent

Prof. dr hab. inż. Józef Korbicz

Redaktor

Anna Bitner

Komputerowy skład tekstu

Eugeniusz Rosołowski

Projekt okładki

Jarosław Skowroński

Wydawca

EXIT, tel./fax 22 823-70-45

sklep internetowy: <http://www.exit.pl>

ISBN 83-87674-38-9

Spis Treści

OD AUTORA	9
WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ	13
1. WPROWADZENIE DO ELEKTROENERGETYCZNEJ AUTOMATYKI ZABEZPIECZENIOWEJ	15
1.1 Uwagi wstępne	15
1.2 Zakłócenia w systemie elektroenergetycznym.....	16
1.2.1 Pojęcia podstawowe.....	16
1.2.2 Zwarcia w systemie przesyłowym	19
1.2.3 Zwarcia doziemne w sieciach rozdzielczych	22
1.2.4 Zwarcia w maszynach elektrycznych.....	24
1.3 Zadania elektroenergetycznej automatyki zabezpieczeniowej.....	29
1.3.1 Zadania automatyki eliminacyjnej.....	29
1.3.2 Funkcje dodatkowe przekaźników zabezpieczeniowych	29
1.4 Koncepcja zabezpieczeń przekaźnikowych.....	30
1.4.1 Struktura systemu zabezpieczeń.....	30
1.4.2 Struktura przekaźnika cyfrowego	32
1.4.3 Podstawowe charakterystyki zabezpieczeń	34
1.5 Kryteria stosowane w zabezpieczeniach elektroenergetycznych.....	36
1.5.1 Kryterium nadprądowe.....	37
1.5.2 Kryterium nad- i podnapięciowe	40
1.5.3 Kryterium różnicowoprądowe.....	40
1.5.4 Kryterium podimpedancyjne	43
1.5.5 Kryteria falowe	47
1.6 Przekładniki zabezpieczeniowe	50
1.6.1 Przekładniki prądowe	51
1.6.2 Przekładniki napięciowe	55
1.7 Zintegrowane systemy sterowania stacją elektroenergetyczną	57
1.8 Podsumowanie	61
1.9 Literatura	62

2. ZASADY CYFROWEGO PRZETWARZANIA SYGNAŁÓW	67
2.1 Wstęp	67
2.2 Podstawy matematyczne przetwarzania sygnałów	69
2.2.1 Przekształcenie Fouriera	69
2.2.2 Przekształcenie Laplace'a	84
2.2.3 Przekształcenie \mathcal{Z}	88
2.2.4 Transformacja układów ciągłych do układów dyskretnych	93
2.3 Filtracja cyfrowa	98
2.3.1 Opis filtrów cyfrowych	98
2.3.2 Filtry o skończonej odpowiedzi impulsowej	101
2.3.3 Filtry o nieskończonej odpowiedzi impulsowej	112
2.4 Korelacja cyfrowa	125
2.5 Transformacja czasowo-częstotliwościowa	129
2.5.1 Krótkoczasowe przekształcenie Fouriera	131
2.5.2 Przekształcenie falkowe	133
2.5.3 Uwagi końcowe	142
2.6 Literatura	143
3. ESTYMACJA PARAMETRÓW SYGNAŁÓW ELEKTRYCZNYCH	145
3.1 Wprowadzenie	145
3.2 Modele sygnałowe procesu	146
3.3 Podstawowe algorytmy pomiaru składowych ortogonalnych	154
3.3.1 Algorytm Fouriera	154
3.3.2 Algorytm Walsha	164
3.4 Metoda najmniejszych kwadratów	171
3.4.1 Zależności podstawowe	171
3.4.2 Nierekursywny algorytm MNK	174
3.4.3 Rekursywna metoda najmniejszych kwadratów	183
3.4.4 Nieliniowa metoda najmniejszych kwadratów	189
3.4.5 Rekursywny nieliniowy algorytm MNK	194
3.5 Obserwatory stanu	196
3.5.1 Stacjonarne obserwatory stanu	196
3.5.2 Niestacjonarne obserwatory stanu	205
3.6 Filtracja Kalmana	209
3.6.1 Liniowy filtr Kalmana	210
3.6.2 Rozszerzony filtr Kalmana	217
3.7 Podsumowanie	222
3.8 Literatura	224
4. ESTYMACJA WIELKOŚCI KRYTERIALNYCH	227
4.1 Wprowadzenie	227
4.2 Pomiar wartości skutecznej sygnału	228
4.3 Estymacja sygnału zespolonego	231

4.3.1	Zależności podstawowe	231
4.3.2	Zastosowanie filtrów cyfrowych.....	239
4.3.3	Różniczkowanie sygnału.....	243
4.3.4	Zastosowanie opóźnienia sygnału.....	247
4.3.5	Zastosowanie obserwatora stanu.....	249
4.4	Pomiar mocy	250
4.5	Pomiar parametrów obwodu zwarciego	255
4.5.1	Wykorzystanie sygnałów zespolonych.....	255
4.5.2	Zastosowanie modelu pętli zwarciowej.....	256
4.6	Estymacja składowych symetrycznych.....	262
4.7	Pomiar częstotliwości sygnału	272
4.7.1	Metody wykorzystujące estymatory sygnału zespolonego	273
4.7.2	Zastosowanie algorytmu MNK.....	279
4.7.3	Wykorzystanie charakterystyki częstotliwościowej estymatorów amplitudy	281
4.7.4	Metody wykorzystujące model Prony'ego	282
4.7.5	Metody adaptacyjne.....	291
4.8	Podsumowanie	293
4.9	Literatura	294
5.	KOMPENSACJA BŁĘDÓW POMIAROWYCH	297
5.1	Wprowadzenie.....	297
5.2	Stan przejściowy algorytmów	299
5.2.1	Algorytmy o stałym oknie pomiarowym	299
5.2.2	Algorytmy ze zmienną długością okna pomiarowego	302
5.2.3	Stabilizacja pomiaru wielkości kryterialnej.....	307
5.3	Błędy dynamiczne algorytmów	310
5.3.1	Dynamiczna korekcja stanu przejściowego.....	310
5.3.2	Pomiar składowych ortogonalnych z podziałem częstotliwości próbki	313
5.4	Kompensacja błędów od składowej aperiodycznej.....	315
5.5	Błędy wynikające ze zmiany częstotliwości sygnału	333
5.5.1	Błędy pomiaru amplitudy.....	334
5.5.2	Błędy pomiaru mocy i impedancji.....	336
5.6	Podsumowanie	339
5.7	Literatura	340
6.	METODY SZTUCZNEJ INTELIGENCJI W AUTOMATYCE ELEKTROENERGETYCZNEJ	343
6.1	Wstęp	343
6.2	Systemy ekspertowe	345
6.2.1	Wprowadzenie	345
6.2.2	Struktura systemu ekspertowego	346

6.2.3	Przykłady zastosowań.....	348
6.3	Systemy rozmyte	350
6.3.1	Wprowadzenie	350
6.3.2	Struktura systemu rozmytego	352
6.3.3	Zbiory rozmyte i rozmyte relacje	354
6.3.4	Wnioskowanie rozmyte.....	364
6.3.5	Rozmyte sygnały i nastawy	369
6.3.6	Rozmywanie i wyostrzanie.....	377
6.3.7	Rozmyte zabezpieczenie różnicowe transformatora.....	381
6.4	Sztuczne sieci neuronowe	393
6.4.1	Wprowadzenie	393
6.4.2	Struktury sieci neuronowych	394
6.4.3	Strategie uczenia sieci neuronowych.....	400
6.4.4	Przykłady zastosowań.....	405
6.5	Podsumowanie	418
6.6	Literatura	419
	SKOROWIDZ	427

Od Autora

Systemy elektroenergetyczne należą do najbardziej złożonych układów, jakie spotyka się we współczesnej technice. Ze względu na wielorakie, niekiedy nie do końca uświadamiane, uzależnienie życia codziennego od energii elektrycznej, poprawny proces jej wytwarzania i dostarczania jest jednym z istotnych warunków stabilnego funkcjonowania współczesnych społeczeństw.

Ponieważ stopień integracji tych systemów i zainstalowane w nich moce stale rosną, zwiększają się również skutki zachodzących nieuchronnie awarii. Procesy towarzyszące awariom w rozpatrywanym systemie są bardzo szybkie, a ich kontrola może się odbywać jedynie za pośrednictwem odpowiednich urządzeń automatyki elektroenergetycznej. Rola tych układów, a także wymagania stawiane przed producentami i obsługującym je personelem stale wzrasta.

Współczesne urządzenia automatyki elektroenergetycznej są budowane w oparciu o układy mikroprocesorowe. Od chwili pojawienia się przed ćwierćwieczem pierwszych praktycznych rozwiązań tych układów, obserwuje się gwałtowny rozwój w zakresie zarówno stosowanych rozwiązań technicznych, jak i proponowanych koncepcji ich funkcjonowania. Do zrozumienia zasad działania takich układów niezbędna jest nie tylko znajomość procesów zachodzących w systemie elektroenergetycznym, ale również gruntowna wiedza w zakresie nowoczesnych technik cyfrowego przetwarzania sygnałów, metod numerycznych, estymacji parametrów procesu, a także metod sztucznej inteligencji.

Książka ta jest próbą uzupełnienia skromnej liczby krajowych pozycji literatury na ten temat. W zasadzie ograniczają się one do pracy prof. Andrzeja Wiszniewskiego *Algorytmy pomiarów cyfrowych w automatyce elektroenergetycznej* (WNT, Warszawa 1990), która w zmienionym układzie ukazała się w 2001 roku (J. Szafran, A. Wiszniewski, *Algorytmy pomiarowe i decyzyjne cyfrowej automatyki elektroenergetycznej*, WNT, Warszawa). W porównaniu z tą ostatnią pozycją starałem się zawrzeć tutaj najnowsze informacje z zakresu zastosowania, między innymi, modeli zmiennych stanu do estymacji parametrów sygnału (estymatory w postaci liniowych i nieliniowych obserwatorów stanu) oraz metod sztucznej inteligencji do

pomiarów, korekcji przetworników pomiarowych i podejmowania decyzji w układach automatyki elektroenergetycznej. Zamieściłem również pogłębioną analizę wpływu typowych zakłóceń, a w szczególności składowej aperiodycznej, na dokładność pomiaru. Krótkie wprowadzenie w zagadnienia przekształceń czasowo-częstotliwościowych pozwala także na ocenę możliwości zastosowania przekształcenia falkowego w omawianej dziedzinie.

W rozdziale 1 umieściłem ogólne informacje na temat zasad organizacji i koncepcji funkcjonowania automatyki elektroenergetycznej, a w szczególności zabezpieczeń przekładnikowych. Opisałem podstawowe kryteria, które służą do detekcji wystąpienia zwarcia w strefie nadzorowanej przez zabezpieczenie. Pokrótkce przedstawiłem także zjawiska zachodzące w przekładnikach zabezpieczeniowych, które mogą w istotny sposób wpływać na dokładność pomiaru wielkości elektrycznych stosowanych w omawianych układach. Ten rozdział jest przeznaczony głównie dla tych Czytelników, którzy tylko pobieżnie zetknęli się z problematyką automatyki elektroenergetycznej.

Rozdział 2 stanowi natomiast wprowadzenie w zagadnienia cyfrowego przetwarzania sygnałów. Przedstawiłem tam podstawowe problemy związane z przekształceniem Fouriera i jego związkami z przekształceniem Laplace'a i przekształceniem \mathcal{Z} . Omawiam także konsekwencje przetwarzania analogowo-cyfrowego mierzonych sygnałów. Duża część rozdziału jest poświęcona problematyce filtracji cyfrowej, gdzie zamieszczam kilka przykładów ilustrujących sposoby projektowania i analizy filtrów cyfrowych. W zakończeniu podałem krótkie wprowadzenie do zagadnień przekształcenia czasowo-częstotliwościowego, a w szczególności przekształcenia falkowego. To nowe narzędzie jest coraz częściej stosowane w omawianych tu zastosowaniach.

W rozdziale 3 przedstawiłem podstawowe techniki stosowane w szybkich procedurach pomiaru wielkości elektrycznych. Dużo uwagi poświęcam metodzie najmniejszych kwadratów, której różne warianty są podstawą wielu algorytmów stosowanych w automatyce elektroenergetycznej. Opisuję również inne narzędzia używane do estymacji parametrów sygnału, jak: różniczkowanie, wykorzystanie sygnałów przesuniętych w czasie, obserwatory stanu oraz filtry Kalmana.

W rozdziale 4 omawiam podstawowe algorytmy, w których wykorzystuje się metody przedstawione w rozdziale 3 do estymacji wielkości kryterialnych, takich jak: amplituda prądu lub napięcia, wartość skuteczna, moc, impedancja, częstotliwość itp.

Ważnym założeniem w syntezie omawianych algorytmów pomiarowych jest krótki czas pomiaru (około jednego okresu składowej podstawowej napięcia sieci). W rozdz. 5 omawiam konsekwencje tego założenia, które sprowadzają się do rozwikłania dylematu: szybciej, czy dokładniej. Pokazuję tam niektóre sposoby korekcji błędów standardowych metod pomiarowych, które mogą prowadzić do efektywnych algorytmów.

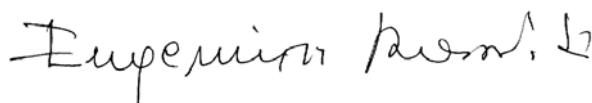
W rozdziale 6, ostatnim, przedstawiam problematykę zastosowania metod sztucznej inteligencji w automatyce elektroenergetycznej. Prezentuję tam skrótowo zagadnienia związane z zastosowaniem systemów ekspertowych, natomiast więcej uwagi poświęcam wykorzystaniu systemów rozmytych oraz sztucznych sieci neuronowych.

W wielu miejscach tekstu starałem się nie pomijać, niekiedy zawiłych, wyprowadzeń algorytmów. Chciałem w ten sposób dać Czytelnikowi odpowiedni aparat analityczny, który umożliwi mu uczestniczenie w fascynującej przygodzie samodzielnego projektowania nowych, doskonałych metod pomiarowych i decyzyjnych. Nie muszą być one przecież ograniczone do rozważanych tu zastosowań. Z drugiej strony, najważniejsze gotowe do stosowania procedury są podane w postaci wydzielonych algorytmów.

Książka, którą przedstawiam Czytelnikowi, jest rezultatem moich doświadczeń, które zdobywałem w określonym środowisku zawodowym. Z całym przekonaniem mogę powiedzieć, że wszyscy, z którymi się spotykałem z racji kontaktów zawodowych, są w jakiejś mierze jej autorami i chcę im w tym miejscu podziękować. Dziękuję przede wszystkim moim kolegom z Zakładu Automatyki i Sterowania w Instytucie Energoelektryki Politechniki Wrocławskiej za niepowtarzalną atmosferę pracy i koleżeństwa, którą wytworzyli. W sposób szczególny chcę podziękować moim kolegom z zespołu badawczego w składzie: dr hab. inż. Jan Iżykowski ze wspomnianego Zakładu, dr inż. Bogdan Kasztenny z GE Power Management (Markham, Kanada) oraz dr inż. Murari M. Saha z ABB (Västerås, Szwecja), w którym to gronie powstało wiele koncepcji, składających się na tę książkę.

Na zakończenie chcę również podziękować profesorowi Józefowi Korbiczowi oraz profesorowi Janowi Machowskiemu za przychylną ocenę i uwagi redakcyjne.

Wrocław, maj 2002 r.



Wykaz ważniejszych oznaczeń

$a = \frac{2\pi}{N}$	–	kąt pomiędzy sąsiednimi próbkami sygnału
N	–	liczba próbek w okresie podstawowej harmonicznej sygnału
T_1	–	okres składowej podstawowej sygnału
$h, h(i)$	–	funkcja impulsowa filtru
h_c, h_s	–	funkcje impulsowe filtrów składowych ortogonalnych
$x_c(k), x_s(k)$	–	składowe ortogonalne sygnału zespolonego
$X_c(k), X_s(k)$	–	składowe ortogonalne amplitudy zespolonej
$X, X(k)$	–	amplituda sygnału
$\underline{X}, \underline{X}(k)$	–	amplituda zespolona sygnału
T	–	okres próbkowania sygnału
f_T	–	częstotliwość próbkowania
T_a	–	stała czasowa tłumienia składowej aperiodycznej
ω	–	pulsacja sygnału
ω_1	–	pulsacja składowej podstawowej sygnału
$\omega' = \omega / \omega_1$	–	pulsacja względna
$\underline{x}(t)$	–	sygnał zespolony ciągły
$\underline{x}(k)$	–	sygnał zespolony dyskretny
$\underline{x}^*(k)$	–	funkcja zespolona sprzężona
$x(t)$	–	rzeczywisty sygnał ciągły
$\delta(t)$	–	sygnał impulsowy
$H(j\omega)$	–	funkcja przejścia filtru (funkcja zespolona)
$H(\omega)$	–	charakterystyka zerowo-fazowa filtru
$A(\omega), B(\omega)$	–	obwiednie: górna i dolna, charakterystyki częstotliwościowej estymatora amplitudy
$\underline{Z}_0, \underline{Z}_1, \underline{Z}_2$	–	impedancje składowych symetrycznych
R_F	–	rezystancja zwarcia
\underline{x}_s	–	wektor przestrzenny systemu trójfazowego

f_0	–	częstotliwość znamionowa sygnału
$X(j\omega)$	–	widmo sygnału, funkcja zespolona
$X_r(\omega), X_i(\omega)$	–	składowa rzeczywista i urojona widma sygnału (funkcje rzeczywiste)
$\mathcal{F}\{x(t)\}$	–	transformata Fouriera sygnału $x(t)$
$\mathcal{L}\{x(t)\}$	–	transformata Laplace'a sygnału $x(t)$
$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$	–	transformata odwrotna Laplace'a funkcji $X(s)$
$X(z) = \mathcal{Z}\{x(k)\}$	–	transformata \mathcal{Z} sygnału $x(k)$
$X(e^{j\omega T})$	–	widmo sygnału dyskretnego
$x_1(t) * x_2(t)$	–	splot funkcji (sygnałów)
Ω	–	pulsacja filtru analogowego
\mathbf{A}, \mathbf{a}	–	macierz, wektor
$\mathbf{A}^T, \mathbf{a}^T$	–	macierz, wektor, transponowane
\mathbf{Q}	–	macierz kowariancji zakłóceń procesu
\mathbf{R}	–	macierz kowariancji zakłóceń pomiarowych
$E[v(k)]$	–	wartość oczekiwana zmiennej $v(k)$
$\sigma_v^2(k)$	–	wariancja zmiennej $v(k)$
$CWx(p, \tau)$	–	ciągła transformata falkowa funkcji $x(t)$
$\psi_{p\tau}(t)$	–	falka o współczynniku skali p i przesunięciu τ
DWx_{jn}	–	dyskretna transformata falkowa funkcji $x(k)$
$\mu_F(x)$	–	funkcja przynależności elementu x do zbioru rozmytego F
$A \cup B$	–	suma zbiorów
$A \cap B$	–	przecięcie zbiorów
\bar{A}	–	dopełnienie zbioru A
$\text{dil}(A)$	–	funkcja rozcieńczania zbioru rozmytego A
$\text{con}(A)$	–	funkcja koncentracji zbioru rozmytego A
$V \times U$	–	iloczyn kartezjański zbiorów

Rozdział 1

WPROWADZENIE DO ELEKTROENERGETYCZNEJ AUTOMATYKI ZABEZPIECZENIOWEJ

1.1 Uwagi wstępne

System elektroenergetyczny obejmuje trzy obszary działań, które wspólnie mają na celu zasilanie odbiorców w energię elektryczną. Niezależnie od zachodzących ostatnio zmian w technologii wytwarzania energii elektrycznej i wprowadzania rynkowych zasad sterowania popytem i podażą energii, obszary te nadal łączy się z wytwarzaniem, przesyłem i rozdziałem energii elektrycznej. W przeważającym zakresie odbywa się to za pośrednictwem trójfazowego systemu prądu przemiennego o ustalonej częstotliwości znamionowej 50 Hz (w niektórych krajach 60 Hz).

Charakterystyczną cechą procesu, który zachodzi w systemie elektroenergetycznym jest równowaga pomiędzy wytwarzaniem i odbiorem energii elektrycznej. Zachwianie tej równowagi powoduje zakłócenie pracy systemu, co może prowadzić do uszkodzenia poszczególnych obiektów, a nawet utraty połączeń pomiędzy głównymi jego elementami (awarii systemowej). Nierównowaga objawia się w postaci statycznej lub dynamicznej zmiany częstotliwości prądu i napięcia. Ta ostatnia wiąże się z kołysaniem wirników generatorów w elektrowniach, przez co rozumie się oscylacyjną zmianę ich prędkości obrotowej. Ze względu na połączenie generatorów z odpowiednimi układami napędowymi mówi się w takim przypadku o elektromechanicznych stanach przejściowych systemu. W celu zachowania równowagi systemu, zapewnienia optymalnych warunków jego pracy oraz wymuszenia odpowiedniej wymiany energii w systemach połączonych, stosuje się różne układy kontrolne, które tworzą automatykę elektroenergetyczną (systemową).

W przypadku zmiany konfiguracji sieci, wywołanej przełączeniami lub zdarzeniami awaryjnymi, w obwodach elektrycznych zachodzą procesy elektromagnetyczne, których gwałtowność zależy od parametrów tych obwodów i mocy odpowiednich źródeł. Typowymi przyczynami takich zakłóceń są zwarcia, w wyniku których mogą wystąpić prądy, przekraczające nawet stukrotną wartość prądu znamionowego. Dynamiczne i ciepłe działania takich prądów mogą spowodować olbrzymie szkody, jeśli zwarcie nie zostanie w porę wyłączone. Ponadto, zwarcie w systemie przesyłowym powoduje gwałtowną nierównowagę mocy całego systemu, co może prowadzić do utraty jego stabilności dynamicznej, a w konsekwencji, nawet do awarii systemowej. Szybka lokalizacja zwarcia i wyłączenie zwartego odcinka systemu jest podstawowym zadaniem zabezpieczeń zwarciovych.

Koncepcje zabezpieczeń elektroenergetycznych były doskonalone wraz z rozwojem systemu. Zaczynając od bezpieczników topikowych (które nadal są z powodzeniem stosowane, zwłaszcza w obwodach niskiego napięcia), powstały złożone zabezpieczenia przekaźnikowe, za które użytkownicy są gotowi zapłacić całkiem spore kwoty. Równoległe rozwinęła się gałąź wiedzy i praktyki inżynierskiej, która zajmuje się zagadnieniami projektowania przekaźników i systemów zabezpieczeniowych, określania koncepcji działania zabezpieczeń, ich koordynacji, testowania, analizy działania oraz problemami normalizacyjnymi. W polskiej literaturze całą tę problematykę przyjęto określać terminem Elektroenergetyczna Automatyka Zabezpieceniowa (EAZ) [29], [35], [40], [43].

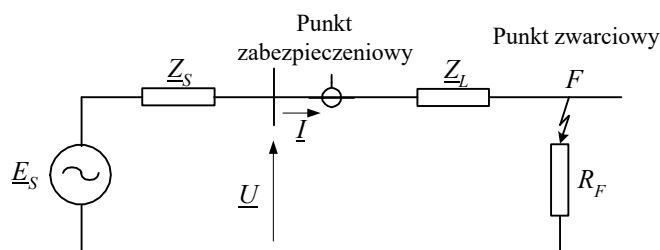
W niniejszym rozdziale podane są ogólne informacje z zakresu zakłóceń w systemie elektroenergetycznym, koncepcji funkcjonowania układów automatyki zabezpieczeniowej, ich struktury i niektórych parametrów technicznych. Przedstawiono także podstawowe kryteria stosowane w przekaźnikach zabezpieczeniowych do wykrywania rodzaju i miejsca wystąpienia zakłócenia.

1.2 Zakłócenia w systemie elektroenergetycznym

1.2.1 Pojęcia podstawowe

Z punktu widzenia podstawowych funkcji rozpatrywanych tu układów automatyki, najistotniejsze znaczenie mają zakłócenia w postaci zwarc w elementach systemu elektroenergetycznego. Stopień zagrożenia wywołany wystąpieniem zwarcia zależy od energii uwalniającej się w

obwodzie zwarciovym. Decydują o tym dwa parametry: wartość napięcia ekwiwalentnego źródła zasilającego miejsce zwarcia oraz wartość zastępczej impedancji pętli zwarcioviej. Do analizy warunków działania zabezpieczeń, obwód elektryczny utworzony w wyniku zwarcia jest dzielony na dwie części (rys. 1.1): system zasilający z ekwiwalentnym źródłem napięcia \underline{E}_S i impedancją sytemu \underline{Z}_S oraz pętla zwarciovia, charakteryzowana przez impedancję pomiędzy miejscem zainstalowania przełącznika a punktem zwarcia \underline{Z}_L i rezystancję zwarcia R_F (najczęściej przyjmuje się, że impedancja zwarcia ma tylko składową rzeczywistą). Impedancja ekwiwalentnego źródła przyłączonego do danych szyn jest najczęściej charakteryzowana za pomocą wartości mocy zwarcia trójfazowego bezpośredniego (z zerową rezystancją przejścia) $S_{k3} = \sqrt{3}U_N I_{k3} = U_N^2 / Z_S$, gdzie U_N jest napięciem znamionowym na szynach (wartość skuteczna napięcia międzyprzewodowego), a I_{k3} jest wartością skuteczną prądu zwarcia trójfazowego. Moc zwarciovia na szynach stacji elektroenergetycznej jest bardzo ważnym parametrem, na podstawie którego, między innymi, dobierane są zainstalowane tam wyłączniki. Sterowane przez zabezpieczenia wyłączniki muszą szybko, pewnie i bez uszkodzenia wyłączać maksymalny spodziewany prąd zwarciovia.



Rys. 1.1. Schemat zastępczy obwodu zwarciovego

W przypadku systemu trójfazowego, zastępczy obwód zwarciovia powinien uwzględniać rodzaj zwarcia: jednofazowe (faza – ziemia), międzyfazowe, międzyfazowe z ziemią lub trójfazowe. W maszynach elektrycznych mogą wystąpić również zwarcia zwojowe. Analizę komplikuje także ewentualne źródło zasilania umieszczone z przeciwległej strony obwodu zwarciovego. Do reprezentacji takich obwodów zwarciovych stosuje się różne metody przekształcenia obwodu trójfazowego, prowadzące do uproszczenia zapisu odpowiednich równań. Powszechnie stosuje się w tym celu przekształcenie składowych symetrycznych lub składowych 0 , α , β [6], [18], [21], [34].

Techniki stosowane w automatyce zabezpieczeniowej do identyfikacji i likwidacji awarii muszą uwzględniać różne cechy obserwowanego zwarcia. Niektóre z nich są związane z charakterem zabezpieczanego obiektu, inne wynikają ze sposobu przebiegu zdarzenia. Z tego punktu widzenia zwarcia można podzielić na dwie następujące kategorie.

- **Pod względem spodziewanej wartości prądu zwarciovego:**

- *Zwarcia wielkopięrdowe*, których wartości mogą wielokrotnie przekraczać wartości znamionowe prądów lub dopuszczalne obciążenia elementów systemu [35]. Są to przede wszystkim zwarcia międzyfazowe lub zwojowe. W sieciach trójfazowych pracujących z uziemionym punktem neutralnym dotyczy to także zwarć doziemnych.
- *Zwarcia doziemne małopięrdowe*, które występują w sieciach pracujących z izolowanym lub pośrednio uziemionym punktem neutralnym [29], [35]. W takim przypadku impedancja pętl zwarciovych ma zazwyczaj charakter pojemnościowy (zasadnicza część prądu doziemienia zamyka się przez pojemności elementów sieci), a wartość tego prądu jest niewielka. Niekiedy dopuszczalna jest w tych warunkach długa praca układu, jednak zachodzące przy tym procesy (niszczenie izolacji) powodują powolną degradację jego elementów lub powstanie zwarć międzyfazowych.

- **Pod względem przebiegu zjawiska:**

- *Zwarcia trwałe*, które są wynikiem ewidentnego uszkodzenia izolacji, przerwania i upadku przewodu lub błędów obsługi. Zwarcia trwałe wielkopięrdowe muszą być jak najszybciej zlokalizowane i wyłączone.
- *Zwarcia przemijające* są inicjowane przez takie czynniki, jak chwilowe przepięcia lub pogorszenie stanu izolacji i mogą być usunięte lub zaniknąć samoczynnie po ich ustąpieniu. Typowymi przyczynami takich zwarć jest uderzenie pioruna, upadek gałęzi lub obecność zwierząt (ptaków, gryzoni). Do przywrócenia zasilania po wyłączeniu zwarcia przemijającego stosuje się Automatyczne Powtórne Załączenie (SPZ) (ang. *automatic reclosing*). Po krótkiej przerwie po wyłączeniu zwarcia przez zabezpieczenie (w czasie której może nastąpić dejonizacja obszaru związanego z łukiem zwarciovym) następuje ponowne załączenie obwodu. Jeśli zwarcie nie ustąpiło, to wyłącznik jest ponownie otwierany.

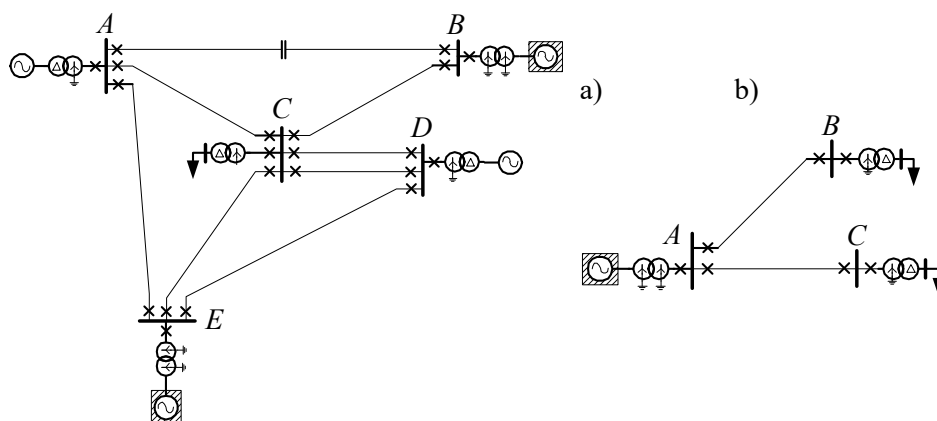
Oprócz zwarć występują również inne zakłócenia w systemie elektroenergetycznym. Niektóre z nich wymagają interwencji zabezpieczeń przekąźnikowych (jak chociażby przeciążenia elementów systemu, czy praca niepełnofazowa); inne mogą mieć istotny wpływ na pracę systemu i związanych z nim układów automatyki (odchylenia częstotliwości, kołysanie

mocy i inne). Poniżej pokrótce przedstawione są te zakłócenia, którym towarzyszą typowe stany przejściowe prądów i napięć. Analiza takich przebiegów jest podstawą formułowania modeli sygnałowych w procesie syntezy algorytmów pomiarowych układów automatyki elektroenergetycznej.

Analiza zjawisk przejściowych w systemie elektroenergetycznym jest prowadzona w oparciu o modele poszczególnych elementów systemu i równań powiązań wynikających z teorii obwodów. Problemy te są szczegółowo omawiane w literaturze specjalistycznej [4], [6], [21], [23], [34]. Należy podkreślić, że do celów analizy i projektowania układów automatyki elektroenergetycznej powszechnie stosuje się technikę komputerowego modelowania zjawisk przejściowych w układach elektroenergetycznych [10]. Modele takie pozwalają dostatecznie wiernie odtworzyć procesy zachodzące w analizowanym systemie, a także w poszczególnych elementach współpracującego z nim układu automatyki.

1.2.2 Zwarcia w systemie przesyłowym

Dobór i warunki pracy układów automatyki elektroenergetycznej zależą w dużym stopniu od konfiguracji systemu. W przypadku sieci przesyłowych jest to zazwyczaj system zamknięty (rys. 1.2a), rzadziej promieniowy, z jednostronnym zasilaniem (rys. 1.2b).



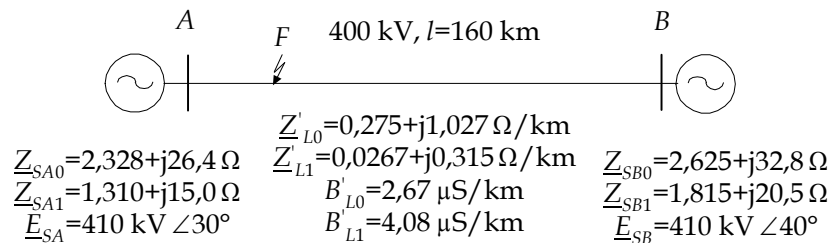
Rys. 1.2. Konfiguracja systemu przesyłowego: sieć zamknięta (a) oraz sieć promieniowa (b)

Charakterystyczną cechą sieci przesyłowej jest bezpośrednie uziemienie punktu neutralnego. Konsekwencją tego jest niska impedancja pętli

zwarcia doziemnego i ograniczenie związanych z tym przepięć w fazach zdrowych. Ilustruje to poniższy przykład.

Przykład 1.1. Zbadać prądy i napięcia towarzyszące zwarcia $L1-E$ w systemie przesyłowym 400 kV, którego schemat zastępczy jest pokazany na rys. 1.3. Parametry systemu są podane na rysunku; rezystancja zwarcia $R_F = 2\Omega$. Punkt zwarcia jest oddalony o 32 km od stacji A.

Do analizy przebiegu prądów i napięć związanych z rozpatrywanym zwarcie zostało zastosowany program EMTP [10]. Linia jest reprezentowana w postaci modelu o parametrach rozłożonych z założeniem, że jest ona transponowana – model Clarke [2]. Przyjęto krok modelowania $\Delta T = 30 \mu s$.



Rys. 1.3. Schemat zastępczy fragmentu systemu przesyłowego 400 kV

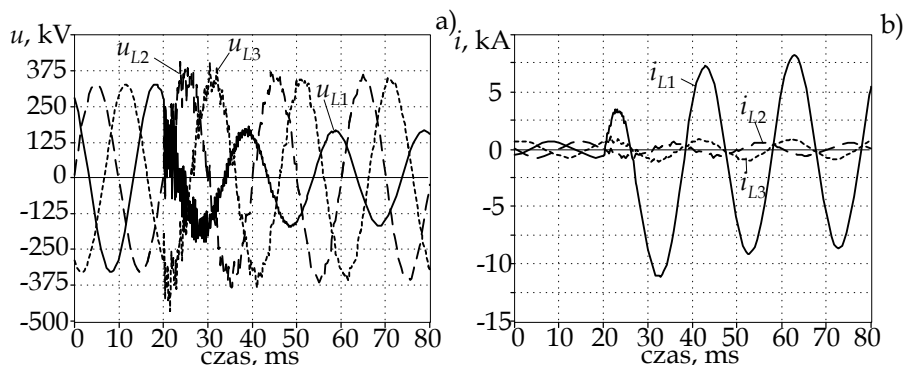
Uzyskane przebiegi napięć i prądów, obserwowane w stacji A są pokazane na rys. 1.4. Zwarcie następuje w czasie $t_z = 20$ ms. Widać intensywny stan przejściowy w przebiegach napięciowych, co jest związane z tym, że napięcie u_{L1} w momencie zwarcia miało dużą wartość i następuje rozładowanie energii pojemnościowej. Dzięki sprzężeniu między fazami systemu trójfazowego, proces ten przenosi się także na fazy zdrowe. Przebiegi prądów są w tym czasie znacznie mniej odkształcone – można jedynie zaobserwować obecność tłumionej składowej stałej w prądzie zwartej fazy.

Należy zauważyć, że analizowane przebiegi w formie pokazanej na rys. 1.4 nie są dostępne przez człony pomiarowe zabezpieczeń z dwóch podstawowych względów:

- w obwodach wejściowych zabezpieczeń znajdują się przekładniki pomiarowe, które mają na ogół dolnoprzepustową charakterystykę widmową (odnosi się to zwłaszcza do pojemnościowych przekładników napięciowych);
- częstotliwość próbkowania, stosowana we współczesnych układach automatyki elektroenergetycznej, waha się w granicach 16 – 64 próbek w okresie podstawowej harmonicznej napięcia, co dla systemu o częstotliwości 50 Hz odpowiada częstotliwości próbkowania 800-3200 Hz;

analogowe filtry odcinające w torach pomiarowych zawężają to widmo jeszcze ponad dwukrotnie (p. 2.2).

W rezultacie, przebiegi na wejściu cyfrowego układu pomiarowego są znacznie mniej odkształcone w porównaniu z tymi z rys. 1.4.



Rys. 1.4. Przebiegi napięć (a) i prądów (b) obserwowane w stacji A

Powyższe uwagi odnoszą się również do danych rejestrowanych przez rejestratory przebiegów zwarciovych. W tym jednak przypadku częstotliwość próbkowania jest zazwyczaj znacznie większa: 5-10 kHz. □

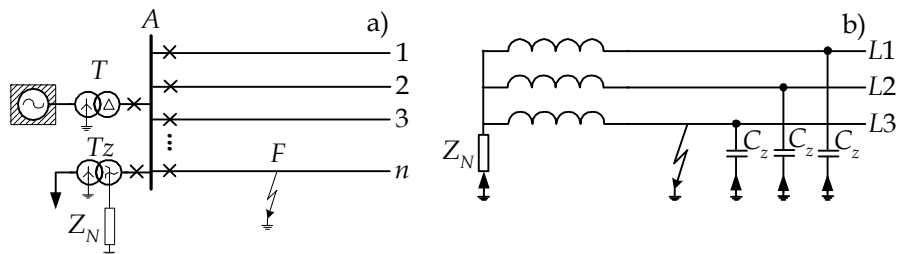
Podobne zjawiska występują również w odniesieniu do zwarć międzyfazowych. Można wówczas oczekiwać nawet większych wartości prądów zwarciovych, gdyż na ogół, zarówno w liniach kablowych, jak i w liniach napowietrznych, impedancja przewodu powrotnego dla zwarcia doziemnego (płaszcz kabla lub ziemia) jest większa od impedancji przewodu fazowego. W konsekwencji, wszystkie zwarcia (jednofazowe i międzyfazowe) w systemie przesyłowym mają charakter zwarć wieloprądowych.

Na schematach z rys. 1.2 pokazane są wszystkie podstawowe elementy systemu przesyłowego. Z punktu widzenia automatyki elektroenergetycznej, na uwagę zasługują zwłaszcza dwa z nich: linia równoległa CD oraz linia AB z szeregową kompensacją pojemnościową. Pierwsza z nich wymaga specyficznego podejścia do rozwiązania układów zabezpieczeniowych (a także lokalizatorów miejsca zwarcia) ze względu na występujące sprzężenie pojemnościowe i indukcyjne pomiędzy obwodami obu równoległych linii, a także zmienne warunki jej pracy (przy możliwym wyłączeniu jednej linii). Szeregową kompensację pojemnościową w liniach jest stosowana w celu zwiększenia ich zdolności przesyłowej i poprawy warunków stabilnej pracy systemu (kondensatory wprowadzone we wszystkich fazach linii zmniejszają jej reaktancję). Niestety, w

rezultacie otrzymuje się układ, którego charakterystyki zarówno w stanie ustalonym jak i w warunkach stanu przejściowego po wystąpieniu zwarcia, niekiedy znacznie różnią się od podobnych parametrów występujących w tradycyjnym systemie. To znacznie komplikuje odpowiednie rozwiązania układów automatyki elektroenergetycznej [5], [28], [35]. W krajowym systemie elektroenergetycznym nie występują linie z szeregową kompensacją pojemnościową.

1.2.3 Zwarcia doziemne w sieciach rozdzielczych

W sieciach rozdzielczych średnich napięć (ŚN) (o napięciu znamionowym w zakresie 1-60 kV) punkt neutralny systemu trójfazowego nie jest bezpośrednio uziemiony, co jest przede wszystkim podyktowane wymaganiami ochrony przeciwporażeniowej. Uzwojenia transformatorów na tym napięciu są zazwyczaj połączone w trójkąt. Wówczas sieć jest całkowicie izolowana od ziemi. W ogólnym przypadku, do ustalenia warunków pracy punktu neutralnego są stosowane dodatkowe transformatory uziemiające, które służą również do zasilania potrzeb własnych stacji (transformator T_z na rys. 1.5a). Punkty gwiazdowe tych transformatorów są uziemione przez rezystancję lub dławik indukcyjny (cewkę gasikową), co ogranicza prąd zwarcia doziemnego w zakresie od kilku do kilkuset amperów [17], [29].

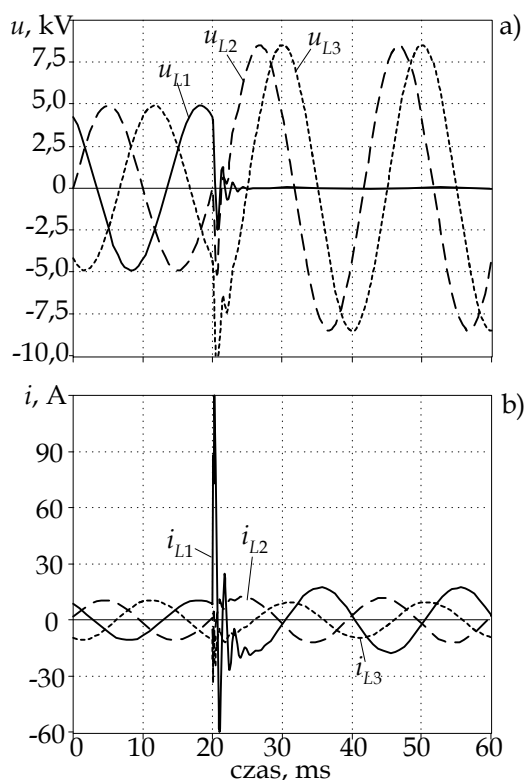


Rys. 1.5. Schemat zastępczy sieci ŚN (a) oraz rozpływ prądów podczas doziemienia jednej fazy (b)

Wielkość i charakter prądu doziemienia, a także prądu płynącego w punkcie gwiazdowym transformatora uziemiającego zależy od charakteru i wielkości impedancji Z_N . W przypadku sieci z izolowanym punktem neutralnym ($Z_N = \infty$), prąd doziemienia w całości zamyka się przez pojemności doziemne (i międzyfazowe) faz zdrowych uszkodzonej linii i pozostałych linii w sieci. W sieciach ŚN kompensowanych punkt

neutralny jest połączony z ziemią poprzez dławik kompensacyjny ($Z_N = X_N$), tak, że prąd indukcyjny płynący przez punkt gwiazdowy równoważy prąd pojemnościowy faz zdrowych i prąd zwarciaowy jest bliski zera (odnosi się to do podstawowej harmonicznej prądu i zależy to od stopnia kompensacji). W przypadku uziemienia rezystancyjnego ($Z_N = R_N$) prąd zwarcia doziemnego jest ograniczany do kilkuset amperów. Wszystkie te przypadki zaliczane są do grupy zwarcć doziemnych małopądowych.

Typowe przebiegi napięć i prądów towarzyszących doziemieniu jednej fazy w sieci ŚN pracującej z izolowanym punktem neutralnym są pokazane na rys. 1.6. Widać, że występujący w tym przypadku stan przejściowy jest intensywny i krótkotrwały.



Rys. 1.6. Przebieg napięć (a) i prądów (b) w linii ŚN podczas doziemienia fazy $L1$.

Powstające oscylacje prądów są wynikiem rozładowania zastępczych pojemności zwartej fazy i ładowania pojemności faz zdrowych. Amplitudy i relacje fazowe przebiegów prądowych przed i po zwarcu różnią się

nieznacznie. Istotne różnice występują natomiast w amplitudach napięć fazowych. Czynnikiem ten nie można jednak wykorzystać do identyfikacji zwartej linii, gdyż dotyczy on w równym stopniu wszystkich linii przyłączonych do wspólnych szyn rozdzielni. Pokazane przebiegi mogą być znacznie bardziej złożone jeśli zachodzi charakterystyczne dla tego typu sieci zwarcie o łuku przerywanym. Wówczas przedstawiony proces przejściowy może być inicjowany w każdym półokresie napięcia zasilającego miejsce zwarcia doziemnego.

Duża różnorodność warunków pracy sieci ŚN, ich zmienna konfiguracja, zmienne obciążenie i częste przełączenia sprawiają, że zjawiska przejściowe towarzyszące zwarciom mogą się znacznie różnić od siebie. Ponadto, obszary zjawisk związanych ze zwarciami doziemnymi często nakładają się na obszary stanów przejściowych towarzyszących przełączeniom eksploatacyjnym lub normalnej pracy nieliniowych odbiorów. To znacznie utrudnia jednoznaczny identyfikację zwarć doziemnych w tego typu sieciach i nadal jest dużym wyzwaniem dla konstruktorów automatyki zabezpieczeniowej tych obiektów [17], [29], [35].

Należy zauważyć, że zwarcia międzyfazowe w sieciach ŚN nie odbiegają swoim charakterem od zwarć w liniach przesyłowych i również należą do grupy zwarć wielkoprądowych.

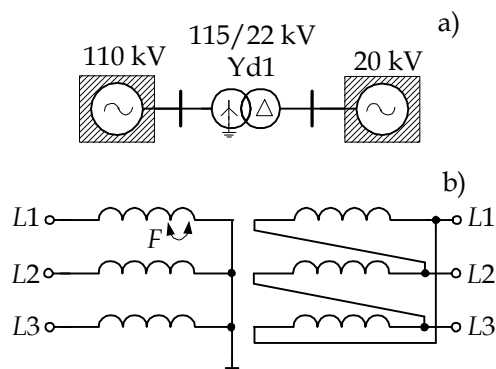
1.2.4 Zwarcia w maszynach elektrycznych

Zwarcia w uzwojeniach maszyn elektrycznych (transformatorów, generatorów i silników) są wynikiem zniszczenia ich izolacji. Jeśli chodzi o zwarcia doziemne (między fazą i obudową, rdzeniem stojana lub wirnika), to podobnie jak w sieciach, ich charakter zależy od sposobu uziemienia punktu neutralnego odpowiedniego uzwojenia maszyny [42]. Sieć związana z uzwojeniem stojana generatora pracuje zazwyczaj w podobnych warunkach, jak omawiane powyżej sieci ŚN, to znaczy, nie jest bezpośrednio uziemiona. Uszkodzenia izolacji współczesnych generatorów zdarzają się niezwykle rzadko, jednak związane z tym awarie połączone są z dużymi kosztami [42].

Groźnymi w skutkach są również zwarcia zwojowe, gdyż towarzyszą im duże prądy, które są trudne do identyfikacji na drodze pomiaru wielkości elektrycznych na zaciskach maszyny. Ilustruje to poniższy przykład.

Przykład 1.2. Przeprowadzić analizę prądów podczas zwarcia zwojowego w transformatorze.

Do analizy wybrano transformator Yd1 115/22 kV o mocy znamionowej 32 MVA. Badanie zostało przeprowadzone na modelu wykonanym za pomocą



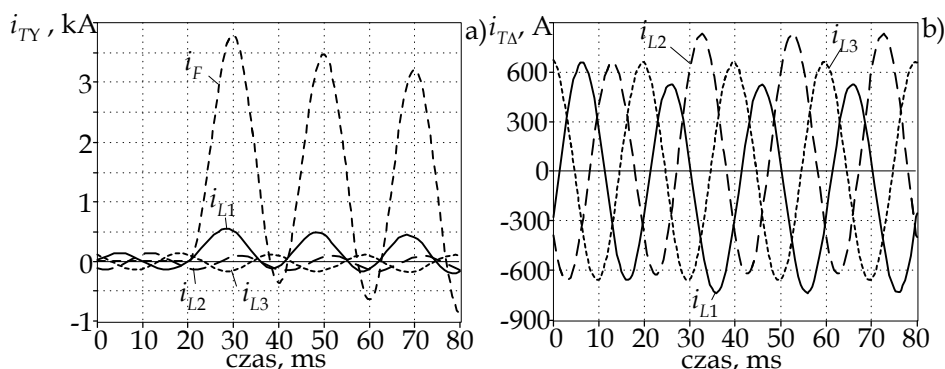
Rys. 1.7. Schemat zastępczy analizowanego systemu (a) oraz schemat połączeń uzwojeń transformatora z zaznaczonym miejscem zwarcia (b)

programu EMTP. Schemat analizowanego systemu jest pokazany na rys. 1.7a. Model został przygotowany w formie transformatora trójzwojeniowego, co umożliwia dzielenie uzwojeń w celu symulacji zwarcia części zwojów [19].

Przyjęto, że zwarte zostaje 8% uzwojenia fazy L1 połączonego w gwiazdę (rys.1.7b). Należy jednak zaznaczyć, że wewnętrzna struktura transformatora nie jest odzwierciedlona w modelu (co wpływa na rozkład pola magnetycznego uzwojenia) i powyższy udział zwartych zwojów należy traktować jedynie orientacyjnie.

Nie wpływa to jednak na ogólny obraz zjawiska. Przyjęto, że rezystancja zwarcia jest reprezentowana opornikiem o wartości $0,1\Omega$.

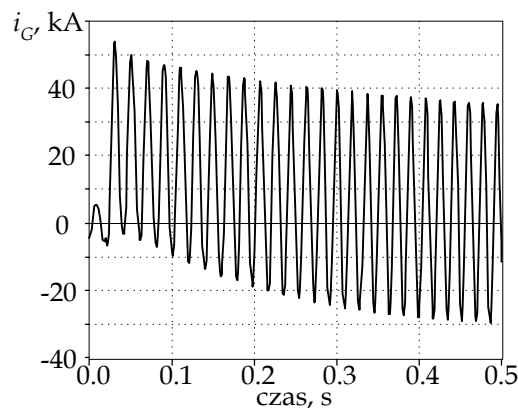
Przebiegi prądów po obu stronach transformatora podczas analizowanego zwarcia jest pokazany na rys. 1.8. Jest tam również pokazany przebieg prądu i_F w miejscu zwarcia (rys. 1.8a).



Rys. 1.8. Przebiegi prądów w transformatorze podczas zwarcia zwojowego

Można zauważyć, że amplituda tego prądu wielokrotnie przekracza amplitudy prądów obserwowanych na zaciskach transformatora. Jeśli wziąć pod uwagę fakt, że prądy transformatora mogą się znacznie zmieniać wraz ze zmianą jego obciążenia, to łatwo zauważyć, że analizowane zwarcie, które szybko prowadzi do zniszczenia uszkodzonego uzwojenia, jest trudne do identyfikacji na drodze bezpośredniego pomiaru na zaciskach transformatora. □

Zwarcia w pobliżu generatorów charakteryzują się dużymi prądami. Ze względu na mały udział rezystancji w impedancji obwodu zwarcio-
wego, w przebiegach tych prądów mogą występować składowe aperi-
odyczne o długich czasach zanikania. Ponadto, na przebieg tych prądów
mają wpływ stałe czasowe obwodów schematu zastępczego generatora
oraz oddziaływanie układu automatycznej regulacji wzbudzenia (ARW)
oraz, w dłuższym okresie, układu regulacji prędkości obrotowej turbiny.
Typowy przebieg prądu jednej fazy generatora w przypadku trójfazo-
wego zwarcia na jego zaciskach jest pokazany na rys. 1.9. Przebieg ten
uzyskano z modelu generatora 265 MVA, 24 kV z włączonym układem
regulacji wzbudzenia i prędkości obrotowej turbiny. Widać duży udział
składowej nieokresowej z długim czasem zanikania. Jej amplituda po-
czątkowa zależy od fazy napięcia w momencie zwarcia. W analizowanym
okresie nastąpiła zmiana prędkości obrotowej o około 5% i jej wpływ nie
jest zauważalny. Pokazany przebieg może się różnić w zależności od spo-
sobu zasilania regulatora wzbudzenia [18], [23].

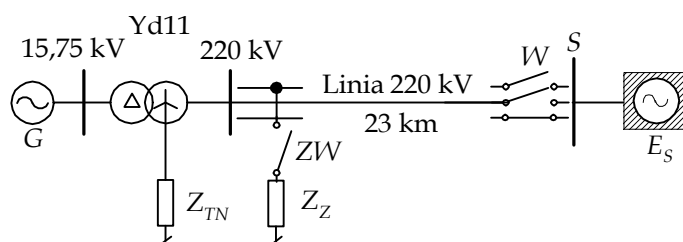


Rys. 1.9. Przebieg prądów jednej fazy podczas zwarcia trójfazowego na zaciskach generatora

W przypadku maszyn wirujących bardzo groźne następstwa mogą mieć zakłócenia w ich sąsiedztwie, które prowadzą do niesymetrycznego zasilania (w przypadku silników) lub obciążenia (w przypadku generatorów). Tego typu zakłócenia mogą powodować występowanie dużych prądów kolejności przeciwnej w uzwojeniu stojana generatora lub silnika, co powoduje pojawienie się w zamkniętym obwodzie wirnika (a także w jego rdzeniu) prądów o podwójnej częstotliwości. Zwłoka w wyłączeniu maszyny pracującej w takich warunkach szybko prowadzi do jej trwałego uszkodzenia. Poniższy przykład podaje konsekwencje takiego zdarzenia, które miało miejsce w jednej z krajowych elektrowni.

Przykład 1.3. Opisywane zdarzenie miało miejsce podczas próby planowego wyłączenia generatora z pracy. Błędne działanie wyłącznika i brak właściwych rozwiązań w zakresie automatyki zabezpieczeniowej, doprowadziło do awarii generatora i całkowitego zniszczenia bloku elektrowni o mocy 235 MVA [22]. Schemat układu z wyszczególnieniem elementów, które miały istotny wpływ na przebieg awarii, jest pokazany na rys. 1.10.

Dokładny przebieg zdarzenia jest trudny do odtworzenia, gdyż istotne dla sprawy parametry nie były rejestrowane lub wyniki rejestracji uległy zniszczeniu. Zgromadzone dane pozwoliły jednak zrekonstruować awarię na podstawie przeprowadzonych symulacji [22]. Uzyskane przebiegi wartości skutecznych prądów składowej zgodnej i przeciwnej generatora są pokazane na rys. 1.11. Przebieg zdarzeń można podzielić na następujące etapy.



Rys. 1.10. Schemat połączenia generatora z rozdzielnią 220 kV

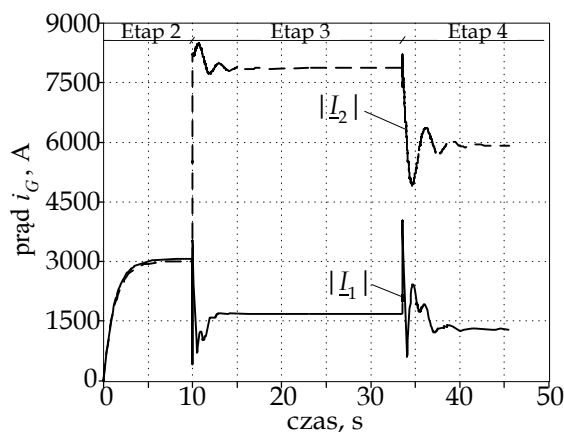
Etap 1. W celu wyłączenia z pracy generatora, jego obciążenie zostało zredukowane do wartości bliskiej zero (jest to sygnalizowane przez układ kontroli kierunku przepływu mocy czynnej).

Etap 2. Odłączenie generatora od sieci następuje za pośrednictwem wyłącznika W , który znajduje się w rozdzielni 220 kV, odległej od elektrowni o 23 km. Obsługa podała sygnał na wyłączenie, a stan wyłączenia został następnie potwierdzony przez odpowiedni układ kontrolny. Niestety, ze względu na uszkodzenie wyłącznika, styki fazy $L3$ nie zostały rozwarne. Ten fakt nie był sygnalizowany obsłudze bloku w elektrowni.

Etap 3. Wyłączenie wzbudzenia generatora. Po tej czynności, napięcie na odłączonym generatorze powinno zaniknąć. Tak się jednak nie stało, gdyż generator pozostał połączony z systemem poprzez fazę $L3$ linii i transformator blokowy. Ze względu na sposób połączenia uzwojeń transformatora blokowego (Yd), generator był w tym etapie zasilany dwiema fazami i pracował jako silnik asynchroniczny z niesymetrycznym zasilaniem. Łączy się to z wystąpieniem w maszynie dużej wartości prądu składowej przeciwnej. Prowadzi to do szybkiego nagrzewania się żelaza i uzwojeń generatora.

Etap 4. Obsługa widząc za pośrednictwem przyrządów pomiarowych, że generator pozostaje obciążony, zastosowała procedurę jego awaryjnego wyłączenia.

Polegała ona w tym przypadku, na załączeniu zwieracza ZW , co spowodowało sztuczne zwarcie doziemne fazy $L1$ linii i w następstwie, jej wyłączenie przez zabezpieczenie za pośrednictwem wyłącznika W . Ze względu jednak na niesprawność wyłącznika, jego stan nie uległ zmianie. Ten etap charakteryzuje się skomplikowanym układem połączeń na odcinku generator-transformator-rozdzielnia ze zwarcie doziemnym przez zwieracz. Zwarcie to nie zostaje wyłączone przez zabezpieczenia znajdujące się w rozdzielni, ze względu na niesprawność wyłącznika generatora i brak tak zwanej *lokalnej rezerwy wyłącznikowej*. Jest to automatyka, która w tym przypadku, po stwierdzeniu obecności prądu w jednej fazie linii pomimo 'otwarcia wyłącznika', mogłaby spowodować odłączenie rozpatrywanego bloku od innych źródeł zasilania, znajdujących się w systemie. Stosunkowo mały prąd płynący w jednej fazie linii w kierunku generatora (zasilanie miejsca zwarcia odbywa się poprzez uzwojenia transformatora – rys. 1.10) okazał się dla niego zgubny, głównie ze względu na bardzo niszczącą pracę przy niesymetrycznych prądach.



Rys. 1.11. Amplitudy składowej zgodnej i przeciwnej prądów generatora

Gwałtowne nagrzewanie się wirnika doprowadziło do rozluźnienia mocowania uzwojeń i całkowitego zniszczenia generatora, turbiny i pobliskiego otoczenia. □

Przykład ten pokazuje, jak ważne w automatyce elektroenergetycznej są zagadnienia nie tylko poprawnej konstrukcji poszczególnych urządzeń, ale także odpowiednie rozwiązania układowe i diagnostyka.

1.3 Zadania elektroenergetycznej automatyki zabezpieczeniowej

1.3.1 Zadania automatyki eliminacyjnej

Poszczególne elementy systemu elektroenergetycznego są projektowane przy założeniu, że warunki ich pracy będą zbliżone do znamionowych. Odstępstwa od tych założeń mogą prowadzić do katastrofalnych skutków. Szczególnie groźne są zwarcia wieloprądowe, które prowadzą do wystąpienia prądów wielokrotnie przekraczających wartości znamionowe. Poprawne zaprojektowanie elementów systemu, jego należyta eksploatacja z zachowaniem przez obsługę wymaganych procedur, znacznie redukuje prawdopodobieństwo wystąpienia awarii, ale nie eliminuje ich całkowicie.

Zadaniem elektroenergetycznej automatyki zabezpieczeniowej jest szybkie wykrycie awarii jak najbliżej miejsca jej wystąpienia i jej odseparowanie od reszty systemu za pomocą wyłączników, w jak najkrótszym czasie. Opisana funkcja jest zadaniem tak zwanej automatyki eliminacyjnej, której działania obejmują przede wszystkim zwarcia, gdyż pośrodkowo personelu w likwidacji takich awarii nie może być brane pod uwagę. W wielu jednak przypadkach interwencja nie musi zachodzić natychmiast, gdyż dozwolona jest praca układu z obniżonymi parametrami, na przykład, z obniżoną rezystancją izolacji. W takim przypadku działanie układu automatyki sprowadza się do sygnalizacji wystąpienia określonego stanu lub sporządzenia odpowiedniego raportu.

Należy podkreślić, że zadaniem rozpatrywanych tu układów jest ograniczenie skutków awarii, a nie przeciwdziałanie wystąpieniu samych zagrożeń. Również ważną rolę zabezpieczeń przekaźnikowych jest ograniczenie wynikających z awarii zagrożeń dla obsługującego personelu i innych ludzi.

1.3.2 Funkcje dodatkowe przekaźników zabezpieczeniowych

Układy automatyki zabezpieczeniowej podejmują decyzje na podstawie zgromadzonych informacji o przebiegu zakłócenia. Te informacje są bardzo cenne dla podejmowania działań profilaktycznych i serwisowych. W celu ich wykorzystania, nowoczesne układy zabezpieczeń realizują także dodatkowe funkcje, z których najważniejsze to:

- rejestracja zakłóceń,

- lokalizacja miejsca zwarcia,
- monitorowanie zużycia wyłączników.

W przypadku przekaźników cyfrowych rejestracja zakłóceń jest prosta w realizacji. Przebiegi prądów i napięć są rejestrowane z zapisem czasu różnych zdarzeń w stacji elektroenergetycznej, co ułatwia określenie przyczyny wystąpienia zakłócenia.

Lokalizatory miejsca zwarcia są często standardowym wyposażeniem przekaźników do zabezpieczeń linii elektroenergetycznych. Czas wykonywania odpowiednich obliczeń, prowadzących do określenia odległości do miejsca zwarcia nie jest w tym przypadku krytyczny, wobec czego mogą być stosowane bardzo wyrafinowane algorytmy, pozwalające zredukować błąd oceny do ok. 1% [15]. Informacja o miejscu wystąpienia zwarcia trwałego pozwala ekipie naprawczej szybko usunąć uszkodzenie.

Zużycie wyłączników jest, między innymi, funkcją liczby wyłączeń oraz wartości przerywanych prądów. Obie te wielkości można łatwo rejestrować w przekaźniku, który steruje danym wyłącznikiem.

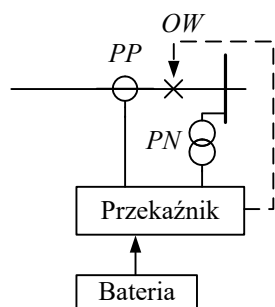
Należy zauważyć, że wraz z rozwojem technologii mikroprocesorowych, wzrasta liczba zadań dodatkowych, realizowanych przez tradycyjne przekaźniki zabezpieczeniowe.

1.4 Koncepcja zabezpieczeń przekaźnikowych

1.4.1 Struktura systemu zabezpieczeń

Mówiąc o zabezpieczeniu jakiegoś obiektu elektroenergetycznego należy rozróżnić układ (system) zabezpieczeń od przekaźnika zabezpieczeniowego (ang. *relay*). Elementy systemu zabezpieczeń są pokazane na rys. 1.12. W ogólnym przypadku, sygnały pomiarowe mogą pochodzić z kilku jedno- lub trójfazowych zestawów przekładników prądowych i napięciowych, a wyjście przekaźnika może być podawane na kilka grup wyłączników trójfazowych. Przykład takiej struktury zabezpieczenia jest podany na rys. 1.13. Odnosi się to do struktury zabezpieczenia różnicowego transformatora trójzwojeniowego. Prądy są mierzone ze wszystkich stron transformatora, a decyzja zabezpieczenia jest również przekazywana na znajdujące się tam wyłączniki.

Widoczna na rys. 1.12 bateria jest niezależnym źródłem energii elektrycznej, które umożliwia funkcjonowanie zabezpieczeń (łącznie z napędem wyłącznika), niezależnie od warunków zasilania obiektu.

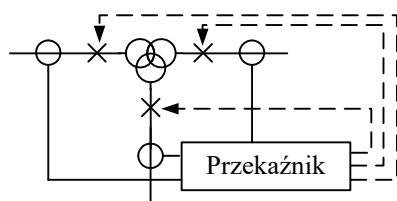


Rys. 1.12. Struktura układu zabezpieczeń

nione. Bierze się przy tym pod uwagę następujące przesłanki:

- zwarcie może powstać w każdym miejscu systemu,
- zawieszć mogą również elementy zabezpieczenia,
- uszkodzenie powinno w jak najmniejszym stopniu zakłócać pracę zdrowej części systemu.

Na bazie dwóch pierwszych przesłanek zostały ustalone zasady kształtowania zabezpieczanych stref oraz hierarchiczna struktura auto-



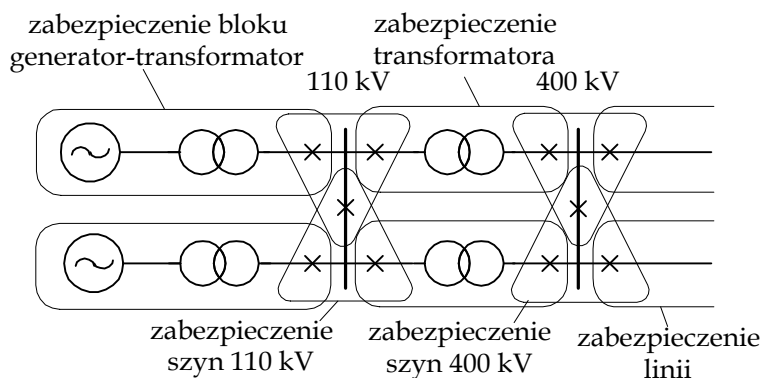
Rys. 1.13. Struktura zabezpieczenia różnicowego transformatora trójzwojowego

matyki zabezpieczeniowej. Sposób kształtowania zabezpieczanych stref jest ilustrowana na rys. 1.14. Należy zauważyć, że podstawowym elementem wykonawczym zabezpieczenia jest wyłącznik. Zatem, likwidacja zwarcia w określonej strefie przez zabezpie-

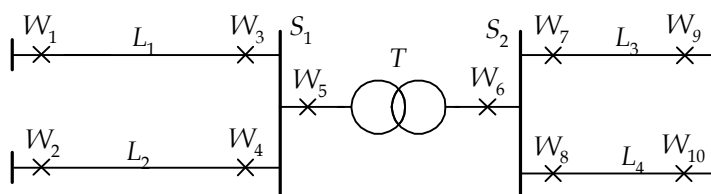
czenie oznacza podanie sygnałów wyłączających wszystkie wyłączniki na granicach tej strefy.

W celu ochrony przed skutkami uszkodzeń w samym układzie zabezpieczeniowym wprowadza się podział zabezpieczeń na *zabezpieczenia podstawowe* (ang. *primary protection*) oraz *rezerwowe* (ang. *back-up protection*). Zabezpieczenie rezerwowe odnosi się do następnej w kolejności strefy ochrony danego obszaru. Odpowiedni przykład jest pokazany na rys. 1.15.

Koncepcja funkcjonowania zabezpieczeń i formowania strategii zabezpieczania systemu elektroenergetycznego przed konsekwencjami zwarć powstawała w miarę rozwoju tego systemu. W kształtowaniu strategii ochrony systemu obowiązują pewne podstawowe zasady, które muszą być spełnione aby zadania zabezpieczenia obiektów były speł-



Rys. 1.14. Przykład kształtowania stref zabezpieczeń podstawowych

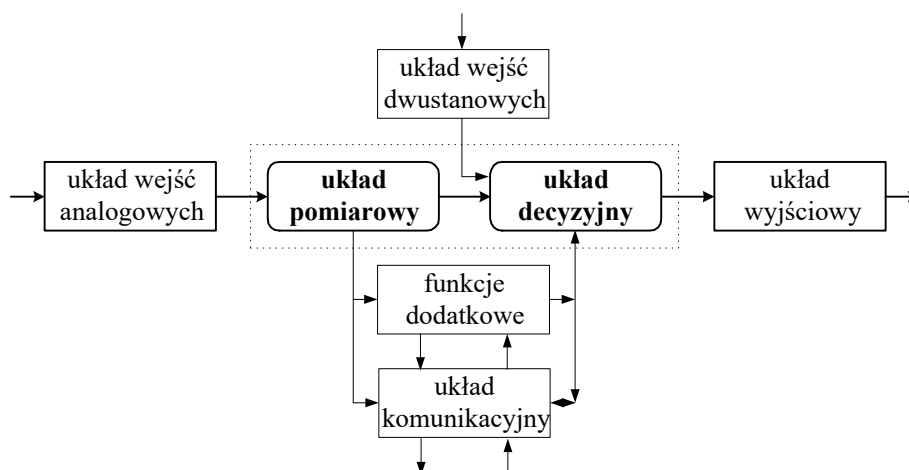


Rys. 1.15. Ilustracja koncepcji zabezpieczeń rezerwowych

W przypadku zwarcia na szynach S_1 powinny zostać wyłączone wyłączniki W_3 , W_4 oraz W_5 przez zabezpieczenie podstawowe szyn. Jeśli jednak zwarcie trwa dłużej niż przewidziany czas jego wyłączenia, to z odpowiednią zwłoką działają zabezpieczenia rezerwowe umieszczone w sąsiednich stacjach, powodując wyłączenie wyłączników W_1 , W_2 oraz W_6 . Podobnie, zabezpieczenia rezerwowe transformatora T powodują wyłączenie wyłączników W_1 , W_2 oraz W_9 , W_{10} . Koncepcja rezerwowania zabezpieczeń przewiduje, że w ich skład nie może wchodzić żaden element układu zabezpieczeń podstawowych.

1.4.2 Struktura przekaźnika cyfrowego

Zabezpieczenie elektroenergetyczne realizuje swoje zadanie w oparciu o pomiar, a jego działanie objawia się w postaci wyłączenia odpowiedniego wyłącznika (lub grupy wyłączników). Najważniejszym elementem tego układu jest przekaźnik zabezpieczeniowy (rys. 1.12). Struktura logiczna przekaźnika cyfrowego jest pokazana na rys. 1.16.



Rys. 1.16. Struktura cyfrowego przekaźnika zabezpieczeniowego

Podstawowe funkcje przekaźnika są realizowane w czterech kolejno występujących po sobie układach:

- Układ wejść analogowych ma za zadanie dostosowanie skali sygnałów prądowych i napięciowych podawanych z odpowiednich przekładników, do wymagań przetworników analogowo-cyfrowych i ich zamianę na postać cyfrową. Ze względu na duży zakres zmian mierzonych prądów (niekiedy większy niż stukrotny), szczególnie trudne jest rozwiązanie toru prądowego. Znajdują się tam również układy zabezpieczające przed wpływem zakłóceń elektromagnetycznych, przekazywanych przez przewody prądowe i napięciowe. Istotnym elementem układu wejść analogowych w każdym torze pomiarowym jest analogowy filtr odcinający, zawężający pasmo sygnału wejściowego do wymagań wynikających z częstotliwości próbkowania (patrz p. 2.2).
- Układ pomiarowy służy do określenia wielkości elektrycznych, które są podstawą do podjęcia decyzji przez zabezpieczenie. Są to tak zwane *wielkości kryterialne* zabezpieczenia. Odbywa się to w układzie mikroprocesorowym zgodnie z odpowiednimi algorytmami pomiarowymi.
- Układ *decyzyjny* jest również realizowany w technice mikroprocesorowej i ma na celu określenie, czy w nadzorowanym obiekcie nastąpiło zdarzenie, które wymaga interwencji zabezpieczenia (najczęściej jest to podanie sygnału otwierającego wyłącznik). W najprostszym przypadku układ decyzyjny jest komparatorem, w którym następuje porównanie wielkości kryterialnej z progiem (nastawą przekaźnika). W wielu przypadkach decyzja przekaźnika jest uzależniona od stanu różnych łączników w nadzorowanej strefie (blokady, położenie

wyłączników lub odłączników, sygnały od innych układów automatyki). Te sygnały są wprowadzane do przekaźnika przez układ wejść dwustanowych.

- Układ wyjściowy ma na celu energetyczne dopasowanie sygnału decyzyjnego do wymagań obwodu sterującego wyłącznikiem. Ponieważ sygnały te mają charakter dwustanowy, więc elementami wykonawczymi są zazwyczaj odpowiednie przekaźniki.

Dalsze rozdziały książki są poświęcone projektowaniu i ocenie procedur składających się na układ pomiarowy i decyzyjny przekaźnika.

Na rys. 1.16 pokazane są jeszcze dwa dodatkowe bloki przekaźnika, w których realizowane są pomocnicze funkcje zabezpieczenia (opisane w p. 1.3.2) oraz zadania komunikacji. Te ostatnie umożliwiają komunikację lokalną z personelem (poprzez odpowiednie złącze komunikacyjne) lub połączenie z systemem komputerowym stacji. Funkcje te umożliwiają szybką analizę stanu awaryjnego w stacji, zmianę nastaw zabezpieczenia lub sterowanie wyłącznikami poprzez przekaźnik.

1.4.3 Podstawowe charakterystyki zabezpieczeń

Charakterystyki, według których są oceniane zabezpieczenia, są bezpośrednio związane z zadaniami, jakie te układy powinny wypełniać. Zwykle wymienia się następujące podstawowe charakterystyki: niezawodność, selektywność, szybkość działania oraz czułość.

Niezawodność (ang. *reliability*) jest rozumiana jako miara pewności wypełniania założonych funkcji. W przypadku zabezpieczeń, zawodne działanie może oznaczać wyłączenie chronionego obiektu w przypadku, gdy nie był on zagrożony (działanie nadmiarowe), jak również brak takiego wyłączenia w przypadku jego zagrożenia (działanie brakujące). Niezawodność jest bliżej charakteryzowana przez pewność i bezpieczeństwo działania [13]. Ważną cechą systemu zabezpieczeń jest *pewność działania* (ang. *dependability*), która jest rozumiana jako zdolność likwidacji dowolnego zagrożenia. Oznacza to, że pewny system zabezpieczeń powinien gwarantować wyłączenie zwarcia (zagrożenia) przez któreś z zabezpieczeń tego systemu. *Bezpieczeństwo funkcjonowania* (ang. *security*) systemu zabezpieczeń oznacza jego odporność na zbędne (nadmiarowe) działanie. Można zauważyć, że usiłowanie uzyskania większej pewności działania zabezpieczeń może prowadzić do zmniejszenia ich bezpieczeństwa.

Istotnym problemem związanym z niezawodnością pracy zabezpieczeń jest dobór niezawodnych urządzeń wchodzących w skład systemu zabezpieczeń oraz jego diagnostyka. Podkreślić należy, że w

przeciwieństwie do innych urządzeń systemu elektroenergetycznego, układy zabezpieczeń działają bardzo rzadko, a niektóre z nich mogą w ogóle nie zadziałać w czasie pełnienia swojego zadania. Ta rzadka okazyja do działania podczas awarii wymaga jednak wysokiej niezawodności całego systemu.

Selektywność (wybiórczość) (ang. *selectivity*) odnosi się do zdolności rozróżniania przez zabezpieczenie strefy wystąpienia zagrożenia. Wymóg wysokiej selektywności jest podyktowany potrzebą likwidacji awarii w miejscu jak najbliższym jej wystąpienia, przy jednoczesnej ochronie pozostałej części systemu.

Szybkość działania (ang. *speed*) zabezpieczeń powinna zapewnić ochronę obiektów elektroenergetycznych przed poważnym uszkodzeniem oraz rozprzestrzenianiem się awarii. Zazwyczaj mówi się, że zabezpieczenia powinny działać tak szybko, jak to jest tylko możliwe. Należy jednak zauważyć, że szybkość pozostaje w opozycji do innych charakterystyk zabezpieczenia, jak selektywność, czy pewność. Ponadto, o szybkości wyłączenia zwarcia decyduje nie tylko zwłoka na podjęcie decyzji przez przekaźnik, ale również szybkość pozostałych elementów układu zabezpieczeń, w szczególności, wyłącznika. To sprawia, że parametr ten jest mocno związany z ceną całej instalacji. Graniczne czasy działania zabezpieczeń podstawowych są uzależnione od spodziewanej destrukcji wynikającej z braku wyłączenia zwarcia. To zaś zależy od poziomu napięcia i ważności chronionego obiektu dla niezawodnej pracy systemu elektroenergetycznego.

Ze względu na szybkość działania, w literaturze można spotkać następujący podział przekaźników zabezpieczeniowych [3], [11], [13]:

- *Przekaźniki bezzwłoczne* (ang. *instantaneous*), stosowane w tak zwanych zabezpieczeniach odcinających, które służą do likwidacji ewidentnych zwarcć. Decyzja przekaźnika jest w tym przypadku określana bezpośrednio po spełnieniu odpowiednich kryteriów działania. Czas działania tych przekaźników waha się w granicach od kilkudziesięciu do kilkuset milisekund.
- *Przekaźniki zwłoczne* (ang. *time-delay*) mają sztucznie wprowadzoną zwłokę czasową w członie decyzyjnym. Ta zwłoka ma na celu poprawę pewności i selektywności działania oraz koordynację z innymi zabezpieczeniami tej samej i sąsiednich stref.
- *Ultra-szybkie przekaźniki* (ang. *ultra high-speed*) mają czas działania nie większy niż 5 ms i służą do ochrony szczególnie odpowiedzialnych obiektów od zwarcć wielkoprądowych.

Niekiedy czas działania zabezpieczenia nie jest krytyczny i wówczas szybkość reakcji przełącznika jest określana w sekundach. Ma to miejsce na przykład w zabezpieczeniach przeciążeniowych lub w niektórych przypadkach zwarc doziemnych w sieciach ŚN.

Czułość zabezpieczenia (ang. *sensitivity*) charakteryzuje zdolność odróżniania stanu zagrożenia od stanu normalnego chronionego obiektu. W najprostszym przypadku oznacza to zdolność oceny przez przełącznik, czy wielkość kryterialna przekroczyła zadany próg. Parametr ten w dużej mierze zależy od sposobu funkcjonowania zabezpieczenia i zjawisk zachodzących w zabezpieczanej strefie. Na przykład, miarą czułości zabezpieczenia nadprądowego jest stosunek minimalnego prądu zwarcia w chronionej strefie do prądu przyjętego jako próg działania zabezpieczenia [43].

1.5 Kryteria stosowane w zabezpieczeniach elektroenergetycznych

Bez przesady można powiedzieć, że kryterium stosowane w zabezpieczeniu określa podstawową ideę jego działania. Najczęściej rozumie się przez nie zespół wielkości elektrycznych, które mogą służyć do oceny rodzaju zjawisk zachodzących w nadzorowanej strefie oraz odpowiadających im wielkości progowych, których przekroczenie można wykorzystać do odróżnienia normalnego i awaryjnego stanu procesu. Wybór kryterium w sposób istotny decyduje o wymienionych powyżej właściwościach zabezpieczenia. Kryterium w sposób skrótowy opisuje sposób działania zabezpieczenia, rozumianego łącznie jako zespół składający się z odpowiedniego przełącznika, konfiguracji przekładników pomiarowych i wyłączników. W tym sensie stosowane są określenia: przełącznik nadprądowy, odległościowy itd.

Kryteria stosowane w przełącznikach elektromechanicznych były ściśle powiązane z możliwością wykonania odpowiednich ustrojów pomiarowych. Te ograniczenia były nieco mniejsze w tak zwanych przełącznikach statycznych, wykonanych w oparciu o technologie układów analogowych. W przełącznikach cyfrowych praktycznie nie ma algorytmicznych ograniczeń w uzyskaniu odpowiednich zależności wynikających z definicji wielkości kryterialnych. Tym niemniej, podstawowe kryteria stosowane obecnie w zabezpieczeniach cyfrowych nie odbiegają istotnie od tych, które były definiowane na potrzeby przełączników elektromechanicznych i statycznych. Różnice dotyczą natomiast możliwości filtracyjnych algorytmów cyfrowych, jednoczesnego stosowania wielu

kryteriów, czasów działania oraz funkcji dodatkowych, realizowanych w tych przekaźnikach.

Kryteria zabezpieczeniowe można podzielić na dwie grupy, w zależności od logicznego warunku ich spełnienia: *kryteria nadmiarowe* – gdy odpowiednie warunki zachodzą przy wzroście wielkości kryterialnej ponad wartość zadaną oraz *kryteria niedmiarowe* – jeśli spełnienie warunku następuje w rezultacie obniżenia wielkości kryterialnej. W logice dwuwartościowej, kryterium nadmiarowe można określić następująco*:

$$r = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } s \geq g, \\ 0 & \text{jeśli } s < g, \end{cases} \quad (1.1)$$

gdzie: r jest sygnałem decyzyjnym przekaźnika, s oznacza wielkość kryterialną (prąd, napięcie, kąt itp.), g jest progiem działania przekaźnika (wielkość rozruchowa). W przypadku kryterium niedmiarowego znaki porównania w (1.1) będą przeciwne. Układy lub algorytmy działające zgodnie z zasadą (1.1) nazywają się komparatorami.

Poniżej przedstawione są podstawowe cechy wybranych kryteriów stosowanych w zabezpieczeniach elektroenergetycznych. Należy podkreślić, że poszczególne wykonania przekaźników mogą niekiedy odbiegać od standardowych zasad, co może w znacznej mierze decydować o ich właściwościach. W poniższym opisie pominięto sposoby określania nastaw zabezpieczeń stosowanych w poszczególnych rodzajach obiektów. Informacje na ten temat można znaleźć w bogatej literaturze specjalistycznej [3], [13], [29], [32], [35], [39], [40], [43]. Należy podkreślić, że podane kryteria daleko nie wyczerpują zbioru znanych metod mających zastosowanie do wykrywania zagrożeń w pracy systemu.

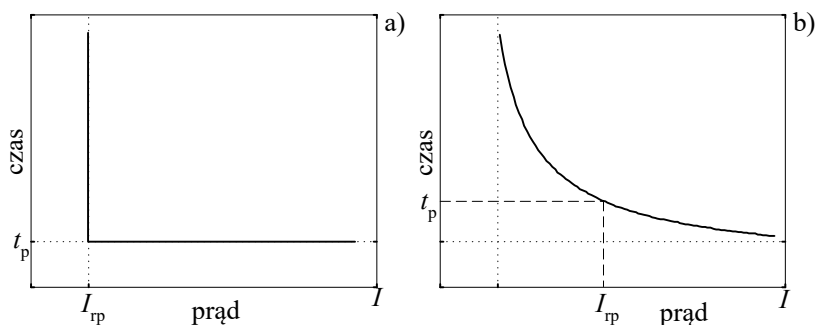
1.5.1 Kryterium nadprądowe

Kryterium nadprądowe jest chyba najbardziej naturalnym sposobem wykrycia zwarć wielkoprądowych. W charakterze wielkości kryterialnej s (1.1) stosowane są różne funkcje prądów systemu trójfazowego, jak na przykład: wartość skuteczna prądu wybranej fazy lub suma tych wartości we wszystkich fazach, wartość skuteczna składowych symetrycznych (zgodnej, przeciwnej lub zerowej), amplituda wybranej harmoniczej itp.

* W p. 6.3 podane są definicje odnoszące się do logiki wielowartościowej.

W celu zapewnienia wysokiej selektywności zabezpieczenia oraz koordynacji z innymi zabezpieczeniami, kryterium nadprądowe jest łączone z dodatkową zwłoką lub z innymi kryteriami.

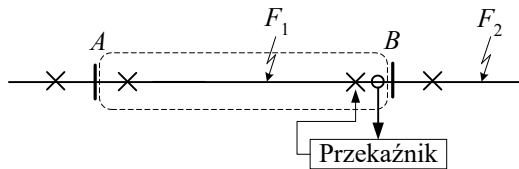
Zwłoczne działanie zabezpieczenia oznacza, że decyzja o wyłączeniu może być podjęta przez przełącznik wówczas, gdy kryterium jest spełnione przez określony odcinek czasu t_p , zwany *zwłoką czasową*. Wartość zwłoki czasowej może być stała (niezależna charakterystyka czasowa) lub zmienna, w zależności od wartości prądu, który jest wielkością kryterialną. W tym ostatnim przypadku mówi się o *kryterium nadprądowym zwłocznym z charakterystyką zależną*. Przebieg charakterystyk określających zwłokę działania przełącznika jest pokazana na rys. 1.17.



Rys. 1.17. Charakterystyki czasowo-prądowe przełączników nadprądowych zwłocznym: niezależna (a) oraz zależna (b)

Charakterystyka zależna jest normowana, a jej przebieg powinien być dostosowany do zastosowania, przy czym, im większa jest wartość prądu, tym wprowadzana zwłoka jest mniejsza. Jest to zgodne z charakterystyką odporności zabezpieczanych obiektów na przeciążenia prądowe.

Zabezpieczenia nadprądowe są najbardziej rozpowszechnionym typem zabezpieczeń stosowanych w systemie elektroenergetycznym. Są one stosowane między innymi, jako zabezpieczenia odcinające linii i maszyn elektrycznych oraz zabezpieczenia przeciążeniowe (do ochrony obiektu przed zwiększonym obciążeniem). W sieciach z dwustronnym zasilaniem, a także w sieciach zamkniętych (rys. 1.18), zabezpieczenie nadprądowe nie jest w stanie rozróżnić, czy zwarcie nastąpiło z przodu (w chronionej strefie – F_1), czy też z tyłu (poza strefą – F_2) względem przekładników umieszczonych w chronionej linii. Nie jest w takim przypadku możliwe spełnienie warunków selektywnej i bezpiecznej pracy zabezpieczenia.



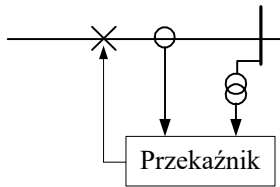
Rys. 1.18. Zabezpieczana strefa w linii dwustronnie zasilanej

W celu usunięcia tej niejednoznaczności w określaniu miejsca zwarcia, stosuje się dodatkowe kryterium kierunku zwarcia. Wykorzystuje się tu, na przykład, kierunek (ką) przepływu mocy mierzonej przez przełącznik. W tym celu, oprócz

prądu, powinno być również mierzone napięcie na szynach stacji (rys. 1.19). Kryterium kierunkowe (kątowe) można zapisać następująco:

$$r_{\rightarrow} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } s_{\angle} \geq g_{\angle}, \\ 0 & \text{jeśli } s_{\angle} < g_{\angle}, \end{cases} \quad (1.2)$$

gdzie: r_{\rightarrow} jest sygnałem decyzyjnym przełącznika (członu) kierunkowego, s_{\angle} oznacza wielkość kryterialną (ką), g_{\angle} jest progiem działania przełącznika (wartość rozruchowa).



Rys. 1.19. Struktura zabezpieczenia nadprądowego kierunkowego

Należy zauważyć, że zależność (1.2) pokazuje jedynie ideę kryterium kierunkowego. W rzeczywistości, kierunek (ką) w (1.2) jest najczęściej definiowany w odniesieniu do składowych ortogonalnych zespolonego sygnału reprezentującego podstawową harmoniczną prądu i napięcia (lub ich kombinacji), więc w praktycznych realizacjach odpo-

wiedni komparator jest budowany w oparciu o zależności pomiędzy tymi właśnie wielkościami zespolonymi [29], [35].

W charakterze wielkości kryterialnej s_{\angle} stosuje się kąt pomiędzy wektorami prądu zwarciovego i innej wielkości, którą można uznać za wartość odniesienia. Wielkość odniesienia jest definiowana w postaci odpowiedniej kombinacji wektorów napięć, a niekiedy także prądów, które zależą od rodzaju zabezpieczanego obiektu i występującego zwarcia. Zabezpieczenie nadprądowe kierunkowe działa na wyłączenie, jeśli spełnione są jednocześnie: kryterium nadprądowe oraz kątowe (z uwzględnieniem odpowiedniej zwłoki).

1.5.2 Kryterium nad- i podnapięciowe

Na podobnej do przedstawionej powyżej zasadzie działają również przekładniki z kryteriami nad- oraz podnapięciowymi. Kryterium podnapięciowe stosowane jest do potwierdzenia wykrycia zwarcia wysokoprądowego. Charakterystyczny jest wówczas, oprócz wzrostu prądu, również duży spadek napięcia. Poza tym, kontrola wartości napięcia zasilającego jest wymagana przy załączeniu niektórych typów odbiorników, na przykład, silników elektrycznych.

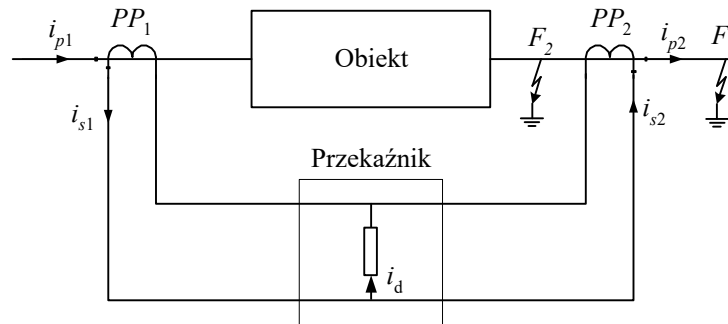
Kryterium nadnapięciowe jest stosowane w zabezpieczeniach chroniących przed długotrwałym wzrostem napięcia w rezultacie uszkodzenia układów automatycznej regulacji napięcia lub przełączeń w sieci (także niektórych zwarć). Wzrost napięcia powoduje szybkie obniżenie parametrów izolacji. W maszynach elektrycznych z rdzeniami ferromagnetycznymi, podwyższenie napięcia powoduje gwałtowny wzrost prądu magnesującego i zwiększone ich nagrzewanie. Podobny efekt występuje również w przypadku obniżenia się częstotliwości. Stąd też w przypadku generatorów, do kontroli stopnia nasycenia rdzenia, odpowiednią wielkością kryterialną jest stosunek napięcia do częstotliwości (V/Hz) [13].

Kryterium nadnapięciowe jest także wykorzystywane do wykrywania zwarć doziemnych w sieciach ŚN, pracujących z izolowanym punktem neutralnym. Napięcie składowej zerowej U_0 może w takim przypadku osiągać wartości bliskie napięciu fazowemu sieci.

1.5.3 Kryterium różnicowoprądowe

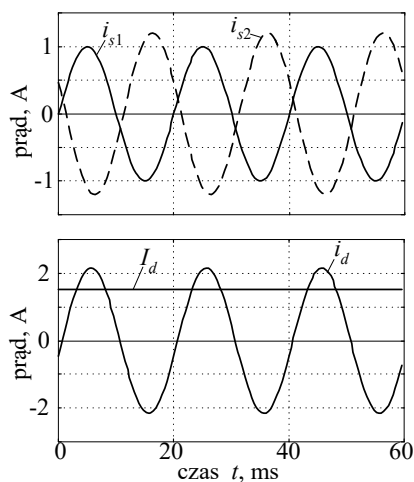
Kryterium różnicowoprądowe jest podstawą realizacji jednych z najbardziej czułych i skutecznych zabezpieczeń zwarciovych. Istota tego kryterium jest pokazana na rys. 1.20. Strefa działania zabezpieczenia jest ograniczona przez przekładniki prądowe PP_1 i PP_2 . Wielkością kryterialną jest wartość prądu różnicowego (wartość skuteczna lub amplituda wybranej harmonicznej), który w odniesieniu do wielkości chwilowych można zdefiniować następująco (rys. 1.20)

$$i_d = i_{s1} - i_{s2} \quad (1.3)$$



Rys. 1.20. Ilustracja zasady działania zabezpieczenia różnicowoprądowego

Podczas normalnej pracy układu lub przy zwarciu na zewnątrz strefy (zwarcie F_1 na rys. 1.20), prądy i_{p1} oraz i_{p2} (a zatem i prądy w obwodzie wtórnym: i_{s1} , i_{s2}) są sobie równe. W takim przypadku wielkość kryterialna jest równa zero. Inny obraz występuje podczas zwarcia wewnątrz zabezpieczanej strefy (zwarcie F_2). Wówczas oba prądy są skierowane do miejsca zwarcia, a prąd różnicowy przybiera duże wartości. Przykładowe przebiegi prądów dla tego przypadku są pokazane na rys. 1.21. Można zauważyć, że warunki rozróżnienia miejsca zwarcia są spełnione również wówczas, gdy układ jest zasilany tylko z jednej strony.



Rys. 1.21. Przebiegi prądów przy zwarcu wewnątrz zabezpieczanej strefy

Zabezpieczenie różnicowe działa według kryterium nadprądowego, jednak wielkość kryterialna jest tu inaczej definiowana. Ze względu na wysoką selektywność stosowanego kryterium, wartość rozruchowa g (1.1) może przyjmować małe wartości, co jednocześnie zwiększa czułość zabezpieczenia. Należy jednak zwrócić uwagę na zakłócenia w pracy rozpatrywanego zabezpieczenia.

Zasadnicze przyczyny, zakłócające opisaną powyżej zasadę działania zabezpieczenia różnicowego, są wynikiem błędów transformacji przekładników prądowych

(głównie w rezultacie nasycenia rdzenia lub niedopasowania przekładni) oraz pojawieniem się prądu poprzecznego w zabezpieczanym obiekcie (upływność przez izolację, prąd pojemnościowy, prądy wirowe lub prąd magnesujący). Czynniki te znacznie obniżają właściwości kryterium różnicowoprądowego.

Podstawowym środkiem zaradczym jest stabilizacja zabezpieczenia, która polega na uzależnieniu prądu różnicowego, który jest w tym przypadku także prądem rozruchowym i_r przekaźnika, od wartości prądu odniesienia, zwanego prądem stabilizującym. Prąd ten może być różnie definiowany w zależności od charakteru obiektu, na przykład:

- w przypadku obiektu z dwoma odejściami (linia, transformator dwuuzwojeniowy):

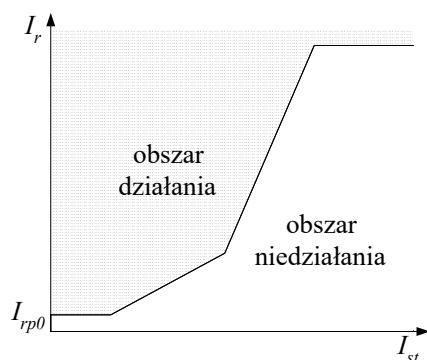
$$i_{st} = i_{s1} + i_{s2} , \quad (1.4a)$$

- w przypadku obiektu z L odejściami (transformator wielouzwojeniowy, szyny stacji):

$$i_{st} = \sum_{j=1}^L |i_{sj}| , \quad (1.4b)$$

gdzie: i_{sj} jest wartością chwilową prądu wtórnego w j -tym przekładniku.

Do określenia wartości prądu rozruchowego stosuje się w tym przypadku charakterystykę określoną przez funkcję $f(I_{st})$ (I_{st} – wartość skuteczna prądu stabilizującego i_{st}) o postaci jak na rys. 1.22, która rozdziela płaszczyznę decyzyjną przekaźnika na obszary działania i niedziałania



Rys. 1.22. Charakterystyka rozruchowa przekaźnika różnicowego stabilizowanego

(I_{rp0} jest początkowym prądem rozruchowym). Przebieg tej charakterystyki zależy od charakteru obiektu i wymaganych właściwości zabezpieczenia. Należy zauważyć, że prądy: różnicowy (rozruchowy) i stabilizujący są reprezentowane przez odpowiednie wartości skuteczne. Związane z tym kryterium różnicowoprądowe stabilizowane przyjmuje następującą formę:

$$r_{st} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } I_r \geq f(I_{st}), \\ 0 & \text{jeśli } I_r < f(I_{st}). \end{cases} \quad (1.5)$$

Bardziej szczegółowy opis kryterium różnicowoprądowego w odniesieniu do zabezpieczenia transformatora jest podany w p. 6.3.7, gdzie przedstawione są także zjawiska towarzyszące różnym stanom pracy transformatora i sposób ich detekcji.

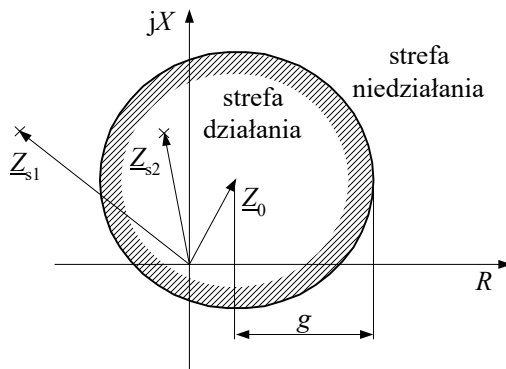
Zabezpieczenia różnicowoprądowe są stosowane w charakterze podstawowych zabezpieczeń takich obiektów, jak: generatory, transformatory, szyny zbiorcze rozdzielni, krótkie linie.

1.5.4 Kryterium podimpedancyjne

Kryterium impedancyjne polega na porównaniu impedancji mierzonej przez przekątnik (która jest najczęściej rozumiana jako iloraz wektorów napięcia i prądu) z impedancją odniesienia. Ponieważ wielkość kryterialna jest w tym przypadku dwuwymiarowa (rezystancja i reaktancja), więc funkcja odpowiedniego komparatora polega na stwierdzeniu, czy wektor, reprezentujący wielkość kryterialną, znajduje się w zdefiniowanym obszarze, czy też poza nim (rys. 1.23). Nazwa: kryterium podimpedancyjne łączy się z tym, że podczas zwarcia w zabezpieczanej strefie, impedancja pętli zwarciowej

gwałtownie się zmniejsza.

Pokazany na rys. 1.23 okrąg oddziela strefę nie działania zabezpieczenia (na zewnątrz okręgu) od obszaru, gdy wynik komparacji jest równy jeden (wewnątrz okręgu). Położenie mierzonej impedancji \underline{Z}_s poza okręgiem wskazuje na pracę normalną lub zwarcie poza chronioną strefą. Komparator podimpedancyjny może być zdefiniowany następująco:



Rys. 1.23. Zasada działania komparatora podimpedancyjnego

$$r = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } |\underline{Z}_s - \underline{Z}_0| \leq g, \\ 0 & \text{jeśli } |\underline{Z}_s - \underline{Z}_0| > g, \end{cases} \quad (1.6)$$

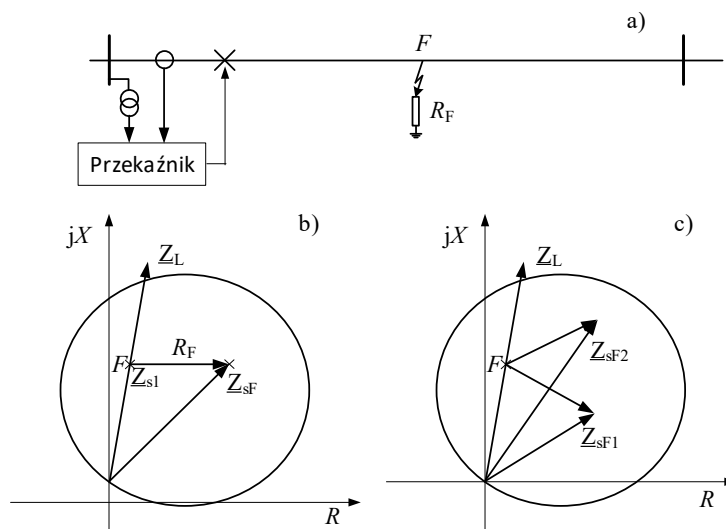
gdzie: \underline{Z}_0 jest wektorem, określającym położenie środka okręgu, natomiast g pełni w tym przypadku funkcję promienia okręgu; impedancja \underline{Z}_s jest określana z pomiarów:

$$\underline{Z}_s = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m}, \quad (1.7)$$

gdzie: \underline{U}_m , \underline{I}_m – wektory, odpowiednio, napięcia i prądu mierzone przez przekąźnik.

Można zauważyć, że przez odpowiednie ukształtowanie charakterystyki przekąźnika podimpedancyjnego można równocześnie uzyskać kontrolę kierunku wystąpienia zwarcia. Kształtowanie tej charakterystyki jest ważnym etapem projektowania przekąźnika.

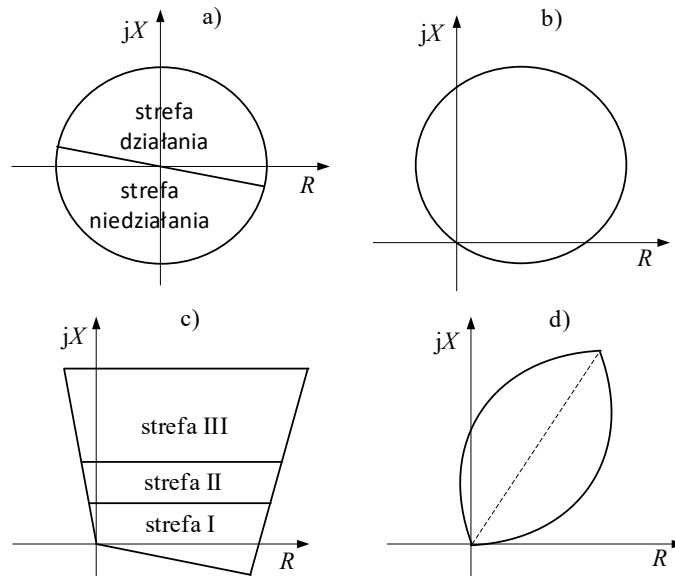
Kryterium podimpedancyjne jest najczęściej stosowane w zabezpieczeniach linii [31], [32], [41]. Ma ono tutaj prostą interpretację fizyczną. Ilustruje to rys. 1.24. Na rys. 1.24b pokazana jest charakterystyka przekąźnika z zaznaczoną impedancją linii \underline{Z}_L . Jeśli w linii wystąpi zwarcie bezpośrednio (z zerową rezystancją przejścia $R_F = 0$), to impedancja \underline{Z}_s ustali się na tej właśnie prostej w odległości od początku układu współrzędnych, proporcjonalnej do odległości do miejsca zwarcia w linii ($\underline{Z}_s = \underline{Z}_{s1}$). Stąd też, w odniesieniu do tych zabezpieczeń stosowana jest nazwa *zabezpieczenia odległościowe* (ang. *distance protection*). Jeśli zwarcie towarzyszy łuk zwarciovowy lub inna rezystancja przejścia o wartości R_F , to przy jednostronnym zasilaniu, impedancja na wejściu komparatora podimpedancyjnego będzie miała wartość \underline{Z}_{sF} . W przypadku linii (lub innego obiektu) dwustronnie zasilanej, prąd mierzony przez przekąźnik jest tylko częścią prądu zwarciovowego i wówczas rezystancja zwarcia objawia się w algorytmie pomiarowym jako impedancja, której moduł i kąt zależy od konfiguracji sieci i parametrów zastępczych źródeł po obu stronach linii (rys. 1.24c) (ang. *infeed effect*). W celu odstrojenia zabezpieczenia od wpływu tego typu zjawisk na jego pewną pracę, stosuje się różne kształty charakterystyki komparatora podimpedancyjnego. Ponadto, w celu zapewnienia dużej selektywności zabezpieczenia i możliwości koordynacji nastaw z zabezpieczeniami sąsiednich obiektów, stosuje się zabezpieczenia wielostrefowe. Strefa podstawowa jest w takim przypadku zwykle nastawiona na ochronę 0,85 długości linii (licząc od stacji, w której zainstalowany jest przekąźnik).



Rys. 1.24. Schemat zabezpieczenia odległościowego (a) i obraz mierzonej impedancji podczas zwarcia w F : linia jednostronnie zasilana (b) oraz dwustronnie zasilana z różnym udziałem obu źródeł (c)

Zabezpieczane strefy w przełączniku charakteryzują się innymi obszarami na płaszczyźnie impedancji oraz różnymi czasami zwłoki działania zabezpieczenia. Pierwsza strefa ma najmniejszy obszar działania komparatora i najkrótszą zwłokę (zwykle jest to zabezpieczenie bezzwłoczne). Przełącznik odległościowy działający w drugiej i trzeciej strefie pełni funkcję zabezpieczenia rezerwowego do ochrony sąsiednich linii w ciągu przesyłowym. Typowe kształty charakterystyk rozruchowych zabezpieczenia linii pokazane są na rys. 1.25 [14], [31], [35]. Wybór odpowiedniej charakterystyki zależy od charakteru obiektu i warunków jego pracy w systemie. Na przykład, charakterystyka soczewkowata (rys. 1.25d) daje możliwość dobrego odstroięcia zabezpieczenia od wpływu obciążenia linii.

Poza liniami, zabezpieczenia odległościowe są stosowane także do zabezpieczenia transformatorów, generatorów i szyn zbiorczych. W przypadku linii, składowe impedancje mogą być obliczane nie tylko według zależności (1.7). W przełącznikach cyfrowych, w miejsce powyższych zależności odnoszących się do wektorowej reprezentacji prądu i napięcia, często są stosowane algorytmy, w których określane są parametry R , L modelu pętli zwarciowej. Wielkości te są parametrami modelu linii reprezentowanego przez obwód o stałych skupionych, które są powiązane z wartościami chwilowymi prądu i napięcia poprzez znane zależności różniczkowe (patrz p. 4.5.2).



Rys. 1.25. Podstawowe charakterystyki rozruchowe komparatorów podimpedancyjnych: impedancyjna kierunkowa (a), kołowa (b), czworokątna (c) oraz soczewkowata (d)

W poszczególnych zastosowaniach konstruktorzy muszą rozwiązać wiele szczegółowych problemów związanych z kształtowaniem charakterystyki przekaźnika oraz strategią jego nastawiania. Należy tu uwzględnić przede wszystkim dwie grupy problemów:

1. Czynniki eksploatacyjne:

- możliwość nakładania się obszarów zmian impedancji podczas zwarć wysokoomowych (w zabezpieczanej strefie) i normalnego obciążenia obiektu;
- to samo odnosi się do przypadków elektromechanicznych stanów przejściowych w systemie (kołysania mocy), podczas których mierzona impedancja może przejściowo wskazywać na zwarcie w zabezpieczanej strefie;

2. Czynniki konstrukcyjne:

- występowanie odczepów (rozgałęzień) wzdłuż zabezpieczanej linii;
- sposób podejścia do zabezpieczenia linii równoległych;
- zabezpieczenie linii z szeregową kompensacją pojemnościową;
- rozwiązanie sposobu pomiaru impedancji przy różnych rodzajach zwarć w linii trójfazowej;
- sposób zachowania się przekaźnika w przypadku zwarć bliskich, gdy napięcie spada do bardzo małych wartości, uniemożliwiając normalny pomiar impedancji;

- problemy zabezpieczania krótkich linii, co jest wyrażane za pomocą parametru SIR (*source to line impedance ratio* – stosunek impedancji źródła do impedancji linii); duża wartość tego współczynnika ($SIR > 15$) obniża czułość zabezpieczenia i wydłuża czas jego poprawnej decyzji;
- współpraca z innymi układami automatyki zabezpieczeniowymi, w szczególności z automatyką SPZ.

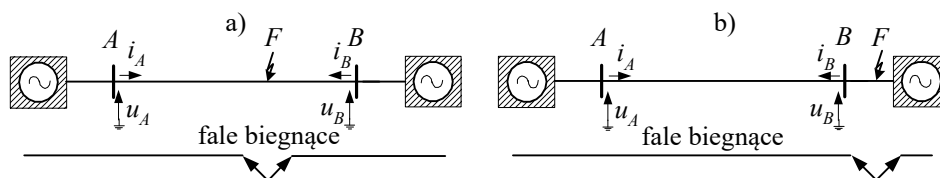
W przypadku linii średnich napięć, do zabezpieczeń od zwarć doziemnych stosowane jest kryterium admitancyjne w odniesieniu do napięcia i prądu składowej zerowej, które jest pochodne do rozpatrywanego tu kryterium impedancyjnego [17], [29].

Przełączniki odległościowe należą do grupy najbardziej złożonych układów automatyki zabezpieczeniowej.

1.5.5 Kryteria falowe

Wspólną cechą metod przedstawionych w tym punkcie jest wykorzystanie zjawisk falowych w linii, reprezentowanej modelem o stałych rozłożonych, do detekcji miejsca wystąpienia zwarcia. Ogólna idea tych metod jest pokazana na rys. 1.26. Wystąpienie zwarcia jest zakłóceniem, które generuje fale prądu i napięcia, rozprzestrzeniające się w obu kierunkach linii. Z poglądowych schematów rozchodzenia się fal (rys. 1.26) widać, że w zależności od miejsca wystąpienia zwarcia (w linii, czy poza nią), kierunki fal (w więc odpowiednie fazy prądu i napięcia) zarejestrowane na obu końcach linii będą identyczne lub przeciwne. Widać zatem, że do budowy odpowiedniego zabezpieczenia niezbędna jest komunikacja pomiędzy oboma końcami linii. Komunikacja ta jest zapewniona za pomocą jednego z następujących mediów [3], [13], [35]:

- przesyłanie sygnałów przewodami linii,
- wykorzystanie łączy radiowych,
- wykorzystanie przewodów światłowodowych umieszczonych w przewodach (najczęściej w przewodzie odgromowym),
- wykorzystanie łączy kablowych.



Rys. 1.26. Rozchodzenie się fal podczas zwarcia wewnątrz (a) i na zewnątrz (b) zabezpieczanej linii

Podstawą działania zabezpieczenia są związki zachodzące pomiędzy chwilowymi wartościami prądu i napięcia na obu końcach linii, które są wynikiem rozwiązania równań różniczkowych cząstkowych modelu bezstratnej linii długiej [9], [16]. Zatem, prąd w stacji A może być określony następująco (przyjęto kierunki prądów i napięć jak na rys. 1.26):

$$i_A(k) = \frac{1}{Z_f} (u_A(k) - u_B(k - m)) - i_B(k - m), \quad (1.8)$$

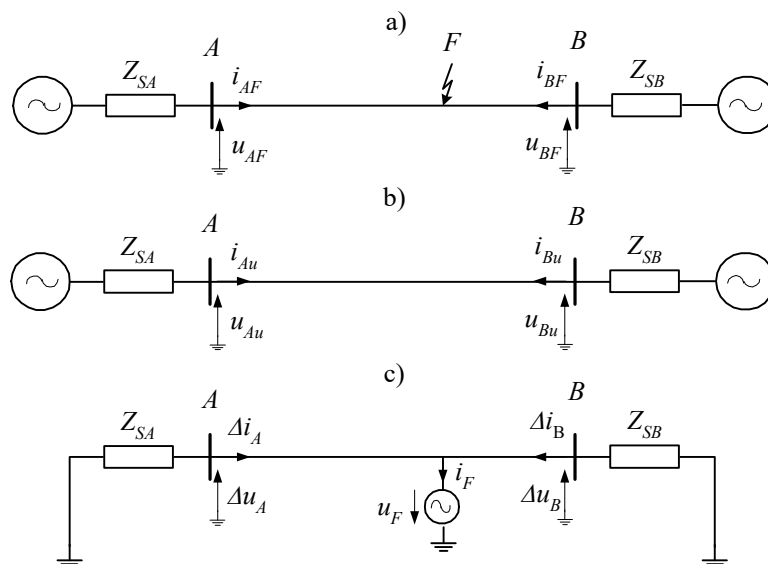
gdzie: $Z_f = \sqrt{L'/C'}$, L' , C' – jednostkowa indukcyjność i pojemność linii, m – liczba próbek sygnału, odpowiadająca czasowi przejścia fali elektromagnetycznej wzdłuż linii.

W celu zwiększenia czułości zabezpieczenia, odpowiednie kryteria są definiowane na podstawie równania (1.8) (i podobnego, zapisanego dla strony B linii) w odniesieniu do przyrostów prądów i napięć podczas zwarcia. Wielkości przyrostowe prądu Δi oraz napięcia Δu są określane na podstawie zasady superpozycji: odpowiednie wielkości zwarciove są sumą tych wielkości przed zwarcie oraz ich przyrostów w wyniku zwarcia. Odpowiadające tym stanom schematy rozpatrywanego fragmentu sieci są pokazane na rys. 1.27. Jest to częsty zabieg stosowany w teorii algorytmów działania automatyki elektroenergetycznej w odniesieniu do obwodów liniowych. Wielkości zwarciove są wówczas określone następująco (rys. 1.27):

$$\begin{aligned} u_{AF} &= u_{Au} + \Delta u_A, \\ i_{AF} &= i_{Au} + \Delta i_A. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Cyfrowe (lub ciągłe) wartości kryterialnych sygnałów Δi oraz Δu określonych dla obu końców linii zapisane zgodnie z (1.8) są podstawą wielu szybkich algorytmów zabezpieczeniowych, które w literaturze anglojęzycznej noszą nazwę *travelling wave protection*. Ogólna struktura takich zabezpieczeń jest pokazana na rys. 1.28.

W podejściu, które jest najbliższe idei rozchodzenia się fal generowanych przez zwarcie (rys. 1.26), na obu końcach linii porównywane są znaki sygnałów Δi oraz Δu [7]. Równość znaków obu wielkości z danej strony linii wskazuje na to, że zwarcie nastąpiło z tyłu zabezpieczenia (poza strefą). W przeciwnym przypadku (zwarcie w linii lub poza jej przeciwległym końcem), znaki są różne. Przekazniki na obu końcach linii podejmują decyzję o wyłączeniu, jeśli rezultaty obu porównań: r_A oraz r_B są wynikiem różnych znaków wielkości kryterialnych.

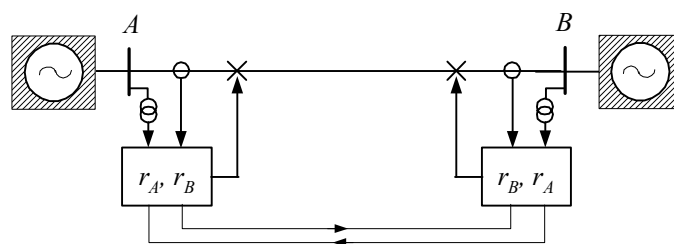


Rys. 1.27. Superpozycja prądów i napięć: stan podczas zwarcia (a), ustalony stan przedzwarciovy (b) oraz superpozycja obu stanów (c)

Inny sposób wykorzystania zjawiska rozprzestrzeniania się fal polega na porównaniu prądów zapisanych zgodnie z (1.8) na obu końcach linii. Wielkości kryterialne są wówczas definiowane następująco [1], [16]:

$$i_{sA}(k) = i_A(k) - i_A(k) = i_A(k) - \left(\frac{1}{Z_f} (u_A(k) - u_B(k-m)) - i_B(k-m) \right),$$

$$i_{sB}(k) = i_B(k) - i_B(k) = i_B(k) - \left(\frac{1}{Z_f} (u_B(k) - u_A(k-m)) - i_A(k-m) \right). \quad (1.10)$$



Rys. 1.28. Schemat zabezpieczenia z kryterium falowym

Można zauważyć, że prądy i_{sA} oraz i_{sB} powinny być równe zero jeśli nie ma zwarcia w linii. W przeciwnym przypadku relacje te nie są

zachowane, co świadczy o zwarciu w chronionej linii. Realizacja tego zabezpieczenia wymaga przesyłania próbek prądów i napięć na przeciwległe końce linii.

Znane są także inne kryteria, wykorzystujące zjawisko przemieszczania się fali wzdłuż linii [8], [24]. Należy zauważyć, że zależność (1.8) odnosi się do wielkości występujących w linii jednofazowej. W przypadku linii wielofazowej (na przykład, trójfazowej), równania linii długiej mają złożoną postać macierzową i ich rozwiązanie nie prowadzi do tak prostych równań algebraicznych, jak (1.8). W celu uproszczenia zagadnienia, powszechnie stosuje się transformację sprzężonego układu wielofazowego do układu modalnego z fazami niezależnymi od siebie [33]. Wówczas, powyższe kryteria są stosowane odpowiednio do poszczególnych faz układu modalnego. Podstawowe ich zalety są związane z krótkim czasem reakcji na zwarcie (zabezpieczenia ultraszybkie) oraz dużą odpornością na zakłócenia elektromechaniczne w systemie (kołysanie mocy). Zabezpieczenia tego typu są stosowane w liniach najwyższych napięć.

Należy zauważyć, że istnieje duża grupa zabezpieczeń linii przesyłowych, w których stosuje się przesyłanie informacji pomiędzy obu końcami linii, w których jednak nie są wykorzystywane zjawiska falowe. Mogą to być, na przykład, zabezpieczenia różnicowoprądowe z odpowiednim kodowaniem przesyłanej informacji o wartości prądu na drugi koniec linii (zabezpieczenia porównawczoprądowe) lub zabezpieczenia porównawczofazowe, w których wielkością kryterialną jest kąt pomiędzy sygnałami prądowymi mierzonymi na początku i na końcu linii [3], [12], [35]. Kryteria te nie zapewniają tak wysokiej szybkości działania, jak w przypadku zabezpieczeń falowych. Ich zaletą jest jednak ciągłe występowanie odpowiedniego warunku kryterialnego w czasie trwania zwarcia (zabezpieczenia ma zatem dużą pewność działania), a nie tylko bezpośrednio po wystąpieniu zwarcia, jak to ma miejsce w zabezpieczeniu falowym.

1.6 Przekładniki zabezpieczeniowe

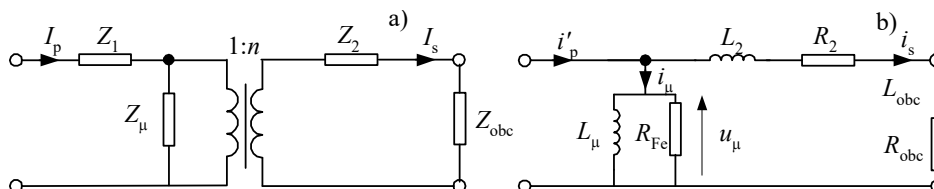
Wszystkie informacje o stanie parametrów elektrycznych w systemie elektroenergetycznym są otrzymywane za pośrednictwem przekładników prądowych i napięciowych. Ich celem jest izolacja wtórnych obwodów pomiarowych od pierwotnych obwodów wysokiego napięcia, wzajemna izolacja różnych obwodów wtórnych oraz przetwarzanie pierwotnych prądów i napięć na standardowe wartości wtórne. Ze względu na przeznaczenie i stosowane klasy dokładności, przekładniki dzielą się na

dwie grupy: do zabezpieczeń oraz do pomiarów. Te ostatnie są, między innymi, stosowane do pomiarów rozliczeniowych energii elektrycznej.

Poniżej są pokrótce przedstawione podstawowe właściwości przekładników stosowanych do zabezpieczeń i automatyki.

1.6.1 Przekładniki prądowe

Podstawowym rodzajem przekładników prądowych (*PP*), powszechnie stosowanych w obwodach pomiarowych układów automatyki elektroenergetycznej, są przekładniki indukcyjne. Uzwojenia strony pierwotnej i wtórnej są sprzężone magnetycznie, a ich schemat zastępczy nie odbiega od schematu zastępczego transformatora jednofazowego (rys. 1.29). Obwody strony pierwotnej i wtórnej są znormalizowane, przy czym znamionowy prąd strony wtórnej wynosi najczęściej 1 A lub 5 A, chociaż dopuszcza się również 2 A. Znamionowe prądy strony pierwotnej w produkowanych przekładnikach tworzą ciąg wartości, umożliwiając ich zastosowanie we wszystkich praktycznie spotykanych sytuacjach: 10; 12,5; 15; 20; 25; 30; 40; 50; 60; 75; 80 A oraz ich dziesiętne wielokrotności i podwielokrotności. Również moc znamionowa przekładników prądowych jest znormalizowana do wartości 2,5; 5; 10; 15; 20 i 30 VA [38].



Rys. 1.29. Struktura przekładnika prądowego (a) oraz jego schemat zastępczy (b)

W odróżnieniu od przekładników pomiarowych, *PP* stosowane do zabezpieczeń powinny charakteryzować się dużą dokładnością w spotykanych zakresach prądów zwarciovych, mogą być natomiast mniej dokładne w ustalonych warunkach pracy znamionowej. Osiąga się to przez taki dobór obwodu magnetycznego, aby podczas wielokrotnego wzrostu prądu pierwotnego (w stosunku do wartości znamionowej), błąd wynikający ze wzrostu prądu magnesującego (w rezultacie zwiększenia strumienia magnetycznego w rdzeniu ferromagnetycznym) był niewielki. Aby spełnić te wymagania, strumień magnetyczny w warunkach pracy znamionowej musi być niewielki. Charakterystyczną cechą *PP* jest zatem niewielka liczba zwojów w uzwojeniu pierwotnym – często jest to tylko jeden zwoj.

Dokładność PP jest pośrednio określana za pomocą *znamionowego granicznego współczynnika dokładności* K_G , który jest definiowany następująco [38]:

$$K_G = \frac{I_{pG}}{I_{pN}}, \quad (1.11)$$

gdzie: I_{pG} – znamionowy graniczny prąd pierwotny, I_{pN} – znamionowy prąd pierwotny (wielkości te są wyrażone w wartościach skutecznych).

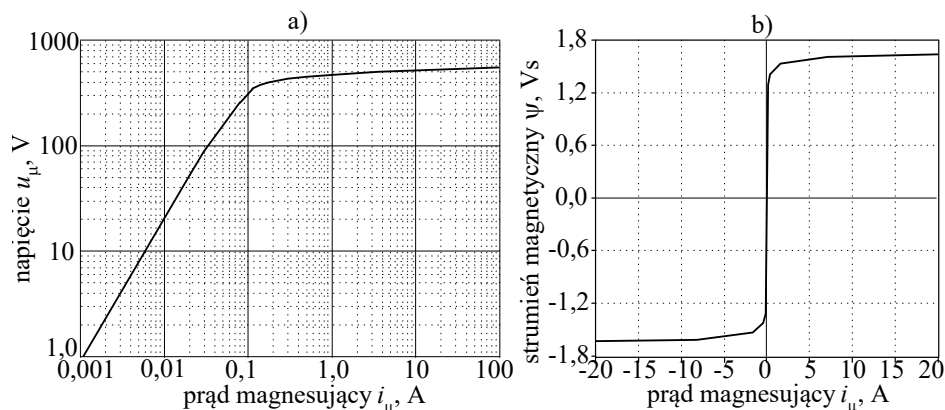
Prąd I_{pG} określa największą wartość prądu pierwotnego, przy którym błąd całkowity przekładnika obciążonego znamionowo (znamionowa impedancja obciążenia jest oznaczana przez Z_{obcN}) osiąga wartość określoną w normie. Znamionowa impedancja obciążenia jest związana ze znamionową mocą przekładnika S_N następującą relacją

$$S_N = I_{sN}^2 Z_{obcN}, \quad (1.12)$$

gdzie: I_{sN} jest znamionowym prądem wtórnym przekładnika,

przy czym, znamionowa impedancja obciążenia ma charakter indukcyjny o współczynniku mocy 0,8.

Podstawowe parametry przekładnika prądowego, z punktu widzenia jego doboru do zabezpieczenia, odnoszą się do mocy znamionowej S_N , klasy dokładności (stosowane są dwie klasy: 5P oraz 10P) oraz granicznego współczynnika dokładności K_G . Na przykład, w przypadku przekładnika 250/5 A/A o mocy $S_N=20$ VA, klasy kl. 5P i $K_G=30$, znamionowy graniczny prąd pierwotny $I_{pG}=7500$ A. Przy obciążeniu znamionowym $Z_{obcN} = 0,64 + j0,48\Omega$ i przepływie tego właśnie prądu, błąd całkowity przekładnika wynosi 5%. Jeśli impedancja obciążenia przekładnika wzrasta, to również szybko wzrasta błąd transformacji. Zależność ta jest określona przez charakterystykę magnesowania rdzenia PP , którą wygodnie jest w tym celu podawać we współrzędnych: napięcie na gałęzi magnesowania u_μ – prąd magnesowania i_μ (rys. 1.30 – obie wielkości w wartościach chwilowych), przy czym, dla warunków ustalonych:



Rys. 1.30. Charakterystyka magnesowania przekładnika: $u_\mu(i_\mu)$ (a) oraz $\psi(i_\mu)$ (b)

$$u_\mu = \sqrt{2} I_s |\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{obc}|. \quad (1.13)$$

Podstawowe właściwości przekładnika prądowego w stanie ustalonym podaje poniższy przykład.

Przykład 1.4. Zbadać odpowiedź przekładnika prądowego na ustalone wymuszenie w postaci prądu o wartości równej $50I_{pN}$. Podstawowe dane przekładnika: $I_{pN} = 25$ A, $I_{sN} = 1$ A, $S_N = 20$ VA, klasa dokładności 10P, graniczny współczynnik dokładności $K_G = 20$, $Z_2 = 1,8 + j0 \Omega$. Charakterystyka magnesowania rdzenia jest pokazana na rys. 1.30a.

Na podstawie (1.12) można określić znamionowe obciążenie przekładnika $Z_{obcN} = 16 + j12 \Omega$.

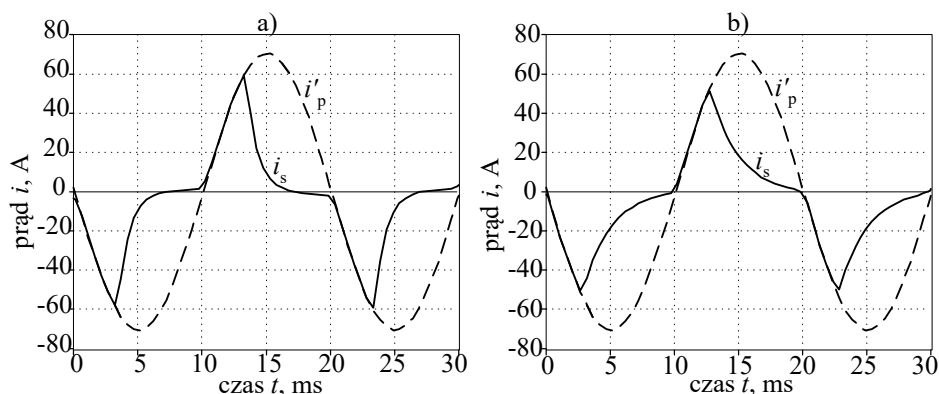
Dysponując tymi danymi można łatwo przeprowadzić symulację z wykorzystaniem programu EMTP. W tym celu jednak charakterystykę magnesowania należy przedstawić we współrzędnych: strumień magnetyczny ψ – prąd magnesowania i_μ . Można tu wykorzystać znaną zależność:

$$\psi = \int_0^t u_\mu(t) dt,$$

co w warunkach ustalonych wymuszenia sinusoidalnego sprowadza się do związku: $\psi = u_\mu / \omega_1$, gdzie ω_1 – pulsacja wymuszającego prądu. Przebieg charakterystyki magnesowania przekładnika $\psi(i_\mu)$ jest pokazany na rys. 1.30b. Badanie odpowiedzi przekładnika wykonano dla dwóch różnych charakterów obciążenia, zachowując jego moduł $|\underline{Z}_{obc}| = |\underline{Z}_{obcN}|$. Rys. 1.31a przedstawia

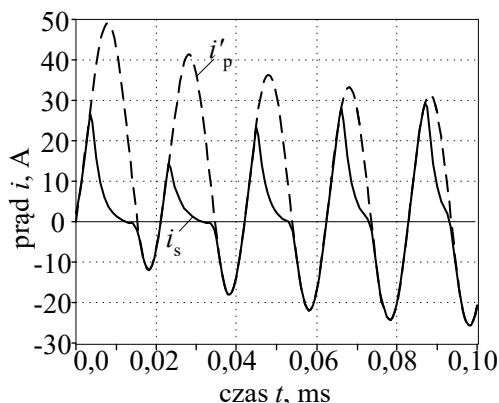
przebiegi prądów pierwotnego (sprowadzonego do uzwojenia strony wtórnej) i wtórno dla obciążenia rezystancyjnego $R_{obc} = |\underline{Z}_{obcN}|$, natomiast przebiegi na rys. 1.31b odpowiadają obciążeniu zbliżonemu do znamionowego. Różny przebieg prądów wtórnych w obu wypadkach wynika z różnych stałych czasowych obwodów wtórnych przekładnika w warunkach jego nasycenia.

Na rys. 1.31 widać, że po przekroczeniu pewnej wartości chwilowego prądu pierwotnego (a więc i strumienia magnetycznego ψ – rys. 1.30), która jest zależna także od impedancji obciążenia \underline{Z}_{obc} (1.13), prąd magnesowania i_μ gwałtownie rośnie, co jest przyczyną błędów transformacji. Chwilowy błąd transformacji zmienia się wraz ze zmianą strumienia magnetycznego w rdzeniu. □



Rys. 1.31. Przebiegi prądów w PP w stanie ustalonym przy obciążeniu rezystancyjnym (a) oraz znamionowym (b)

Z punktu widzenia warunków współpracy PP z szybkimi zabezpieczeniami, ważna jest analiza błędów transformacji w stanach przejściowych. W tym przypadku, najważniejszym czynnikiem, który może powodować duże błędy przejściowe transformacji jest występowanie w prądach zwarciovych zanikającej składowej stałej. Strumień magnetyczny może wówczas przyjmować duże wartości nawet przy niezbyt dużej amplitudzie składowej podstawowej prądu, powodując nasycenie rdzenia magnetycznego. Ilustrują to przebiegi na rys. 1.32, które odnoszą się do przekładnika z Przykładu 1.4. Składowa podstawowa prądu pierwotnego jest równa 20-krotnej wartości prądu znamionowego (a więc $I_p = K_G I_{pN}$), co oznacza w tym przypadku, że w stanie ustalonym całkowity błąd pomiaru nie przekracza 10%. Pojawienie się składowej nieokresowej powoduje wystąpienie dużego błędu przejściowego, co może powodować błędną ocenę zdarzenia przez układy automatyki elektroenergetycznej.



Rys. 1.32. Transformacja prądu w *PP* o amplitudzie $I_1 = 20I_{1N}$ i występowaniu składowej aperiodycznej, $Z_{obc} = Z_{obcN}$

Pomimo istnienia wielu nowych rozwiązań przekładników prądowych (są to tak zwane przekładniki niekonwencjonalne), które zapewniają znacznie większą dokładność pomiaru prądu w dużym zakresie jego zmian, przekładniki indukcyjne w dalszym ciągu dominują w elektroenergetyce. Głównym powodem tego jest wysoka cena, jaką użytkownicy musieliby zapłacić za wymianę istniejących

urządzeń (zarówno przekładników, jak i dostosowanych do nich urządzeń automatyki).

Przekładniki indukcyjne mogą być w prosty sposób zastosowane do filtracji składowej zerowej prądu trójfazowego. Rozwiązanie takie, w postaci przekładnika Ferrantiego [38], polega na tym, że przez okno toroidalnego rdzenia magnetycznego przepuszczone są trzy fazy systemu trójfazowego. Na wyjściu *PP* otrzymuje się wówczas sumę prądów fazowych (odniesioną do obwodu wtórnego). Wielkość ta jest ważnym wskaźnikiem występowania zwarć doziemnych w maszynach i sieciach elektrycznych.

1.6.2 Przekładniki napięciowe

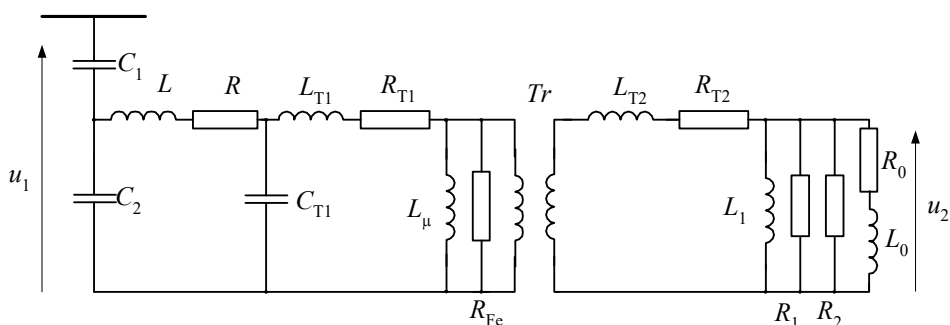
Pomiar napięcia w systemie elektroenergetycznym odbywa się za pośrednictwem *przekładników napięciowych (PN)* (ang. *voltage transformer, potential transformer*). Podobnie jak w przypadku *PP*, podstawowym zadaniem tych urządzeń jest transformacja mierzonego napięcia do poziomu dogodnego dla standardowych przyrządów oraz izolacja obwodów wtórnych od przewodów wysokiego napięcia i między sobą. W przypadku zastosowań do automatyki elektroenergetycznej, napięcie wtórne jest znormalizowane do wartości 100 V, $100/\sqrt{3}$ V lub $100/3$ V w zależności od sposobu połączenia zacisków pierwotnych i wtórnych (do pomiaru odpowiednio, napięć międzyprzewodowych, fazowych oraz napięć

kolejności zerowej, jeśli zaciski wtórne trzech przekładników fazowych są połączone w otwarty trójkąt). Obecnie stosowane są głównie dwa rodzaje *PN*: przekładniki indukcyjne oraz pojemnościowe.

Indukcyjne *PN* są specjalnie wykonanymi transformatorami pomiarowymi, których schemat zastępczy nie odbiega od schematu zastępczego zwykłego transformatora (najczęściej są to transformatory jednofazowe). Ze względu na zakres zmian mierzonego napięcia, transformatory te pracują zazwyczaj w liniowym przedziale charakterystyki magnesowania rdzenia ferromagnetycznego.

Wadą przekładników indukcyjnych jest ich duży koszt, który szybko wzrasta, gdy napięcie pierwotne przekracza wartość 110 kV. W sieciach najwyższych napięć stosowane są wobec tego pojemnościowe przekładniki napięciowe (*PPN*). Głównym elementem takiego przekładnika jest pojemnościowy dzielnik napięcia, w którym napięcie pierwotne jest obniżane do poziomu kilkunastu kV. Dalsza redukcja napięcia odbywa się za pośrednictwem transformatora indukcyjnego.

Takie rozwiązanie jest uzasadnione ekonomicznie i stąd jego powszechne zastosowanie w sieciach najwyższych napięć. Niestety, w takich przekładnikach mogą powstawać przejściowe błędy, które są niekorzystne z punktu widzenia szybkich zabezpieczeń przekaźnikowych. Problem ten można prześledzić na schemacie zastępczym *PPN* (rys. 1.33). Poszczególne elementy schematu zastępczego reprezentują następujące elementy przekładnika:



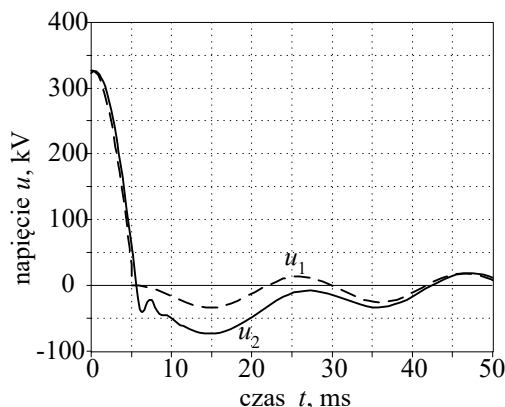
Rys. 1.33. Schemat zastępczy pojemnościowego przekładnika napięciowego

- | | |
|---|------------------------------|
| C_1, C_2 | – dzielnik kondensatorowy, |
| L, R | – dławik rezonansowy, |
| L_1, R_1, R_2 | – układ tłumiący drgania |
| | ferrorezonansowe, |
| $L_{T1}, R_{T1}, L_{T2}, R_{T2}, L_\mu, R_{Fe}, C_{T1}$ | – elementy reprezentujące |
| | transformator pośredniczący, |

L_0, R_0

– obciążenie przekładnika.

Drgania ferorezonansowe mogą powstać w obwodzie z szeregowym połączeniem pojemności $C_1 + C_2$ i indukcyjności nieliniowej L_μ [37].



Rys. 1.34. Przebiegi napięć na wejściu i wyjściu PPN podczas zwarcia

Na rys. 1.34 pokazany jest przebieg napięć pierwotnego i wtórnego (przeskalowanego do wartości pierwotnej) podczas bliskiego zwarcia na linii 400 kV (moment wystąpienia zwarcia $t_{zw} = 5$ ms). Widać znaczne, długotrwałe odchylenie przebiegu mierzonego napięcia, co może być źródłem błędnej decyzji przełącznika.

Istnieje wiele sposobów kompensacji błędów dynamicznych przekładników prądowych i napięciowych. Niektóre z nich są przedstawione w rozdziale 6.

1.7 Zintegrowane systemy sterowania stacją elektroenergetyczną

Podstawowe zadania sterowania, nadzoru i zabezpieczeń systemu elektroenergetycznego są realizowane w stacji elektroenergetycznej. W wykonaniu tradycyjnym, zadania te są rozdzielone pomiędzy oddzielne układy automatyki i zabezpieczeń. Każdy z tych układów samodzielnie wykonuje typowe funkcje, takie jak, pomiar prądu i napięcia, czy też identyfikację stanu łączników w celu wykonania określonej funkcji zabezpieczenia lub kontroli obiektów stacji. Takie rozwiązanie ma swoje uzasadnienie w tradycyjnym wykonaniu tych układów. Można jednak

elementy L_1, R_1 , oraz R_2 tworzą obwód tłumiący te właśnie drgania. Stosunkowo duże pojemności dzielnika napięcia (C_1, C_2), a także indukcyjności w schemacie zastępczym transformatora (L_{T1}, L_{T2}, L_μ), wywołują stany przejściowe, w których występują składowe tłumione o różnych stałych zanikania i znacznych amplitudach. Ich wpływ na błąd przekładnika zależy od chwilowej wartości napięcia i skali jego redukcji w momencie zwarcia.

wskazać przynajmniej na dwie niedogodności tego rozwiązania. Pierwsza odnosi się do sfery kosztów, które są z pewnością większe w przypadku powielania tych samych funkcji w wielu urządzeniach, co wymaga również wielokrotnego użycia układów pomiarowych i okablowania. Drugi problem, to nieuchronne ograniczenie dostępnej informacji przy realizacji określonych zadań do tych pomiarów i sygnałów, które są związane tylko z nadzorowanym obiektem.

Nowoczesne technologie gromadzenia i przesyłu informacji dają możliwość łatwej integracji wielu funkcji systemu. Zintegrowany system powinien mieć wszystkie zalety systemu tradycyjnego i jednocześnie rozszerzać jego możliwości przy obniżeniu kosztów. Charakteryzują go następujące cechy.

- Eliminacja zbędnego zwielokrotnienia układów przesyłania informacji i lepsze wykorzystanie dostępnych danych. Na przykład, pomiar stanu wyłącznika może służyć zarówno układom zabezpieczeniowym, jak i rejestracji zdarzeń, czy też do zobrazowania układu połączeń stacji.
- Redukcja okablowania stacji przez zastosowanie łącz światłowodowych i transmisji cyfrowej. Rozwiązanie takie stwarza także możliwość wielokrotnego sprawdzania wiarygodności przesyłanych danych, a ponadto, w znacznie większym stopniu chroni przesyłaną informację przed oddziaływaniem zakłóceń elektromagnetycznych.
- Możliwość łatwej rozbudowy zarówno samego systemu sterowania, jak i jego adaptacji do rozbudowującej się stacji lub wyłączeń związanych z remontem.
- Możliwość współpracy różnych urządzeń w stacji oraz zdalnego nadzoru układów automatyki i zabezpieczeń.

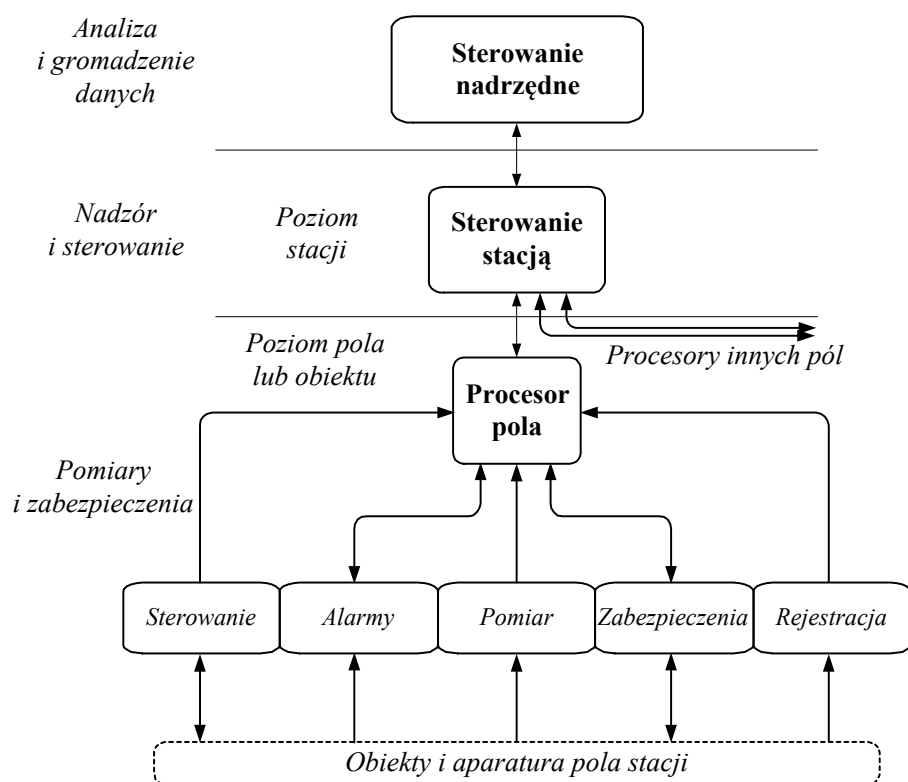
Istotne jest przy tym takie rozdzielenie zadań systemu sterowania stacją, aby zachować wysokie parametry techniczne najbardziej pod tym względem wymagających funkcji związanych z automatyką zabezpieczeniową.

Zazwyczaj formułuje się następujący zakres zadań zintegrowanego systemu sterowania stacją elektroenergetyczną [27]:

- zabezpieczenia obiektów stacji,
- zbieranie i gromadzenie danych,
- pomiary ruchowe i rozliczeniowe,
- sterowanie lokalne,
- regulacja napięcia,
- kontrola zasilania obwodów pomocniczych,
- rejestracja zdarzeń i zakłóceń,
- kontrola jakości energii.

Realizacja powyższych zadań w jednym zintegrowanym systemie wymaga rozwiązania wielu problemów algorytmicznych i sprzętowych. Kluczem do poprawnej realizacji systemu jest zapewnienie niezawodnej i wydajnej komunikacji pomiędzy oddzielnymi układami. W celu zapewnienia wysokiej niezawodności istotna jest także organizacja systemu. Zadania najwyższego priorytetu, którymi bez wątpienia są zabezpieczenia, powinny być skojarzone z nadzorowanym obiektem (polem stacji). Tu także wymagana jest najwyższa szybkość kanałów komunikacyjnych. Z kolei zadania sterowania na poziomie stacji, jak regulacja napięcia, czy rejestracja zakłóceń, wymagają większej pamięci na gromadzenie danych.

Typowe rozwiązanie zintegrowanego systemu sterowania i zabezpieczeń jest pokazane na rys. 1.35. Posiada on strukturę hierarchiczną, przy czym na najniższym poziomie związanym z polem stacji jest realizowane



Rys. 1.35. Struktura zintegrowanego systemu sterowania stacją elektroenergetyczną

przetwarzanie rozproszone, z mikroprocesorami realizującymi krytyczne funkcje zabezpieczeń, sterowania i pomiarów dla każdego pola stacji. Procesor poziomu pola gromadzi i przesyła informacje do i z każdego elementu funkcjonalnego, a także komunikuje się z procesorem stacynym.

Na następnym poziomie hierarchii znajduje się komputer stacyjny, który wykonuje scentralizowane zadania takie jak: przetwarzanie danych, monitorowanie procesorów pól, nadrzędne sterowanie łącznikami itp. Na tym poziomie znajduje się też układ komunikacji z użytkownikiem, z którego można otrzymać informacje o stanie wszystkich łączników, nastawienia zabezpieczeń, listę zdarzeń i alarmów, dane pomiarowe itp. Na tym poziomie znajdują się też narzędzia programowe umożliwiające modyfikacje parametrów systemów zabezpieczeń i sterowania.

Wyższy poziom hierarchii to regionalne (obszarowe) centrum sterowania z dwustronną komunikacją pomiędzy tym centrum a komputerami stacyjnymi w zakresie informacji o stanie systemu.

Trzeba tu zauważyć, że w tym systemie zabezpieczenia pozostają autonomiczne i wypełniane przez nie krytyczne funkcje są realizowane nawet wtedy, gdy pozostała część systemu jest uszkodzona. Komunikacja pomiędzy wszystkimi poziomami jest realizowana przez łącza szeregowo z wykorzystaniem światłowodów.

Takie rozwiązanie posiada szereg zalet w stosunku to standardowych układów stacyjnych. Zaliczyć do nich trzeba:

- Niezawodność: technologia mikroprocesorowa, pozwala na realizację intensywnych procedur samotestowania i diagnostyki, które mogą być włączone we wszystkie funkcje i aplikacje (np. zabezpieczenia lub monitorowanie obiektu). W efekcie uzyskuje się zwiększoną niezawodność całego systemu sterowania i zabezpieczeń.
- Adaptacyjność: programowalna natura systemów mikroprocesorowych może być łatwo wykorzystana to zmiany parametrów sterowania stosownie do występujących zdarzeń (np. zdalne programowanie nastaw zabezpieczeń, zmiana konfiguracji systemów sterowania i zabezpieczeń itp).
- Rozbudowany, inteligentny układ komunikacji z użytkownikiem, który pełni funkcje doradcze w stosunku do operatora systemu.
- Zredukowane okablowanie i sprzęt: jest to rezultat wielokrotnego wykorzystywania danych, oraz rozbudowanych sposobów przesyłania danych między obiektami systemu (transmisja informacji zamiast przesyłania sygnałów).

Należy zauważyć, że współczesne przekaźniki zabezpieczeniowe są złożonymi systemami mikroprocesorowymi z możliwością realizacji wielu funkcji lokalnych oraz z rozbudowanym układem komunikacji z obsługą i nadrzędnym systemem sterowania stacją elektroenergetyczną. W odniesieniu do takich urządzeń coraz częściej używa się określenia *terminal zabezpieczeniowy*. Układ taki można łatwo połączyć z lokalną siecią komputerową, a także z internetem (oczywiście, z rozsądną separacją podstawowych jego funkcji). Rozwiązanie to daje również nieocenione usługi producentom sprzętu, gdyż możliwy jest wówczas zdalny nadzór urządzenia, jego bieżąca diagnostyka i gromadzenie doświadczeń w zakresie poprawności przyjętych rozwiązań.

Obok nowych rozwiązań układowych, charakterystyczną cechą zintegrowanych systemów sterowania stacją elektroenergetyczną jest zastosowanie nowoczesnych technik algorytmicznych do realizacji zadań sterowania i kontroli. Stosowane jest tutaj pojęcie inteligentnych układów mikroprocesorowych [3]. Określenie to nawiązuje zarówno do dużej autonomizacji pracy takiego systemu, jak i do stosowanych w nim algorytmów przetwarzania informacji i podejmowania decyzji.

1.8 Podsumowanie

Przedstawione powyżej krótkie wprowadzenie do zagadnień organizacji i funkcjonowania układów automatyki elektroenergetycznej pokazuje znaczenie, jakie mają procedury przetwarzania informacji w procesie podejmowania decyzji w tych układach. Ze schematu przedstawionego na rys. 1.16 widać, że podstawowe funkcje przekaźnika zabezpieczeniowego są realizowane w układzie pomiarowym (gdzie określone są wielkości kryterialne) oraz w układzie decyzyjnym (sprawdzenie warunku kryterialnego i podjęcie decyzji). W przekaźnikach cyfrowych funkcje te są realizowane w oparciu o odpowiednie procedury numeryczne. Książka ta poświęcona jest przede wszystkim analizie podstawowych procedur, które służą tym właśnie celom.

Można zauważyć, że przedstawione powyżej kryteria, według których działają zabezpieczenia, odnoszą się do wielkości reprezentowanych w postaci wartości skutecznej, sygnału zespolonego określonej harmonicznej (reprezentowanego przez dwie składowe ortogonalne lub amplitudę i fazę), czy też przebiegu chwilowego, który jest charakteryzowany przez kształt i czas trwania. Stosowane są także inne wielkości. Można je podzielić na następujące grupy:

- wartość skuteczna obserwowanego sygnału;
- amplituda i faza sygnału zespolonego odnoszącego się do wybranej harmonicznej sygnału;
- moc sygnału w określonym paśmie częstotliwości;
- kształt sygnału.

Są one podstawą do zdefiniowania określonych wielkości elektrycznych, które już bezpośrednio występują w charakterze wielkości kryterialnych zabezpieczenia. Można tu wyróżnić następujące wielkości:

- wartość skuteczna prądu lub napięcia;
- amplituda i faza prądu lub napięcia (odniesiona do odpowiedniej harmonicznej);
- chwilowa moc elektryczna;
- faza pomiędzy określonymi sygnałami reprezentującymi prąd lub napięcie;
- impedancja zastępcza obwodu;
- natężenie strumienia magnetycznego;
- częstotliwość.

Należy zauważyć, że w systemie trójfazowym wielkości te mogą odnosić się do naturalnych wielkości fazowych lub odpowiednio przetworzonych wielkości modalnych (na przykład, składowych symetrycznych). W charakterze wielkości kryterialnych mogą także występować inne wielkości fizyczne, jak temperatura, prędkość obrotowa, ciśnienie, poziom płynu.

W kolejnych rozdziałach książki są przedstawione metody cyfrowego pomiaru najważniejszych wielkości kryterialnych, ocena ich błędów oraz zasady podejmowania decyzji przez przekaźnik zabezpieczeniowy.

1.9 Literatura

- [1] Aggarwal R.K., Johns A.T.: *A differential line protection scheme for power systems using composite voltage and current measurements*. IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 4, 1989, ss. 1595-1601.
- [2] *Alternative Transients Program (ATP) – Rule Book*. Canadian/American User Group. 1987-1998.
- [3] Anderson P.M.: *Power system protection*. IEEE Press, McGraw-Hill. New York 1999.
- [4] Anderson P.M., Fouad A.A.: *Power system control and stability*. The Iowa State University Press. Ames, Iowa, USA 1977.
- [5] *Application Guide on Protection of Complex Transmission Network Configuration*. CIGRE SC34-WG04, May 1991.

- [6] Bergen A. R., Vittal V.: *Power systems analysis*. Prentice Hall. Upper Saddle River, New Jersey 2000.
- [7] Chamia M., Liberman S.: *Ultra high speed relay for EHV/UHV transmission line – development, design and application*. IEEE Transactions on PAS. Vol. 97, 1978, ss. 2104-2116.
- [8] Crossley P.A., McLaren P.G.: *Distance protection based on travelling waves*. IEEE Transactions on PAS. Vol. 102, 1983, ss. 2971-2983.
- [9] Dommel H.W.: *Digital computer solution of electromagnetic transients in single and multiphase networks*. IEEE Transactions on PAS. Vol. 88, 1969, ss. 388-396.
- [10] Dommel H.W.: *Electromagnetic Transients Program Reference Manual (EMTP Theory Book)*. Bonneville Power Administration. Portland, Oregon 1986.
- [11] Elmore W.A. (Red.): *Protective relaying. Theory and applications*. Marcel Dekker, Inc. New York 1994.
- [12] Elmore W.A. (Red.): *Pilot protective relaying*. Marcel Dekker, Inc. New York 2000.
- [13] Horowitz S.H., Phadke A.G.: *Power system relaying*. John Wiley & Sons, Inc. New York, 1992.
- [14] IEEE Std C37133-1999: *IEEE Guide for Protective Relay Application to Transmission Lines*. The Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc. New York, 2000.
- [15] Iżykowski J.: *Impedancyjne algorytmy lokalizacji zwarć w liniach przesyłowych*. Prace Naukowe Instytutu Energoelektryki Pol. Wr. nr 92. Wydawnictwo Pol. Wr. Wrocław 2001.
- [16] Johns A.T., Salman S.K.: *Digital Protection for Power Systems*. Peter Peregrinus Ltd. IEE Power Series 15, London 1995.
- [17] Lorenc J.: *Admitancyjne zabezpieczenia ziemnozwarciowe kompensowanych sieci średnich napięć*. Rozprawy Nr 272. Wydawnictwo Pol. Poznańskiej. Poznań 1992.
- [18] Kacejko P., Machowski J.: *Zwarcia w sieciach elektroenergetycznych. Podstawy obliczeń*. WNT. Warszawa 1993.
- [19] Kasztenny B., Rosołowski E., Saha M.M., Hillstrom B.: *A power transformer model for investigation of protection schemes*. Proceedings of the International Conference on Power System Transients, Lisbon, Portugal, September 3-7, 1995, ss. 136-141.
- [20] Kasztenny B., Rosołowski E., Saha M.M., Hillstrom B.: *A comparative analysis of protection principles for multi-criteria power transformer relaying*. Proceedings of the 12th Power Systems Computation Conference, Dresden, 1996, ss. 107-113.
- [21] Kremens Z., Sobierajski M.: *Analiza systemów elektroenergetycznych*. WNT. Warszawa 1996.

- [22] Kucharski J., Pytel J., Rosołowski E., Trybała T.: *Analiza awarii generatora w Elektrowni Turów*. Przegląd Elektrotechniczny, R.LXXV 7-8/1999, ss. 177-181.
- [23] Machowski J., Białek J., Bumby J.R.: *Power system dynamics and stability*. John Wiley & Sons Ltd. Chichester 1997.
- [24] Mansour M.M., Swift G.W.: *A multi-microprocessor based travelling wave relay – theory and realization*. IEEE Transactions on Power Delivery Vol. 1, 1986, ss. 273-279.
- [25] Paithankar Y.G.: *Transmission network protection. Theory and practice*. Marcel Dekker, Inc. New York 1997.
- [26] Phadke A.G., Thorp J.S.: *Computer Relaying for Power Systems*. Research Studies Press Ltd. Taunton 1994.
- [27] Rosołowski E., Szafran J.: *Nowoczesne metody sterowania stacją elektroenergetyczną*. III Konferencja 'Sieci elektroenergetyczne w przemyśle i energetyce'. SIECI '98. Wrocław, 1998. Materiały Konferencyjne, Tom 1, ss. 115-134.
- [28] Saha M.M., Kasztenny B., Rosołowski E., Iżykowski J.: *First zone algorithm for protection of series compensated lines*. IEEE Transactions on Power Delivery, Vol.16, No.2, April 2001, ss.200-207.
- [29] Synal B.: *Elektroenergetyczna automatyka zabezpieczeniowa. Podstawy*. Oficyna Wydawnicza Pol. Wr. Wrocław 2000.
- [30] Szafran J., Wiszniewski A.: *Algorytmy pomiarowe i decyzyjne cyfrowej automatyki elektroenergetycznej*. WNT. Warszawa 2001.
- [31] Шнеерсон Е.М.: *Дистанционные защиты*. Энергоатомиздат, Москва 1986.
- [32] Ungrad H., Winkler W., Wiszniewski A.: *Protection techniques in electrical energy systems*. Marcel Dekker, Inc. New York 1995.
- [33] Wedepohl L.M.: *Application of matrix methods to the solution of travelling wave phenomena in polyphase systems*. Proceedings of IEE, No 110, 1963, ss. 2200-2212.
- [34] Weedy B.M., Cory B.J.: *Electric power systems*. John Wiley & Sons. Chichester 1998.
- [35] Winkler W., Dawid Z., Pilch Z., Sowa P.: *Performance of phase-comparison protection schemes during transient faults on series compensated transmission lines*. Proceedings of the 9th PSCC, Cascais, 1987, ss. 732-738.
- [36] Winkler W., Wiszniewski A.: *Automatyka zabezpieczeniowa w systemach elektroenergetycznych*. WNT. Warszawa 1999.
- [37] Wiszniewski A., Iżykowski J.: *Influence of ferroresonance suppression circuits upon the transients response of capacitive voltage transformers*. IEE Conference Publ.. No. 125, Developments in Power System Protection, London 1975, ss. 182-188.
- [38] Wiszniewski A.: *Przekładniki w elektroenergetyce*. WNT. Warszawa 1992.
- [39] Wright A., Christopoulos C.: *Electrical power system protection*. Chapman&Hall. London 1993.

-
- [40] Wróblewski J.: *Zespoły elektroenergetycznej automatyki zabezpieczeniowej*. WNT. Warszawa 1993.
 - [41] Ziegler G.: *Numerical distance protection. Principles and application*. Publicis-MCD-Verlag. Erlangen, 1999.
 - [42] Zielichowski M., Fulczyk M., Mydlikowski R.: *Ground-fault fast transients in modern unit-connected generators*. ETEP, Vol. 10, No 3, May/June 2000, ss. 171-178.
 - [43] Żydanowicz J.: *Elektroenergetyczna automatyka zabezpieczeniowa*. T. 1-3, WNT. Warszawa 1979-1988.

Rozdział 2

ZASADY CYFROWEGO PRZETWARZANIA SYGNAŁÓW

2.1 Wstęp

Kluczowym pojęciem w dziedzinie cyfrowego przetwarzania sygnałów jest *sygnał*, rozumiany jako funkcja, zazwyczaj czasu, która przenosi informację. Funkcja określająca sygnał może mieć charakter ciągły lub dyskretny. W pierwszym przypadku jest ona zdefiniowana dla dowolnej wartości czasu, podczas gdy w drugim - zmienna niezależna reprezentująca czas przyjmuje tylko określone, dyskretne wartości.

Wielkości występujące w układach fizycznych można najczęściej reprezentować sygnałami, które są ciągłe w czasie i mogą przybierać dowolne wartości w zadanym przedziale zmian. Takie sygnały nazywają się *sygnałami analogowymi*. Typowymi sygnałami z tej grupy są sygnały prądu i napięcia mierzone na wyjściach przekładników pomiarowych w stacjach elektroenergetycznych. Takie sygnały nie mogą być bezpośrednio przetwarzane w komputerze i stąd potrzeba stosowania przetworników analogowo-cyfrowych.

Cyfrowe układy automatyki elektroenergetycznej należą do bardziej ogólnej rodziny *układów dyskretnych*, w których zarówno sygnały wejściowe i wyjściowe, jak i sygnały wewnętrzne są opisane funkcjami dyskretnego czasu $x(k)$ lub $x(kT)$, gdzie k jest indeksem oznaczającym numer próbki, natomiast T jest okresem próbkowania. Jeśli sygnał $x(k)$ przybiera tylko skończoną liczbę możliwych wartości (co wynika z długości rejestru procesora lub pamięci komputera), to rozpatrywany sygnał jest nazywany *sygnałem cyfrowym*, a odpowiadający mu układ jest *układem cyfrowym*. Zatem, różnica pomiędzy sygnałem dyskretnym a sygnałem cyfrowym leży w błędzie kwantowania. W wielu rozważaniach pomija się go, co pozwala przenieść wszystkie procedury dotyczące sygnałów

dyskretnych także na sygnały cyfrowe. Jest to założenie bardzo pomocne, gdyż można wówczas korzystać z bardzo rozbudowanej teorii sygnałów dyskretnych [19]. Należy jednak pamiętać, że różnica między tymi dwoma pojęciami dotyczy problemów realizacji algorytmów przetwarzania sygnałów dyskretnych w konkretnych urządzeniach cyfrowych. Na etapie projektowania określonych procedur przetwarzania niezbędna jest ocena wpływu błędów kwantowania na błąd cyfrowej realizacji algorytmu. Problem ten jest istotny wówczas, gdy algorytmy są realizowane w układach mikroprocesorowych o stosunkowo krótkim rejestrze procesora (mikroprocesory 8-16 bitowe z arytmetyką stałoprzecinkową). W przypadku stosowania współczesnych 32-bitowych procesorów sygnałowych z arytmetyką zmiennopozycyjną zagadnienie to jest zazwyczaj do pominięcia, a dalsze rozważania dotyczące przetwarzania sygnałów będą się odnosiły do sygnałów i systemów dyskretnych.

Analiza i projektowanie układów do przetwarzania sygnałów opiera się na obserwacji, że ich właściwości można opisać w dziedzinie czasu lub częstotliwości. Dziedziny te można stosować wymiennie w zależności od tego, które charakterystyki systemu lub sygnału są w danym podejściu łatwiej opisywane. Matematyczny aparat, który służy do transformacji opisu systemu lub sygnału pomiędzy tymi dwiema dziedzinami jest utworzony na bazie przekształcenia Fouriera i przekształcenia Laplace'a (głównie w odniesieniu do sygnałów i systemów ciągłych) oraz przekształcenia \mathcal{Z} (stosowanego w odniesieniu do sygnałów i systemów dyskretnych). Zagadnieniom tym poświęcona jest pierwsza część rozdziału (p. 2.2). Przedstawiony tam materiał jest podany bardzo skrótowo w celu przypomnienia podstawowych pojęć i określeń stosowanych w teorii przetwarzania sygnałów. Czytelnik pragnący gruntownie zapoznać się z tymi problemami może skorzystać w tym celu z bogatej literatury specjalistycznej [20], [30].

Cyfrowe przetwarzanie sygnałów, któremu poświęcona jest podstawowa część rozdziału (p. 2.2–2.4), polega na przekształcaniu sygnałów wejściowych w sygnały wyjściowe zgodnie z określonym *algorytmem przetwarzania*. Przetwarzanie takie jest dokonywane w określonym *układzie cyfrowym* lub *filtrze cyfrowym*. Oba te określenia będą używane wymiennie, chociaż pojęcie filtra cyfrowego jest bardziej kojarzone z przetwarzaniem, którego funkcje są zbliżone do funkcji tradycyjnych filtrów ciągłych (analogowych). Niektóre filtry cyfrowe mogą być realizowane przez wykonywanie algorytmu splotu lub korelacji sygnału wejściowego z określoną funkcją bazową. W p. 2.4 analizowane są właściwości i konsekwencje użycia korelacji w procedurze filtru.

W końcowej części rozdziału (p. 2.5) podane jest krótkie wprowadzenie do zagadnienia czasowo-częstotliwościowego przetwarzania sygnałów. Ta grupa metod przetwarzania sygnałów o zmiennych w czasie parametrach – zwłaszcza transformacja falkowa – jest przedmiotem dużego zainteresowania w ostatnich latach, również z punktu widzenia możliwości jej zastosowania w automatyce elektroenergetycznej.

2.2 Podstawy matematyczne przetwarzania sygnałów

2.2.1 Przekształcenie Fouriera

Podstawą analizy fourierowskiej jest reprezentacja sygnału o dowolnym kształcie za pomocą zbioru sygnałów określonych przez funkcje należące do jednej rodziny funkcji sinusoidalnych. Uzyskane w ten sposób składowe w postaci funkcji sinus i kosinus są prostsze do analizy niż sygnał oryginalny, który niekiedy może mieć bardzo złożoną formę. Jest to związane między innymi z tym, że sygnał sinusoidalny jako jedyny, nie zmienia swojego kształtu podczas przejścia przez układ liniowy. Podając na wejście układu liniowego sygnał sinusoidalny uzyskuje się na wyjściu odpowiedź w postaci przebiegu sinusoidalnego z ewentualnie zmienioną fazą oraz amplitudą.

Przekształcenie Fouriera wiąże funkcję czasu z jej reprezentacją w dziedzinie częstotliwości. Ogólne przekształcenie Fouriera odnosi się do bardzo szerokiej klasy funkcji. W wielu praktycznych zastosowaniach występują funkcje czasu specjalnego charakteru, które są ograniczone do węższej grupy sygnałów, na przykład, okresowych. Można wówczas wykorzystać właściwości przekształcenia Fouriera odnoszące się do takiej właśnie zawężonej klasy sygnałów. Z tego punktu widzenia można wyróżnić się cztery rodzaje przekształceń Fouriera, które są stosowane do czterech grup funkcji reprezentujących sygnał w dziedzinie czasu. Ich wspólną bazą jest najbardziej ogólne przekształcenie określone dla funkcji ciągłej nieokresowej. Pozostałe rodzaje transformacji są definiowane dla odpowiednio zawężonych klas sygnałów: sygnału ciągłego okresowego, sygnału dyskretnego nieokresowego oraz sygnału dyskretnego okresowego. Ze względu na charakter funkcji reprezentującej sygnał (funkcja rzeczywista lub zespolona), w każdej z tych grup można wydzielić jeszcze dwie kategorie przekształceń. To rozróżnienie bierze pod

uwagę konkretne zastosowania przekształcenia, chociaż transformata sygnału rzeczywistego jest podzbiorem transformaty sygnału zespolonego. Poniżej podano podstawowe zależności oraz charakterystyki wymienionych rodzajów przekształcenia Fouriera.

Przekształcenie odnoszące się do sygnałów ciągłych nieokresowych.

Jest ono nazywane przekształceniem całkowym lub po prostu *przekształceniem Fouriera*. Transformata Fouriera jest w tym przypadku określona następującą parą zależności (przekształcenia odnoszą się odpowiednio do sygnałów rzeczywistych i zespolonych):

- przekształcenie proste:

$$X(j\omega) = X_r(\omega) + jX_i(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{x}(t)e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}\{\underline{x}(t)\}, \quad (2.1)$$

$$X_r(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(\omega t), \quad (2.2)$$

$$X_i(\omega) = - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(\omega t);$$

- przekształcenie odwrotne:

$$\underline{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\}, \quad (2.3)$$

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} (X_r(\omega) \cos(\omega t) - X_i(\omega) \sin(\omega t)) d\omega, \quad (2.4)$$

gdzie: $\underline{x}(t) = x_r(t) + jx_i(t)$ jest sygnałem zespolonym, natomiast $x(t)$ jest sygnałem rzeczywistym; oznaczenie $X(j\omega)$ wskazuje na to, że jest to zespolona funkcja częstotliwości; $X_r(\omega)$ - widmo rzeczywiste, $X_i(\omega)$ - widmo urojone.

Forma wyrażenia (2.4) wynika z faktu, że w przypadku, gdy przebieg $\underline{x}(t)$ jest ograniczony do części rzeczywistej, to jego widmo rzeczywiste jest funkcją parzystą, a widmo urojone - nieparzystą funkcją zmiennej ω :

$$X_r(\omega) = X_r(-\omega), \quad X_i(\omega) = -X_i(-\omega). \quad (2.5)$$

Widmo sygnału $\underline{x}(t)$, jako funkcję zespoloną, można również przedstawić w postaci wykładniczej

$$X(j\omega) = |X(j\omega)|e^{j\theta(\omega)}, \quad (2.6)$$

gdzie:

$$|X(j\omega)| = \sqrt{X_r^2(\omega) + X_i^2(\omega)}, \quad (2.7)$$

$$\theta(\omega) = \arctg \frac{X_i(\omega)}{X_r(\omega)}. \quad (2.8)$$

W przypadku rzeczywistego sygnału $x(t) = x(t)$, w odniesieniu do funkcji (2.7), (2.8), podobnie jak w (2.5), zachodzi również symetria parzystości i nieparzystości

$$|X(j\omega)| = |X(-j\omega)|, \quad \theta(\omega) = -\theta(-\omega), \quad (2.9)$$

odpowiednio, w odniesieniu do modułu i fazy transformaty.

Przykład 2.1. Określić i przeanalizować przekształcenie Fouriera następującej funkcji

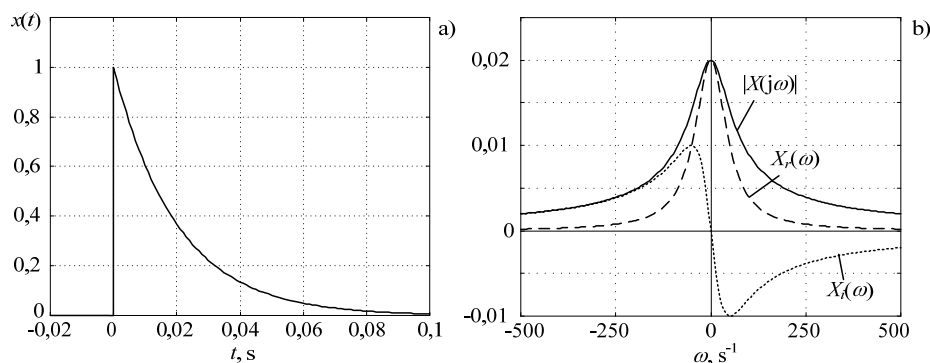
$$x(t) = \begin{cases} e^{-t/\tau} & \text{dla } t \geq 0, \\ 0 & \text{dla } t < 0, \end{cases} \quad \tau = 0,02 \text{ s.}$$

Przebieg funkcji jest pokazany na rys. 2.1a. Jest to funkcja reprezentująca zjawisko aperiodycznego zanikania, charakterystycznego dla prądu w obwodzie szeregowym RL lub napięcia w obwodzie równoległym RC .

Do obliczenia transformaty można skorzystać z zależności (2.1), przy czym, ze względu na charakter funkcji, w przedziale całkowania można pominąć ujemną część osi liczbowej

$$X(j\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-t/\tau} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(1/\tau + j\omega)t} dt = -\frac{1}{1/\tau + j\omega} e^{-(1/\tau + j\omega)t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{1/\tau + j\omega}.$$

$$\text{Stąd: } X_r(\omega) = \frac{1/\tau}{(1/\tau)^2 - \omega^2}, \quad X_i(\omega) = \frac{-\omega}{(1/\tau)^2 - \omega^2}.$$



Rys. 2.1. Sygnał ciągły nieokresowy (a) i jego transformaty (b)

Przebiegi modułu oraz składowych zespolonych transformaty $X(j\omega)$ są pokazane na rys. 2.1b. Widać, że są to ciągłe funkcje częstotliwości, których argumenty mieszczą się w całym zakresie liczb rzeczywistych.

Faza transformaty (widmo fazowe) jest równa:

$$\angle X(j\omega) = \arg(X(j\omega)) = \operatorname{arctg} \frac{X_i(\omega)}{X_r(\omega)} = \operatorname{arctg}(-\omega\tau)$$

Analizując moduł transformaty (widmo amplitudowe – rys. 2.1b) widać, że dominuje w nim widmo o niskiej częstotliwości (największa amplituda), a jego wartość maleje wraz ze wzrostem częstotliwości (niezależnie od jej znaku). □

Przekształcenie odnoszące się do sygnałów ciągłych okresowych, które jest związane z szeregiem Fouriera. Sygnał taki może być reprezentowany w postaci nieskończonej sumy (a nie całki, jak w (2.1)) funkcji sinusoidalnych o określonych częstotliwościach. Transformata jest w tym przypadku określona następującą parą przekształceń (T_1 - okres analizowanego sygnału):

- przekształcenie proste:

$$\underline{X}(n) = X_r(n) + jX_i(n) = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} x(t) e^{-jwn t} dt, \quad (2.10)$$

$$X_r(n) = \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} x(t) \cos(wnt) dt, \quad X_i(n) = \frac{-2}{T_1} \int_0^{T_1} x(t) \sin(wnt) dt, \quad (2.11)$$

przy czym $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$;

- przekształcenie odwrotne:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{X}(n) e^{jwn t}, \quad (2.12)$$

$$x(t) = \frac{X_r(0)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (X_r(n) \cos(wnt) - X_i(n) \sin(wnt)), \quad (2.13)$$

gdzie: $w = \frac{2\pi}{T_1}$; indeks n wskazuje na numer harmonicznej.

Równania (2.12), (2.13) przedstawiają szereg Fouriera o współczynnikach zespolonych lub rzeczywistych, natomiast w rezultacie przekształceń (2.10), (2.11) otrzymuje się amplitudy zespolone (lub ich składowe) dla kolejnych n -tych harmonicznych sygnału – jego widmo jest zatem dyskretne. Składową o indeksie $n=1$ nazywa się *składową podstawową*.

Wielkości $X_r(n)$, $X_i(n)$ są nazywane współczynnikami szeregu Fouriera. Znak minus w równaniu określającym współczynnik $X_i(n)$ (2.11) został wprowadzony w celu uzyskania przyjętej w elektrotechnice formy zapisu zespolonej amplitudy sygnału (2.10) - konwencja ta jest stosowana również w innych formach przekształcenia Fouriera.

Przykład 2.2. Określić i przeanalizować przekształcenie Fouriera funkcji okresowej która powstała z fragmentu funkcji $x(t)$ o długości T_1 z Przykładu 2.1 przez jej nieskończone powtórzenie w kierunku dodatniej osi z tym samym okresem T_1 . Funkcję można zdefiniować następująco

$$x(t + kT_1) = \begin{cases} e^{-(t+kT_1)/\tau} & \text{dla } 0 \leq t < T_1, \tau = 0,02 \text{ s}, T_1 = 0,02 \text{ s.} \\ 0 & \text{dla } t < 0 \end{cases}$$

Jej przebieg jest pokazany na rys. 2.2a. Współczynniki szeregu (2.13) oblicza się zgodnie z zależnością (2.10)

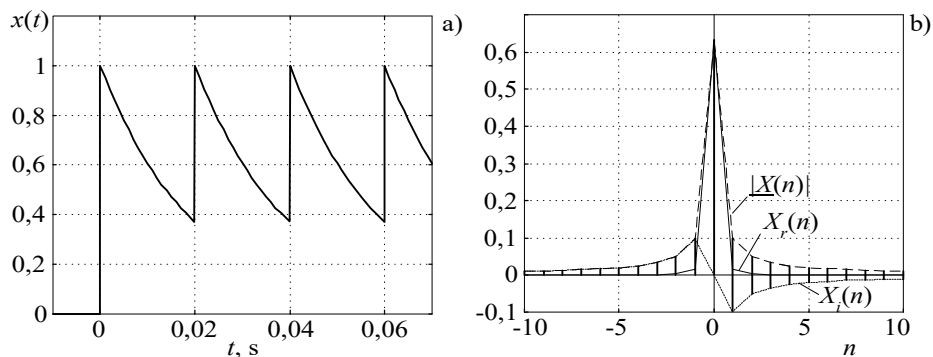
$$\begin{aligned} \underline{X}(n) &= \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} e^{-t/\tau} e^{-jwn} dt = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} e^{-(1/\tau + jwn)t} dt \\ &= -\frac{1}{T_1(1/\tau + jwn)} e^{-(1/\tau + jwn)t} \Big|_0^{T_1} = \frac{1 - e^{-T_1(1/\tau + jwn)}}{T_1(1/\tau + jwn)}, \text{ gdzie: } w = \frac{2\pi}{T_1}. \end{aligned}$$

Po przekształceniu otrzymuje się

$$\underline{X}(n) = \frac{(1 - e^{-T_1/\tau})(T_1/\tau - j2\pi n)}{(T_1/\tau)^2 + (2\pi n)^2},$$

$$\text{skąd: } X_r(n) = \frac{T_1(1 - e^{-T_1/\tau})}{\tau((T_1/\tau)^2 + (2\pi n)^2)}, \quad X_i(n) = \frac{-2\pi n(1 - e^{-T_1/\tau})}{(T_1/\tau)^2 + (2\pi n)^2}.$$

Wartości współczynników $X_r(n)$, $X_i(n)$ oraz modułu $|\underline{X}(n)|$ pokazano na rys. 2.2b. Widać, że funkcja określająca współczynniki rzeczywiste jest parzysta (



Rys. 2.2. Sygnał ciągły okresowy (a) i jego transformaty dyskretne (b)

$X_r(n) = X_r(-n)$, natomiast współczynniki urojone ($X_i(n) = -X_i(-n)$) – tworzą funkcję nieparzystą. Poszczególne harmoniczne szybko zmniejszają się wraz ze wzrostem ich numeru, przy czym, amplituda pierwszej harmonicznej (o okresie równym T_1) osiąga wartość 10% maksymalnej amplitudy sygnału. □

Szereg Fouriera powstaje w wyniku przekształcenia Fouriera sygnału okresowego, dla którego w dziedzinie częstotliwości otrzymuje się funkcję dyskretną, gdyż jej wartości są różne od zera tylko dla określonych wartości argumentu (dla wielokrotności częstotliwości podstawowej). Należy zauważyć, że amplituda zespolona $\underline{X}(n)$ (lub jej składowe) w ogólnym przypadku nie jest funkcją okresową.

Przekształcenie odnoszące się do funkcji dyskretnych nieokresowych jest nazywane *przekształceniem Fouriera z dyskretnym czasem*. Warunki tego przekształcenia są podobne jak w zwykłym przekształceniu Fouriera, jednak funkcja czasu jest tu dyskretna, a nie ciągła. Zakładając, że kolejne dyskretne wartości sygnału (próbki) są odległe od siebie o przedział czasu T (okres próbkowania), otrzymuje się następujący zbiór zależności definiujący to przekształcenie:

- przekształcenie proste:

$$X(j\omega) = X_r(\omega) + jX_i(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)e^{-j\omega Tk}, \quad (2.14)$$

$$X_r(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\cos(\omega Tk), \quad X_i(\omega) = -\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\sin(\omega Tk); \quad (2.15)$$

- przekształcenie odwrotne:

$$\underline{x}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X(j\omega)e^{j\omega Tk} d\omega, \quad (2.16)$$

$$x(k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/T} (X_r(\omega)\cos(\omega Tk) - X_i(\omega)\sin(\omega Tk)) d\omega. \quad (2.17)$$

W powyższych równaniach indeks k odnosi się do czasu. $X(j\omega)$ jest ciągłą okresową funkcją częstotliwości o okresie $2\pi/T$. Pełna informacja o funkcji (w dziedzinie czasu lub częstotliwości) jest zawarta w jednym okresie $X(j\omega)$, zatem przedział całkowania w (2.16) zmienia się w granicach $-\pi/T$ do π/T (lub 0 do π/T – w przypadku transformaty rzeczywistej).

Przykład 2.3. Określić i przeanalizować przekształcenie Fouriera funkcji dyskretnej, która powstała w wyniku próbkowania funkcji $x(t)$ z Przykładu 2.1. Okres próbkowania $T = 0,001$ s. Funkcję

można zdefiniować następująco

$$x(k) = \begin{cases} e^{-Tk/\tau} & \text{dla } k \geq 0, \\ 0 & \text{dla } k < 0, \end{cases} \quad \tau = 0,02 \text{ s}, T = 0,001 \text{ s}.$$

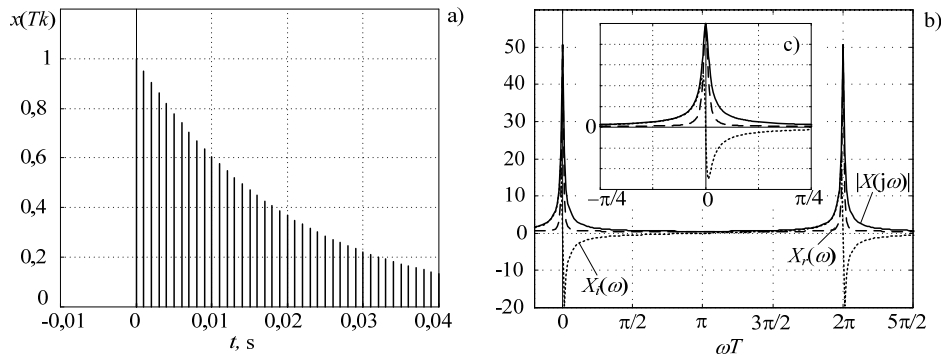
Przebieg funkcji jest pokazany na rys. 2.3a. Do obliczenia transformaty funkcji dyskretnej można wykorzystać zależność (2.14), przy czym przedział sumowania jest ograniczony do nieujemnych indeksów

$$X(j\omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-Tk/\tau} e^{-j\omega Tk} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-(1/\tau + j\omega)Tk} = \frac{1}{1 - e^{-(1/\tau + j\omega)T}} = \frac{e^{j\omega T}}{e^{j\omega T} - e^{-T/\tau}}.$$

Po przekształceniu otrzymuje się

$$X_r(\omega) = \frac{1 - e^{-T/\tau} \cos \omega T}{1 + e^{-T/\tau} (e^{-T/\tau} - 2 \cos \omega T)}, \quad X_i(\omega) = \frac{-e^{-T/\tau} \sin \omega T}{1 - e^{-T/\tau} (e^{-T/\tau} - 2 \cos \omega T)}.$$

Przebieg funkcji $X_r(\omega)$, $X_i(\omega)$ oraz modułu $|X(j\omega)|$ pokazano na rys. 2.3b. Należy zauważyć, że funkcje są ciągłe i okresowe, o okresie pulsacji $\omega = 2\pi/T$. Jest to skutek dyskretyzacji funkcji. Porównując te krzywe z widmem oryginalnego sygnału ciągłego (Przykład 2.1) widać, że w wyniku próbkowania nieskończona oś częstotliwości została zawężona do przedziału $(-\pi/T, \pi/T)$, który jest powtarzany wzdłuż całej osi. Porównanie pokazanego na rys. 2.3c fragmentu widma (z odpowiednio przeskalowaną amplitudą) z widmem z Przykładu 2.1 pokazuje, że są one bardzo podobne. Kwestia ta będzie bardziej szczegółowo omówiona w dalszej części niniejszego rozdziału. □



Rys. 2.3. Sygnał dyskretny (a) i jego transformaty (b); fragment z rozszerzoną skalą częstotliwości (c)

Z powyższego przykładu widać, że transformata $X(j\omega)$ sygnału dyskretnego jest funkcją okresową, a ponadto można ją łatwo wyrazić jako zależność od $e^{j\omega T}$: $X(j\omega) = X(e^{j\omega T})$. Taka notacja jest często stosowana w literaturze w odniesieniu do transformaty Fouriera sygnału

dyskretnego. Ma to również swoje uzasadnienie w bezpośrednim związku tego zapisu z prezentowanym dalej przekształceniem \mathcal{F} .

Przekształcenie odnoszące się do dyskretnych okresowych funkcji czasu, które występują w ograniczonym przedziale czasowym jest nazywane *Dyskretnym Przekształceniem Fouriera* (DPF). W tym przypadku transformaty są określone przez następujące wyrażenia:

- przekształcenie proste:

$$\underline{X}(n) = X_r(n) + jX_i(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \underline{x}(k)e^{-jank}, \quad (2.18)$$

$$X_r(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\cos(ank), \quad X_i(n) = -\sum_{k=0}^{N-1} x(k)\sin(ank); \quad (2.19)$$

- przekształcenie odwrotne:

$$\underline{x}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \underline{X}(n)e^{jank}, \quad (2.20)$$

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (X_r(n)\cos(ank) - X_i(n)\sin(ank)), \quad (2.21)$$

gdzie: $a = 2\pi/N$ - kąt pomiędzy kolejnymi próbkami, N - liczba próbek w rozpatrywanym okresie sygnału (w oknie przetwarzania).

W przypadku DPF argumenty zarówno funkcji czasu $x(k)$, jak i funkcji częstotliwości $\underline{X}(n)$ są ograniczone do przedziału $0..N-1$.

Przykład 2.4. Określić i przeanalizować przekształcenie Fouriera funkcji dyskretnej z Przykładu 2.3, która została ograniczona do przedziału $(0, T_1)$, gdzie $T_1 = 0,02$ s. Biorąc pod uwagę okres próbkowania jak w Przykładzie 2.3, funkcję tę można zdefiniować następująco

$$x(k) = \begin{cases} e^{-Tk/\tau} & \text{dla } k = 0, 1, \dots, N-1, \\ 0 & \text{dla pozostałych } k \end{cases}, \quad \tau = 0,02 \text{ s}, \quad T = 0,001 \text{ s},$$

$$N = T_1/T = 20.$$

Przebieg funkcji jest pokazany na rys. 2.4a. Do obliczenia transformaty funkcji dyskretnej wykorzystano zależność (2.19), przy czym zakres sumowania jest ograniczony do przedziału $k = 0, 1, \dots, N-1$, co daje

$$\underline{X}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-Tk/\tau} e^{-jank} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-(T/\tau + jan)k} = \frac{e^{-(T/\tau + jan)N} - 1}{e^{-(T/\tau + jan)} - 1}.$$

Po przekształceniu otrzymuje się:

$$X_r(n) = \frac{(e^{-TN/\tau} - 1)(e^{-T/\tau} \cos an - 1)}{1 + e^{-T/\tau}(e^{-T/\tau} - 2 \cos an)}, \quad X_i(n) = \frac{e^{-T/\tau}(e^{-TN/\tau} - 1) \sin an}{1 + e^{-T/\tau}(e^{-T/\tau} - 2 \cos an)}.$$

Przebieg funkcji $X_r(n)$, $X_i(n)$ oraz modułu $|X(n)|$ jest pokazany na rys 2.4b. Należy zauważyć, że uzyskane widmo jest dyskretne, a pełna o nim informacja jest zawarta w N próbkach: $n = 0, 1, \dots, N-1$. Podobnie jak w przypadku rozważanego poprzednio widma sygnału dyskretnego (Przykład 2.3), można uzyskać okresowe przedłużenie widma na całą oś częstotliwości.

Oś częstotliwości można tutaj rozpatrywać i oznaczać na wiele sposobów:

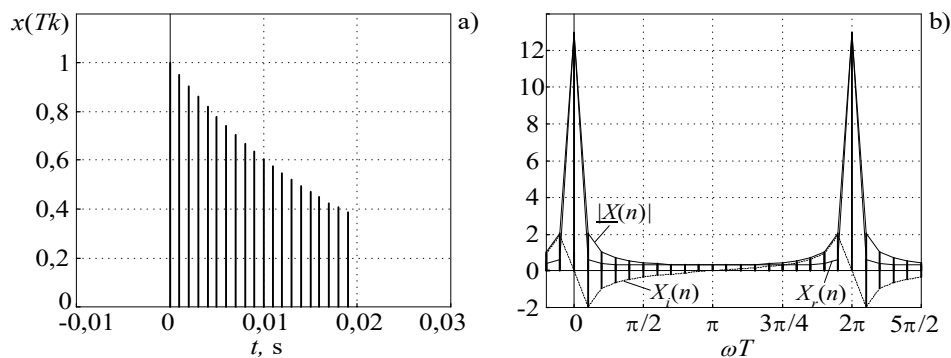
- przez podanie rzeczywistej pulsacji dyskretnej [s^{-1}]:

$\omega_n = n\omega_1$, gdzie $\omega_1 = 2\pi/T_1$ - pulsacja składowej podstawowej - wówczas okres widma zawiera się w granicach $(0 \dots \omega_p)$ lub $(-\omega_p/2 \dots + \omega_p/2)$, $\omega_p = 2\pi/T$ - pulsacja próbkowania;

- przez podanie pulsacji względnej [rad], odniesionej do okresu próbkowania T : $\omega_n T = n\omega_1 T$ - wówczas okres widma zawiera się w granicach $(0 \dots 2\pi)$ lub $(-\pi/2 \dots + \pi/2)$;

- przez wyszczególnienie kolejnych numerów harmoniczných, co można oznaczać następująco:

$n = \omega_n' = \omega_n / \omega_1$, gdzie: ω_n - pulsacja n -tej składowej- wówczas okres widma



Rys. 2.4. Sygnał dyskretny z ograniczoną liczbą próbek (a) i jego transformaty (b)

zawiera się w granicach $(0 \dots N)$ lub $(-N/2 \dots + N/2)$. □

Porównując otrzymane dyskretne widmo z rezultatem uzyskanym w Przykładzie 2.3 widać wyraźne podobieństwa kształtu obwiedni widm. Należy jednak zauważyć, że na rys. 2.3b występuje widmo ciągłe. O innych różnicach wynikających z ograniczenia przedziału czasowego rozpatrywanego sygnału będzie mowa w dalszej części rozdziału.

DPF odgrywa bardzo ważną rolę w zakresie dyskretnego przetwarzania sygnałów. Stosowanie DPF stało się szczególnie atrakcyjne z chwilą opracowania bardzo efektywnego algorytmu *Szybkiego Przekształcenia Fouriera* - SPF (ang. *Fast Fourier Transform* - FFT) [20].

Należy zauważyć, że ograniczenie przedziału rozpatrywanej funkcji czasu do zakresu wyznaczonego przez okno przetwarzania (N próbek) powoduje zniekształcenie transformaty w odniesieniu do teoretycznego założenia, że sygnał ma długość nieskończoną. W rezultacie, w transformacie takiego sygnału pojawiają się charakterystyczne oscylacje, nazywane *oscylacjami Gibbsa*. Ilustruje to następujący przykład.

Przykład 2.5. Porównać transformatę Fouriera dyskretnego sygnału określonego następującą funkcją

$$y(k) = \begin{cases} \sin(ak) & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}, \quad a = \frac{2\pi}{N}, \quad N - \text{liczba próbek w okresie}$$

sygnału, z transformatą tego sygnału ograniczonego do jednego okresu (rys. 2.5a).

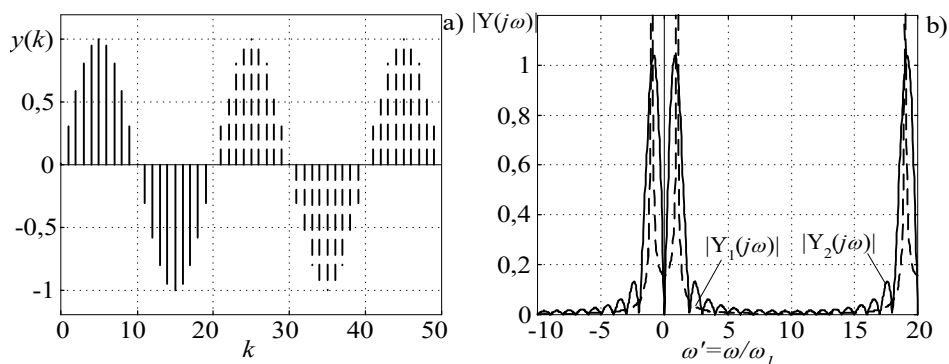
W przypadku, gdy sygnał $y(k)$ nie jest ograniczony, jego transformata jest określona następująco:

$$Y_1(j\omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sin(ak)e^{-j\omega k} = \frac{\sin ae^{j\omega a}}{e^{j\omega a}(e^{j\omega a} - 2\cos a) + 1}, \quad \omega' = \frac{\omega T}{2\pi}, \quad T - \text{okres sygnału,}$$

natomiast dla sygnału ograniczonego do N próbek otrzymuje się

$$Y_2(j\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} \sin(ak)e^{-j\omega k} = 0,5j \left(\frac{1 - e^{-j2\pi(1+\omega')}}{1 - e^{-ja(1+\omega')}} - \frac{1 - e^{j2\pi(1-\omega')}}{1 - e^{ja(1-\omega')}} \right).$$

Powyższe związki łatwo uzyskać po następującym podstawieniu



Rys. 2.5. Dyskretny sygnał harmoniczny (a) oraz transformaty (b) sygnału nieograniczonego (linia przerywana) i jego jednego okresu (linia ciągła)

$$\sin(ak) = \frac{e^{jak} - e^{-jak}}{2j} .$$

Moduły transformat $Y_1(j\omega)$ oraz $Y_2(j\omega)$ są pokazane na rys. 2.5b. Widać, że w przebiegu $|Y_2(j\omega)|$ występują charakterystyczne oscylacje. \square

Pokazane na rys. 2.5b rozbieżności w przebiegu transformat obu rozpatrywanych sygnałów: ograniczonego do jednego okresu (linia ciągła) i nieograniczonego (linia przerywana) wynikają stąd, że w pierwszym przypadku szereg aproksymujący funkcję został ograniczony do pierwszych N wyrazów. Łatwo zauważyć, że amplituda powstających w ten sposób oscylacji będzie tym większa, im mniejsza jest liczba branych pod uwagę składników szeregu N . Taki sam skutek ma gwałtowne ucięcie sygnału - wystąpi wówczas nieciągłość funkcji reprezentującej sygnał lub jej pochodnych.

Ze względu na symetrię prostego i odwrotnego przekształcenia Fouriera, również ucięcie charakterystyki widmowej będzie miało podobny skutek na przebieg czasowy uzyskany w wyniku transformaty odwrotnej. Ma to istotne znaczenie przy projektowaniu filtrów.

Rozszerzenie przekształcenia Fouriera na obszar sygnałów dyskretnych odbywa się w oparciu o pojęcie modelu sygnału impulsowego (delt Diraca):

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0. \end{cases} \quad (2.22)$$

Stosując sygnał $\delta(t)$ odpowiednio opóźniany w czasie z okresem dyskretyzacji T można sygnał dyskretny $x(k)$ rozpatrywać jako przebieg ciągły $x^\#(t) \leftrightarrow x(k)$ zgodnie z następującym przekształceniem [11]:

$$x^\#(t) = x_c(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \delta(t - kT), \quad (2.23)$$

gdzie: $x^\#(t)$ oznacza sygnał ciągły, który jest równy sygnałowi oryginalnemu $x_c(t) = x(t)$ tylko dla $t = kT$, a dla pozostałych wartości argumentu jest równy zero.

W celu określenia transformaty Fouriera zależności (2.23) oraz innych prostych funkcji podane zostaną niektóre podstawowe właściwości transformaty Fouriera i sygnału impulsowego [30], [34].

Przesunięcie:

$$\mathcal{F}\{x(t - d)\} = e^{-jd\omega} X(j\omega). \quad (2.24)$$

Splot:

$$\mathcal{F}\{x_1(t) * x_2(t)\} = X_1(j\omega)X_2(j\omega), \quad (2.25)$$

$$\mathcal{F}\{x_1(t)x_2(t)\} = \frac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega), \quad (2.26)$$

przy czym, splot sygnałów ciągłych:

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)x_2(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t-\tau)x_2(t)d\tau. \quad (2.27)$$

Ciąg sygnałów impulsowych:

$$\mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)\right\} = \omega_p \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_p), \quad \omega_p = \frac{2\pi}{T}. \quad (2.28)$$

Transformaty niektórych funkcji:

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1, \quad (2.29)$$

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\} = \pi(\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)), \quad (2.30)$$

$$\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0). \quad (2.31)$$

Właściwości sygnału impulsowego:

$$\delta(t-a) * x(t) = x(t-a). \quad (2.32)$$

Transformaty (2.30), (2.31) ilustrują znaną zależność, że sygnał harmoniczny w dziedzinie czasu jest reprezentowany pojedynczym prążkiem w dziedzinie częstotliwości (gdy jest to funkcja rzeczywista, to występują dwa prążki rozmieszczone względem początku układu współrzędnych zgodnie z zasadą parzystości (kosinus) lub nieparzystości (sinus).

Wracając do związku (2.23) można zauważyć, że jego obustronne przekształcenie Fouriera na podstawie (2.24) i (2.29) prowadzi do następującej transformaty:

$$X^\#(j\omega) = X(e^{j\omega T}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)e^{-j\omega T k}, \quad (2.33)$$

co jest zgodne z (2.14).

Zależność (2.23) można rozważać jako swego rodzaju analityczny pomost łączący dziedzinę sygnałów ciągłych z sygnałami dyskretnymi. Dzięki niemu można stosować teorię transformacji sygnałów ciągłych również w odniesieniu do sygnałów dyskretnych.

Warto zauważyć, że konsekwencją dyskretyzacji sygnału ciągłego jest okresowość jego widma. Oznacza to, że cała informacja o sygnale dyskretnym jest zawarta w jednym okresie jego charakterystyki częstotliwościowej. Objawia się to w postaci ‘ściśnięcia’ szerokiego widma sygnału ciągłego do zakresu wyznaczonego przez przedział $-\pi/T \leq \omega \leq \pi/T$. Jego szerokość zależy od okresu próbkowania T , co odpowiada pulsacji $\omega_T = 2\pi f_T$, gdzie częstotliwość próbkowania $f_T = 1/T$. Wartość $\omega = \pi/T = \omega_T/2$ jest nazywana *częstotliwością Nyquista* (pulsacją Nyquista) [20].

Z praktycznego punktu widzenia ważna jest odpowiedź na pytanie, czy i w jakich warunkach sygnał dyskretny zachowuje pełną informację o oryginalnym sygnale ciągłym. Problem ten wyjaśnia *twierdzenie o próbkowaniu* (twierdzenie Kotelnikowa-Shannona) [30], [34]. Jest to w istocie kwestia możliwości interpolacji sygnału ciągłego za pomocą wartości funkcji zadanej w określonych węzłach (próbkach). Twierdzenie o próbkowaniu mówi, że operacja taka jest możliwa pod warunkiem, że sygnał ciągły jest ściśle dolnopasmowy o pulsacji granicznej ω_g , natomiast próbkowanie odbywa się z częstotliwością, określoną następującą zależnością:

$$\omega_T \geq 2\omega_g, \quad (2.34)$$

co oznacza, że sygnał ciągły powinien być próbkowany na tyle często, aby w okresie składowej określonej przez pulsację graniczną były pobrane przynajmniej dwie próbki.

Twierdzenie o próbkowaniu jest konsekwencją okresowości widma sygnału dyskretnego i można go uzasadnić porównując widmo oryginalnego sygnału ciągłego $X_c(j\omega) \leftrightarrow x_c(t)$ i sygnału uzyskanego przez jego próbkowanie $X^\#(j\omega) \leftrightarrow x^\#(t)$. W celu określenia transformaty Fouriera zależności (2.23) można wykorzystać fakt, że prawa strona równania przedstawia iloczyn dwóch funkcji względem czasu. Na podstawie (2.26) otrzymuje się:

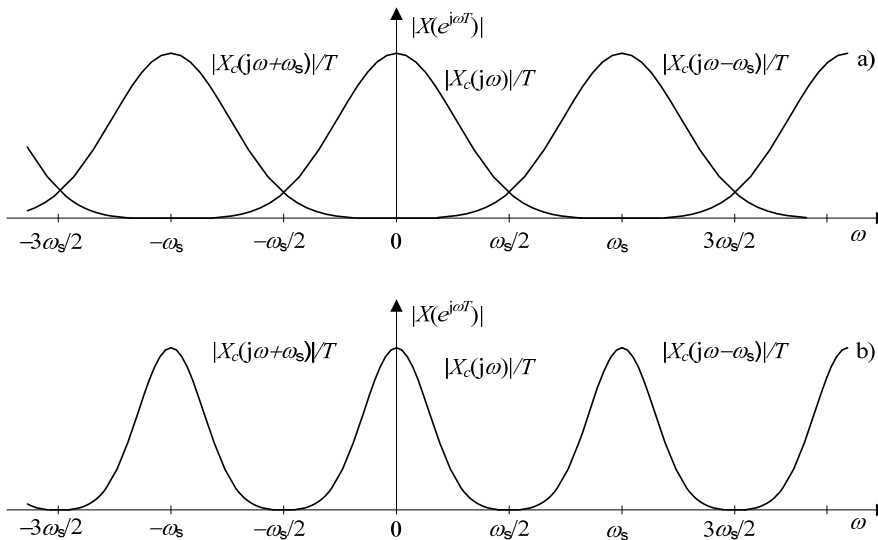
$$X^\#(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{x_c(t)\} * \mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)\right\} = \frac{1}{2\pi} X_c(j\omega) * \omega_T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_T). \quad (2.35)$$

Ponieważ sygnał impulsowy jest elementem neutralnym splotu (2.32), więc ostatecznie:

$$X(e^{j\omega T}) = X^\#(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_c(j(\omega - n\omega_T)). \quad (2.36)$$

Powyższe równanie jest znane jako *reguła nakładania się widm* sygnału ciągłego i dyskretnego (ang. *aliasing formula*).

Na podstawie (2.36) widać, że w efekcie próbkowania, widmo sygnału z przedziału określonego przez okres próbkowania ω_T jest powielane okresowo na pozostałą część osi częstotliwości (rys. 2.6). Oznacza to, że jeśli w próbkowanym sygnale ciągłym wystąpią składowe o częstotliwości wyższej od $\omega_T/2$, to w wynikowym sygnale dyskretnym te składowe zostaną nieodwracalnie przetransformowane do obszaru określonego przez okres próbkowania i zmieszane z innymi składowymi zgodnie z regułą nakładania. Widmo oryginalnego sygnału ciągłego może pozostać niezniekształcone jedynie w przedziale ograniczonym do częstotliwości $\omega_T/2$ (częstotliwość Nyquista). Zatem, spróbkowane sygnały ciągłe $x_c(t)$, mogą być w pełni odtworzone z ich widma $X(j\omega)$ (w wyniku odwrotnej transformacji Fouriera) tylko wtedy, gdy są to sygnały dolnopa-smowe o widmie ograniczonym do wartości $\omega_T/2$. Ilustruje to następujący przykład.



Rys. 2.6. Ilustracja problemu nakładania się widm: a - nałożenie widma sygnału po próbkowaniu, b - sygnał ciągły z ograniczonym widmem

Przykład 2.6. Na rys. 2.7a,b pokazane są przebiegi sygnałów ciągłych, które są określone następującymi zależnościami

$$x_1(t) = e^{-t/\tau} \cos \omega_a t + \sin \omega_b t + 0,2 \sin \omega_c t$$

$$x_2(t) = e^{-t/\tau} \cos \omega_a t + \sin \omega_b t,$$

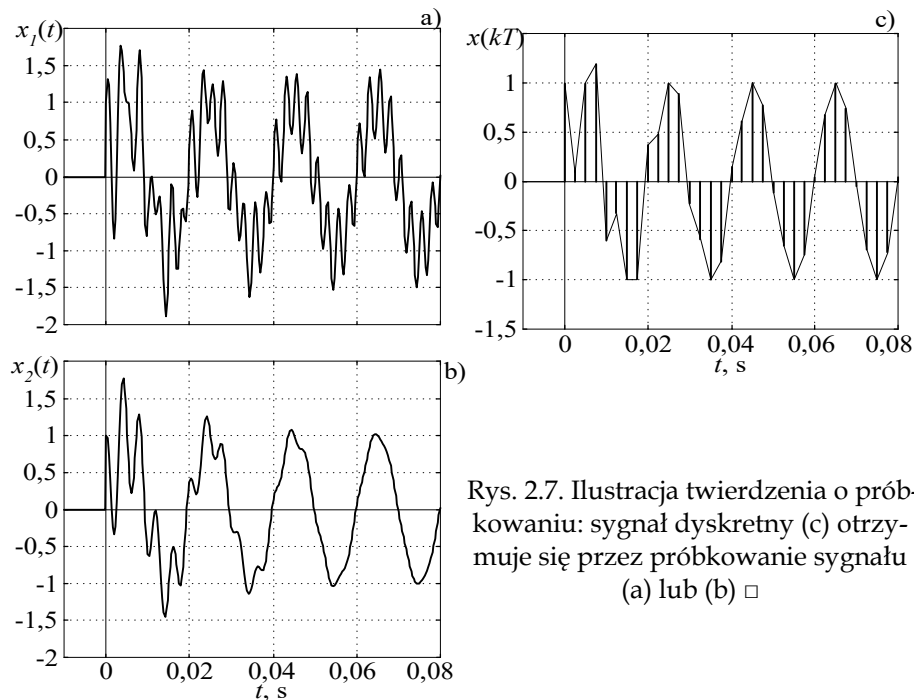
$$\omega_a = 500\pi \text{ s}^{-1}, \omega_b = 100\pi \text{ s}^{-1}, \omega_c = 800\pi \text{ s}^{-1}, \tau = 0,02 \text{ s}.$$

Przeanalizować możliwość próbkowania tych sygnałów z częstotliwością $f_T = 400 \text{ Hz}$.

Należy zauważyć, że w analizowanych sygnałach znajduje się tłumiona wykładniczo składowa oscylacyjna. Sygnał taki ma nieograniczone widmo ciągłe (patrz Przykład 2.1). Jeśli uznać, że widmo to szybko zanika wraz ze wzrostem częstotliwości, to częstotliwość graniczną można oszacować na podstawie występujących w sygnałach składowych oscylacyjnych. Zatem: $\omega_{g1} = \omega_c = 800\pi \text{ s}^{-1}$, $\omega_{g2} = \omega_a = 500\pi \text{ s}^{-1}$, odpowiednio dla sygnałów $x_1(t)$ oraz $x_2(t)$.

Na podstawie (2.34) określana jest pulsacja próbkowania:

$$\omega_{T1} \geq 1600\pi \text{ s}^{-1}, \omega_{T2} \geq 1000\pi \text{ s}^{-1}.$$



Rys. 2.7. Ilustracja twierdzenia o próbkowaniu: sygnał dyskretny (c) otrzymuje się przez próbkowanie sygnału (a) lub (b) \square

Proponowana pulsacja próbkowania $\omega_T = 2\pi f_T = 800\pi \text{ s}^{-1}$ nie spełnia tych warunków. Pokazany na rys. 2.7c rezultat próbkowania obu sygnałów daje bardzo zniekształcony obraz oryginałów. Można tu zauważyć charakterystyczny przypadek, gdy dwa istotnie różniące się sygnały ciągłe ($x_1(t)$ oraz $x_2(t)$) dają

jednakowy wynik próbkowania. Jest to rezultat tego, że różnią się one składową o pulsacji ω_c , która jest w tym przypadku równa pulsacji próbkowania $\omega_T = \omega_c$. Składowa ta ma wartość zero w punktach próbkowania. \square

Tak więc oryginalny sygnał ciągły i jego wersja dyskretna są powiązane ze sobą poprzez pulsację próbkowania ω_T . W celu uniknięcia efektu nałożenia (a więc wiernego przeniesienia pełnej informacji z sygnału ciągłego na dyskretny i odwrotnie) należy zastosować jedno z dwóch następujących rozwiązań prowadzących do spełnienia warunku (2.34):

- zwiększyć częstotliwość próbkowania,
- ograniczyć widmo sygnału ciągłego przez zastosowanie dolnoprzepustowego *filtru ochronnego* (ang. *antialiasing filter*) [11], [20], [23].

Wybór pomiędzy tymi dwiema metodami nie jest najczęściej dowolny, gdyż nie można zbyt radykalnie zwiększyć częstotliwości próbkowania (względny techniczne i ekonomiczne) lub ograniczyć widma sygnału ciągłego, bo można w ten sposób stracić istotne informacje.

Z punktu widzenia cyfrowych metod przetwarzania sygnałów, spośród wymienionych przekształceń najważniejsze praktyczne znaczenie ma DPF. Jest to związane z faktem, że w praktycznych algorytmach cyfrowego przetwarzania, które są realizowane w układach komputerowych, sygnał $x(k)$ ma skończoną długość, a jego widmo może być obliczone tylko dla wybranych wartości częstotliwości. DPF jest podstawą wielu algorytmów stosowanych w członach pomiarowych automatyki elektroenergetycznej. Z kolei, przekształcenie Fouriera nieokresowych sygnałów dyskretnych prowadzi do transformaty \mathcal{Z} , która jest podstawowym narzędziem analizy sygnałów i systemów dyskretnych.

2.2.2 Przekształcenie Laplace'a

Przekształcenie Laplace'a \mathcal{L} jest narzędziem matematycznym do rozwiązywania równań różniczkowych. Ponieważ dynamika systemów ciągłych jest opisywana za pomocą równań różniczkowych, zatem przekształcenie Laplace'a jest także narzędziem do analizy układów dynamicznych.

Podobnie jak przekształcenie Fouriera, przekształcenie \mathcal{L} również dokonuje transformacji równań pomiędzy dwiema dziedzinami: dziedziną czasu oraz zespoloną dziedziną s . Związki w dziedzinie czasu traktuje się zazwyczaj jako relacje rzeczywiste, chociaż możliwa jest także czasowa reprezentacja zespolona. W odróżnieniu od przekształcenia Fouriera, dziedziną zespoloną s w przekształceniu Laplace'a jest reprezentowana

w postaci płaszczyzny, na której współrzędne są określone przez część rzeczywistą oraz urojoną: $s = \sigma + j\omega$, przy czym ω jest również interpretowane jako częstotliwość. Transformata Laplace'a jest określona przez następującą parę przekształceń:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt = \mathcal{L}\{x(t)\} \quad - \text{przekształcenie proste,} \quad (2.37)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-\infty}^{\sigma+\infty} X(s)e^{st} ds = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} \quad - \text{przekształcenie odwrotne.} \quad (2.38)$$

W większości przypadków, wystarczające jest badanie układu dla nieujemnego czasu. Wówczas granice całkowania w (2.37) można zawęzić do przedziału $\langle 0, +\infty \rangle$, co prowadzi do *jednostronnego przekształcenia Laplace'a* [21].

Można zauważyć, że zawężenie płaszczyzny zespolonej s w powyższym przekształceniu tylko do osi urojonej ($\sigma = 0$) prowadzi do przekształcenia Fouriera. Przekształcenie Laplace'a jest zatem rozszerzeniem transformacji Fouriera. Jego znakomitą cechą jest to, że wiąże poszczególne punkty na płaszczyźnie s z właściwościami sygnału lub systemu w przestrzeni czasu. Stwarza to bardzo dogodne warunki do analizy stanów przejściowych w układach elektrycznych oraz badania ich stabilności. W praktycznych zastosowaniach rzadko korzysta się z przekształceń w formie (2.37)-(2.38), natomiast stosuje się odpowiednie formuły algebraiczne i gotowe tablice przekształceń, które zostały wyprowadzone na podstawie tych zależności [21].

Podstawowym pojęciem w analizie i syntezy liniowych układów dynamicznych z wykorzystaniem transformaty Laplace'a jest *transmitancja układu*. Niech $y(t)$ będzie odpowiedzią liniowego układu na wymuszenie $x(t)$. Transmitancja s tego układu jest definiowana jako iloraz transformat Laplace'a sygnału wyjściowego $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ i wejściowego $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}. \quad (2.39)$$

Znając transmitancję $H(s)$ można łatwo określić odpowiedź układu na dowolne wymuszenie

$$Y(s) = X(s)H(s). \quad (2.40)$$

Korzystanie z relacji (2.40) w przypadku, gdy oba sygnały: wymuszenie $x(t)$ oraz $y(t)$ są rozpatrywane w dziedzinie czasu wymaga jednak

zastosowania transformacji pomiędzy dziedziną czasu oraz dziedziną s . Odpowiednie działania wyjaśnia następujące równanie:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{x(t)\}H(s)\}. \quad (2.41)$$

Powyższa zależność może być również przedstawiona w postaci spłotu (2.27)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau, \quad (2.42)$$

gdzie: $h(t)$ jest funkcją impulsową (odpowiedzią impulsową) układu, którą można rozumieć jako odpowiedź układu na wymuszenie w postaci sygnału impulsowego $\delta(t)$.

Do badania właściwości układów analogowych oraz analizy ich właściwości dynamicznych stosuje się zazwyczaj jednostronne przekształcenie Laplace'a. Sposób formułowania zagadnienia analizy dynamiki obwodu elektrycznego wynika z podstawowych właściwości przekształcenia. Oto najważniejsze z nich:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = sF(s) - f(0), \quad (2.43)$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}, \quad (2.44)$$

$$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} = F(s+a) \quad (2.45)$$

oraz transformaty niektórych funkcji:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1, \quad \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}, \quad (2.46)$$

$$\text{gdzie: } u(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \\ 0, & t < 0 \end{cases} \text{ - funkcja skoku jednostkowego,} \quad (2.47)$$

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}, \quad (2.48)$$

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega_0 t)\} = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \mathcal{L}\{\cos(\omega_0 t)\} = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}. \quad (2.49)$$

Podobnie jak w przypadku przekształcenia Fouriera, transformata Laplace'a sygnału dyskretnego $x(k)$, który powstał przez próbkowanie

sygnału ciągłego $x(t)$ z okresem próbkowania T (2.23) przedstawia się następującą sumą:

$$X(s) = X^\#(s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)e^{-sTk}, \quad (2.50)$$

która wykazuje podobieństwo do analogicznej zależności dla transformaty Fouriera (2.33).

Z powyższych zależności wynika, że liniowe elementy RLC obwodu elektrycznego można przedstawiać za pomocą odpowiadających im transmitancji zgodnie z następującymi relacjami:

$$R \leftrightarrow R, \quad L \leftrightarrow sL, \quad C \leftrightarrow 1/sC.$$

Stosowanie tych zależności ilustruje poniższy przykład.

Przykład 2.7. Zbadać właściwości widmowe i dynamiczne obwodu elektrycznego jak na rys. 2.8 dla następujących parametrów:

$$R = 100\Omega, \quad L = 45\text{mH}, \quad C = 630\text{nF}.$$

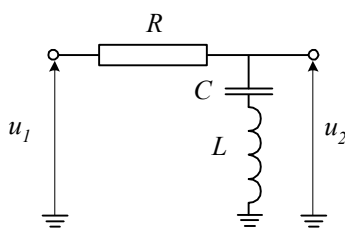
Transmitancja Laplace'a układu jest równa:

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{sL + 1/sC}{R + sL + 1/sC} = \frac{Ls^2 + 1/C}{Ls^2 + Rs + 1/C}.$$

Postać iloczynowa transmitancji ma następującą formę

$$H(s) = \frac{(s - z_1)(s - z_2)}{(s - b_1)(s - b_2)} = 1 + \frac{q(s - p)}{(s - b_1)(s - b_2)},$$

gdzie:



Rys. 2.8. Analizowany obwód elektryczny

$$z_{1,2} = \frac{\pm j}{\sqrt{LC}}, \quad b_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L},$$

$$q = b_1 + b_2, \quad p = \frac{b_1 b_2 - z_1 z_2}{b_1 + b_2 - (z_1 + z_2)}.$$

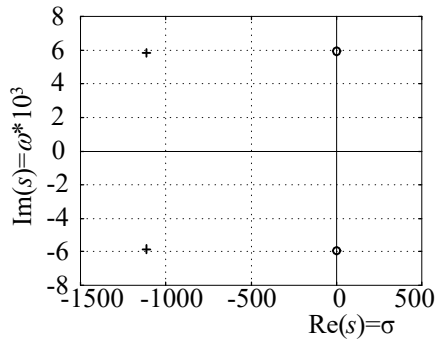
Zera i bieguny mają następujące wartości:

$$z_{1,2} = \pm j5,939 \times 10^3,$$

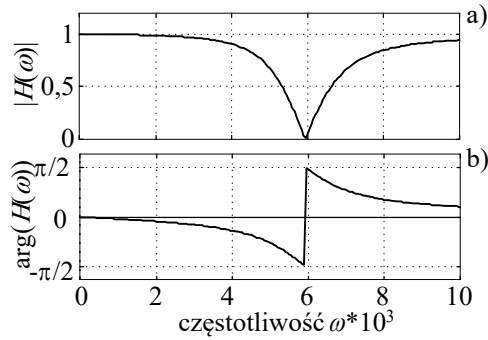
$$b_{1,2} = (-1,111 \pm j5,834) \times 10^3.$$

Położenie zer i biegunów transmitancji na płaszczyźnie s jest pokazane na rys. 2.9. Charakterystyka częstotliwościowa oraz fazowa układu są pokazane na rys. 2.10. Można

je otrzymać przez podstawienie do transmitancji $H(s)$: $s = j\omega$, co jest równoważne zawężeniu płaszczyzny s tylko do osi urojonej. Widać, że układ ten jest filtrem, który wycina częstotliwość określoną przez obwód LC . Charakterystyka impulsowa może być obliczona z transmitancji:



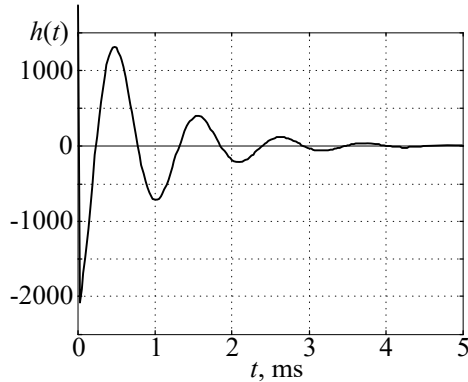
Rys. 2.9. Zera (o) i bieguny (+) transmitancji



Rys. 2.10. Charakterystyka amplitudowa (a) i fazowa (b) transmitancji

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \delta(t) - \frac{q((b_1 - p)e^{b_1 t} - (b_2 - p)e^{b_2 t})}{b_1 - b_2}.$$

Jej przebieg jest pokazany na rys. 2.11. Występująca tu funkcja impulsowa $\delta(t)$ wynika stąd, że w transmitancji licznik i mianownik są tego samego rzędu. \square



Rys. 2.11. Charakterystyka impulsowa badanego układu

Można zauważyć, że transmitancja układu (2.37)-(2.38) jest równa transformacie s sygnału wyjściowego przy pobudzeniu funkcją impulsową $\delta(t)$. Jest to bardzo użyteczna właściwość, gdyż pozwala analizować również bardziej złożone przypadki.

W dziedzinie przetwarzania sygnałów przekształcenie Laplace'a jest stosowane do analizy i projektowania filtrów analogowych.

Opracowane tu zasady są, po odpowiednich modyfikacjach, stosowane także do projektowania filtrów cyfrowych.

2.2.3 Przekształcenie \mathcal{Z}

Z przeprowadzonej analizy wynika, że podstawowe koncepcje teorii przetwarzania sygnałów dyskretnych są analogiczne do założeń teorii sygnałów ciągłych. Relacje pomiędzy dziedzinami czasu i częstotliwości dla

sygnałów i systemów dyskretnych mogą być łatwo wyprowadzone na bazie pojęć przekształcenia \mathcal{Z} . To przekształcenie spełnia analogiczną rolę w odniesieniu do systemów i sygnałów dyskretnych, co przekształcenie Laplace'a w stosunku do systemów i sygnałów ciągłych. Transformata \mathcal{Z} sygnału dyskretnego $x(k)$ jest definiowana następująco [20]

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x(k)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k}, \quad (2.51)$$

gdzie: z jest zmienną zależną od okresu próbkowania (dyskretyzacji) T i zmiennej zespolonej s znanej z przekształcenia Laplace'a:

$$z = e^{sT}. \quad (2.52)$$

Zależność (2.51) określa tzw. dwustronną transformatę \mathcal{Z} (indeks k przebiega przez ujemną i dodatnią oś czasu). W praktycznych zastosowaniach występują układy i sygnały przyczynowe*, dla których w (2.51) indeks $k = 0.. \infty$. Można zauważyć, że transformata \mathcal{Z} jest w istocie innym sposobem zapisu transformaty Laplace'a sygnału dyskretnego. Podstawienie (2.52) sprawia, że złożone niekiedy zależności logarytmiczno-wykładnicze przekształcają się do postaci funkcji algebraicznych, co ułatwia ich analizę i interpretację.

Transformata \mathcal{Z} dowolnego sygnału dyskretnego może być obliczona bezpośrednio na podstawie (2.51). Na przykład, dla dyskretnej funkcji impulsowej

$$x(k) = \delta(k) = \begin{cases} 1 & k = 0, \\ 0 & k \neq 0, \end{cases} \quad (2.53)$$

otrzymuje się:

$$X(z) = 1. \quad (2.54)$$

W przypadku dyskretnego skoku jednostkowego:

$$x(k) = u(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0, \\ 0 & k < 0, \end{cases} \quad (2.55)$$

łatwo uzyskać:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}. \quad (2.56)$$

* Przyczynowość oznacza, że układ nie może odpowiedzieć na pobudzenie wcześniej, nim ono zostało podane na jego wejście [11].

Wyrażeniu $z^{-1} = e^{-sT}$ w dziedzinie zespolonej odpowiada opóźnienie o jedną próbkę w dziedzinie czasu. Ogólnie jest to określone następującą zależnością [19]:

$$\mathcal{Z}\{x(k - k_0)\} = z^{-k_0} X(z). \quad (2.57)$$

Przekształcenie \mathcal{Z} jest bardzo ważnym narzędziem w teorii sygnałów i systemów dyskretnych. W prowadzonych tu rozważaniach tylko w ograniczonym stopniu będzie wykorzystywana ta forma zapisu i analizy procedur przetwarzania sygnałów. Dokładny opis tego przekształcenia wraz z zastosowaniami Czytelnik znajdzie w literaturze specjalistycznej [19], [20], [36].

Podobnie jak w przypadku przekształcenia Fouriera i Laplace'a, transmitancję \mathcal{Z} liniowego układu dyskretnego definiuje się jako iloraz transformaty \mathcal{Z} odpowiedzi $Y(z)$ oraz wymuszenia $X(z)$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}. \quad (2.58)$$

Transmitancja (*funkcja przejścia*) $H(z)$ jednoznacznie określa właściwości częstotliwościowe i dynamiczne układu. Transformata \mathcal{Z} odpowiedzi układu o transmitancji $H(z)$ na dowolne wymuszenie $X(z)$ jest zatem określona następująco

$$Y(z) = H(z)X(z). \quad (2.59)$$

W dziedzinie czasu odpowiada temu relacja splotu dyskretnego wymuszenia $x(k)$ z funkcją impulsową układu $h(k)$

$$y(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(k-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(k-m)h(m), \quad (2.60)$$

co można krócej zapisać przy użyciu symbolu splotu

$$y(k) = x(k) * h(k) = h(k) * x(k), \quad (2.61)$$

gdzie: $h(k)$ jest odwrotną transformatą \mathcal{Z} transmitancji układu

$$h(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\}. \quad (2.62)$$

Transmitancja (2.58) jest bardzo ważnym pojęciem w teorii układów dyskretnych. Funkcja $H(z)$ jest ilorazem wielomianów względem zmiennej z^{-1} :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{l=0}^L b_l z^{-l}}{\sum_{m=0}^M a_m z^{-m}}, \quad (2.63)$$

skąd:

$$Y(z) \sum_{m=0}^M a_m z^{-m} = X(z) \sum_{l=0}^L b_l z^{-l}. \quad (2.64)$$

Korzystając z zależności (2.57) można łatwo określić transformatę odwrotną związku (2.64):

$$\sum_{m=0}^M a_m y(k-m) = \sum_{l=0}^L b_l x(k-l). \quad (2.65)$$

Przy założeniu, że $a_0 = 1$ (co można uzyskać po odpowiednim unormowaniu (2.63)), otrzymuje się algorytm obliczania odpowiedzi układu dyskretnego na wymuszenie w postaci sygnału $x(k)$:

$$y(k) = \sum_{l=0}^L b_l x(k-l) - \sum_{m=1}^M a_m y(k-m). \quad (2.66)$$

Jest to równanie różnicowe, które opisuje sposób funkcjonowania układu dyskretnego. Analizując warunki realizowalności układu widać, że $L \leq M$ (w układach przyczynowych sygnał wyjściowy może się bowiem pojawić po wcześniejszym wystąpieniu sygnału wejściowego).

Widmowa charakterystyka układu dyskretnego może być analizowana na podstawie transmitancji $H(z)$ przez podstawienie $z = e^{j\omega T}$ (2.52):

$$H(e^{j\omega T}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}}. \quad (2.67)$$

Przekształcenie (2.67) oznacza przejście od transformaty \mathcal{Z} układu do transformaty Fouriera (jeśli tylko transformata Fouriera istnieje dla dyskretnej funkcji $h(k)$). Można zauważyć, że w tej relacji przekształcenie \mathcal{Z} odpowiada przekształceniu Fouriera sygnałów dyskretnych nieokresowych. Oznacza to, że widmo transformaty \mathcal{Z} jest ciągłą okresową funkcją częstotliwości o okresie $2\pi/T$.

W wielu zastosowaniach wykorzystuje się relacje pomiędzy przekształceniem \mathcal{Z} oraz DPF. Podstawowe związki występujące pomiędzy tymi dwoma narzędziami syntezy oraz analizy sygnałów i układów dyskretnych można określić rozpatrując ogólny przypadek, w którym funkcja $\underline{X}(n)$ (2.18) przedstawia dyskretne widmo sygnału $x(k)$

ograniczonego do N próbek (poza tym przedziałem jest on równy zero). Konsekwencje ograniczenia zakresu występowania analizowanego sygnału mogą być niekiedy bardzo istotne. Jednocześnie, wzór definicyjny (2.51) przedstawia szereg Fouriera, w którym próbki sygnału $x(k)$ są współczynnikami rozwinięcia funkcji $X(j\omega)$ - co bezpośrednio wynika z (2.67) (w przypadku przekształcenia \mathcal{F} charakterystykę częstotliwościową sygnału uzyskuje się przez odwzorowanie funkcji określającej transformatę \mathcal{F} na okręgu jednostkowym $z = e^{j\omega T}$). Można łatwo pokazać, że odnosi się to także do sygnałów ograniczonych w czasie, do których stosuje się DPF. Niech $x_p(k)$ będzie nieskończonym ciągiem o okresie N : $x_p(k) = x_p(k - lN)$ dla dowolnego l , natomiast sygnał $x(k)$ przyjmuje wartości zerowe poza jednym okresem dla $k = 0, 1, \dots, N - 1$, w którym jest równy ciągowi $x_p(k)$. Transformatę sygnału $x(k)$ można określić zgodnie z (2.51):

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_p(k) x_p(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) z^{-k}, \quad (2.68)$$

gdzie:

$$w_p(k) = \begin{cases} 1, & \text{dla } k = 0, 1, \dots, N - 1, \\ 0, & \text{dla pozostałych } k, \end{cases} \quad (2.69)$$

natomiast $X(z)$ nawiązuje do oznaczenia w (2.51).

Ciąg $w_p(k)$ jest nazywany *funkcją okna* prostokątnego (oknem prostokątnym).

Obliczając $X(z)$ w N równoodległych punktach na okręgu jednostkowym (zakłada się, że sygnał $x(k)$ jest próbkowany w równych odstępach)

$$z_n = e^{j\frac{2\pi n}{N}}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (2.70)$$

otrzymuje się dyskretną funkcję

$$X(n) = X(j\omega_n), \quad \text{gdzie: } \omega_n = \frac{2\pi}{NT} n. \quad (2.71)$$

Właściwości DPF są zatem podobne do właściwości przekształcenia \mathcal{F} . Przy interpretacji DPF należy jednak pamiętać, że sygnał $x(k)$ w (2.18) nie przedstawia nieskończonego sygnału okresowego lecz jest ciągiem ograniczonym do N próbek. Równanie (2.68) nie przedstawia zatem

rozwinęcia okresowej funkcji $x_p(k)$ w szereg Fouriera. To skojarzenie może się nasunąć, gdyż identyczne relacje, jak w przypadku DPF, występują także w odniesieniu do szeregu Fouriera.

Jak widać, różnica pomiędzy szeregiem Fouriera i DPF występuje jedynie w interpretacji sygnałów $x(k)$ oraz $x_p(k)$. W przypadku, gdy ciąg $x(k)$ jest jednym okresem sygnału $x_p(k)$, to obie transformaty są sobie równoważne w dziedzinie częstotliwości: $X(n) = X_p(n)$ oraz czasu: $x(k) = x_p(k)$. Ponieważ jednak dyskretny ciąg $x(k)$ w przypadku DPF jest zawsze ograniczony do okna o długości N próbek, więc również operacje przesunięcia oraz splotu dotyczą tylko tego obszaru. W przeciwieństwie do szeregu Fouriera, operacja przesunięcia ciągu oraz splot mają w przypadku DPF właściwości cykliczne 'modulo N ' (splot kołowy) [11].

2.2.4 Transformacja układów ciągłych do układów dyskretnych

Związki pomiędzy transformatą Laplace'a (jako bardziej ogólną formą transformaty Fouriera) a transformatą z odpowiadają relacjom zachodzącym pomiędzy sygnałami (układami) ciągłymi i dyskretnymi. Podstawowa zależność pomiędzy zespoloną płaszczyzną układów ciągłych s a zespoloną płaszczyzną z układów dyskretnych jest określona przez (2.52). W praktyce korzysta się jednak z innych związków, które pozwalają przetransformować określone właściwości układów ciągłych na układy dyskretne i odwrotnie. Przedstawione zostaną dwa spośród wielu takich związków.

Metoda niezmienności charakterystyki impulsowej. Zakłada się, że charakterystyka impulsowa układu dyskretnego $h(k)$ jest równoważna charakterystyce impulsowej układu ciągłego $h_c(t)$ w punktach próbkowania ($k \leftrightarrow kT$):

$$h(k) = h_c(kT). \quad (2.72)$$

Przy tym założeniu można pokazać, że jeśli transmitancję układu ciągłego $H_c(s)$ przedstawi się w postaci sumy ułamków prostych (przyjmuje się, że pierwiastki wielokrotne nie występują)

$$H_c(s) = \sum_{k=1}^M \frac{A_k}{s - s_k}, \quad (2.73)$$

to transmitancja odpowiadającego mu układu dyskretnego o okresie próbkowania T ma następującą postać [2], [20]:

$$H(z) = \sum_{k=1}^M \frac{TA_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}, \quad (2.74)$$

przy czym, parametr T w liczniku został dodany jedynie w celu odpowiedniego skalowania transmitancji $H(z)$. Właściwości tej transformacji przedstawia poniższy przykład.

Przykład 2.8. Utworzyć układ dyskretny, który będzie równoważny, w sensie metody niezmienności charakterystyki impulsowej, układowi ciągłemu z Przykładu 2.7. Przyjąć okres próbkowania $T = 10^{-4} s$.

Transmitancję układu ciągłego $H_c(s)$ można przedstawić w postaci sumy ułamków prostych:

$$H_c(s) = 1 + \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2},$$

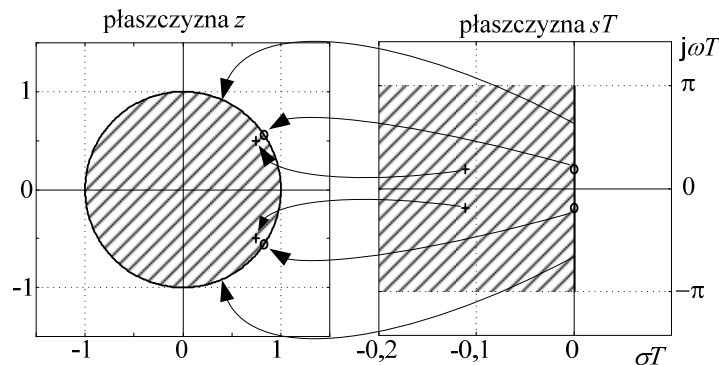
gdzie: $A_1 = \frac{z_1 z_2 + p_1^2}{p_1 - p_2}$, $A_2 = -\frac{z_1 z_2 + p_2^2}{p_1 - p_2}$; pozostałe współczynniki jak w Przykładzie 2.7.

Stosując do powyższej transmitancji zależność (2.74), po odpowiednich przekształceniach otrzymuje się:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}},$$

gdzie: $b_0 = 1 + T(A_1 + A_2)$, $b_1 = -(e^{p_1 T} + e^{p_2 T} + T(A_1 e^{p_2 T} + A_2 e^{p_1 T}))$, $b_2 = e^{T(p_1 + p_2)}$,
 $a_0 = 1$, $a_1 = e^{p_1 T} + e^{p_2 T}$, $a_2 = b_2$.

Obrazy charakterystycznych punktów transmitancji $H_c(s)$ oraz $H(z)$ są pokazane na rys. 2.12. Przejście pomiędzy płaszczyzną s a płaszczyzną z odbywa się



Rys. 2.12. Przekształcenie płaszczyzny sT w płaszczyznę z

w dwóch etapach: najpierw cała płaszczyzna s układu ciągłego dzieli się na okresowo powtarzające się odcinki o szerokości 2π (jest to wynik dyskretyzacji z okresem T), a następnie, odpowiednie punkty płaszczyzny e^{sT} , są transformowane na płaszczyznę z . Można zauważyć (rys. 2.12), że oś urojona płaszczyzny s przechodzi w okrąg jednostkowy na płaszczyźnie z zgodnie z pokazanymi strzałkami. Lewa półpłaszczyzna s ($\sigma < 0$) jest transformowana do wnętrza okręgu ($|z| < 1$), a prawa ($\sigma > 0$) – przechodzi w otoczenie okręgu ($|z| > 1$).

Charakterystykę częstotliwościową układu dyskretnego można uzyskać na podstawie transmitancji $H(z)$ zgodnie z (2.67). Jest ona pokazana na rys. 2.13.

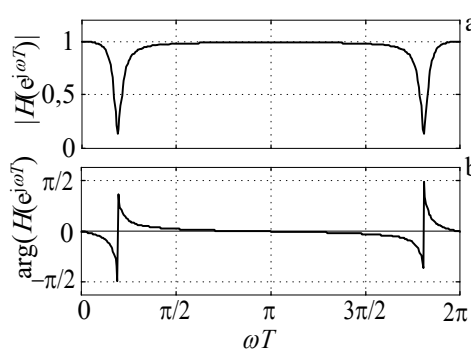
Na podstawie transmitancji układu $H(z)$ można także określić algorytm, według którego przetwarzany jest sygnał wejściowy układu dyskretnego. Podstawiając uzyskaną transmitancję do (2.59) otrzymuje się:

$$a_0 Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + a_2 z^{-2} Y(z) = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + b_2 z^{-2} X(z),$$

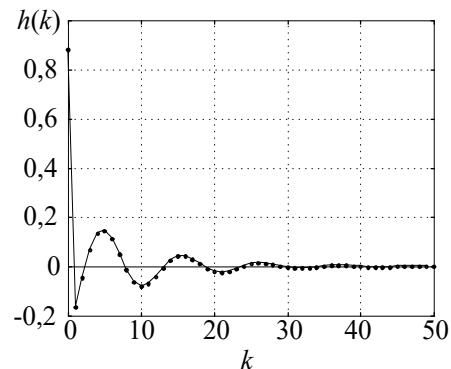
skąd, uwzględniając (2.57)

$$y(k) = \frac{b_0}{a_0} x(k) + \frac{b_1}{a_0} x(k-1) + \frac{b_2}{a_0} x(k-2) - \frac{a_1}{a_0} y(k-1) - \frac{a_2}{a_0} y(k-2).$$

Powyższa zależność przedstawia równanie filtru rekursywnego, który szczegółowo jest opisany w dalszej części rozdziału. Przyjmując w charakterze sygnału wymuszającego funkcję impulsową (2.53), otrzymuje się odpowiedź impulsową filtru (rys. 2.14). Widać, że uzyskany przebieg jest podobny do funkcji impulsowej pierwotnego układu ciągłego (rys. 2.11). □



Rys. 2.13. Charakterystyka częstotliwościowa układu dyskretnego



Rys. 2.14. Odpowiedź impulsowa filtru cyfrowego

Metoda transformacji dwuliniowej. Wywodzi się ona z aproksymacji całki funkcji ciągłej za pomocą dyskretnej metody trapezów. Powiązanie dziedziny czasu ciągłego z dziedziną czasu dyskretnego zachodzi w tym przypadku poprzez następującą zależność [11], [33]:

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}, \quad (2.75)$$

przy czym, czynnik $2/T$ pełni rolę współczynnika skalującego, więc wygodniej jest posługiwać się bardziej ogólną postacią [19]:

$$s = \alpha \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}, \quad (2.76)$$

gdzie: α jest współczynnikiem skalującym, dobieranym w celu ustalenia odpowiednich relacji amplitudowych pomiędzy obu dziedzinami (ciągłą i dyskretną)*. Zależność (2.75) oznacza, że transformacja układu ciągłego do układu dyskretnego odbywa się przez następujące podstawienie:

$$H(z) = H_c(s) \Big|_{s=\alpha \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}. \quad (2.77)$$

Powyższa zależność jest znana jako *transformacja dwuliniowa* (biliniowa).

Relacja (2.75) określa współzależność pomiędzy płaszczyzną układu ciągłego s a płaszczyzną układu dyskretnego $sT = s'T$. Podstawiając do (2.75) zależność (2.52) otrzymuje się

$$s = \alpha \operatorname{tgh} \left(s' \frac{T}{2} \right), \quad (2.78)$$

$$s' = \frac{2}{T} \operatorname{arctgh} \left(\frac{s}{\alpha} \right). \quad (2.79)$$

Związki te są konsekwencją 'zwinięcia' całej płaszczyzny s układu ciągłego do pasa ograniczonego częstotliwością $\pm j\pi/T$ na płaszczyźnie układu dyskretnego s' .

Zależności (2.77), (2.78) mają istotne znaczenie wówczas, gdy analizowane jest odwzorowanie charakterystyki częstotliwościowej oryginalnego układu ciągłego w przetworzonym układzie dyskretnym lub odwrotnie. Jeśli w (2.78) ograniczyć się tylko do rozważania rzeczywistej zmiennej ω w miejsce zmiennej zespolonej s , to:

$$\omega = \alpha \operatorname{tg} \left(\omega' \frac{T}{2} \right), \quad (2.80)$$

* Na przykład, biorąc pod uwagę relacje amplitudowe w stanie ustalonym w sieci o pulsacji znamionowej ω_1 otrzymuje się: $\alpha = \omega_1 / \operatorname{tg}(\omega_1 T / 2)$. Patrz też p. 4.3.3.

$$\omega' = \frac{2}{T} \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right). \quad (2.81)$$

W obu przypadkach występuje silnie nieliniowa zależność, która pogłębia się w miarę wzrostu argumentu odpowiedniej funkcji. Konsekwencje tych relacji są pokazane w poniższym przykładzie.

Przykład 2.9. Dokonać transformacji układu ciągłego z Przykładu 2.7 do układu dyskretnego za pomocą transformacji dwuliniowej. Przyjąć okres próbkowania $T = 0,4 \cdot 10^{-4} \text{ s}$.

Zastosowanie przekształcenia (2.75) w odniesieniu do transmitancji $H(s)$ układu ciągłego z Przykładu 2.7 prowadzi do ($\alpha = 1$):

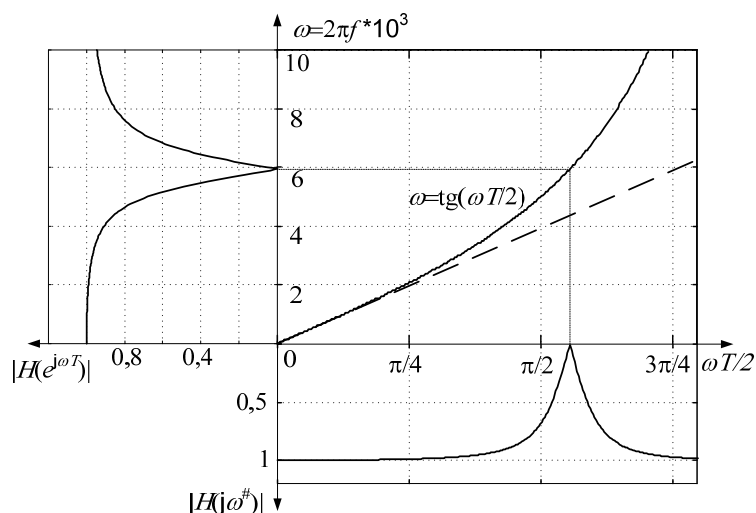
$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}, \quad \text{gdzie:}$$

$$b_0 = 1 - (z_1 + z_2) + z_1 z_2, \quad b_1 = -2(1 - z_1 z_2), \quad b_2 = 1 + z_1 + z_2 + z_1 z_2,$$

$$a_0 = 1 - (p_1 + p_2) + p_1 p_2, \quad a_1 = -2(1 - p_1 p_2), \quad a_2 = 1 + p_1 + p_2 + p_1 p_2,$$

z_i, p_i są odpowiednio zerami i biegunami transmitancji $H(s)$ z Przykładu 2.7.

Uzyskana transmitancja $H(z)$ układu dyskretnego ma podobną formę jak w Przykładzie 2.7. Jej postać widmowa może być otrzymana zgodnie z (2.67). Proces transformacji charakterystyki częstotliwościowej układu ciągłego do układu dyskretnego zgodnie z metodą transformacji dwuliniowej jest pokazany na rys. 2.15. Widać, że zgodnie z zależnością (2.80) oś częstotliwości ulega podczas tego przekształcenia deformacji. W ten sposób proporcje występujące w



Rys. 2.15. Transformacja układu ciągłego do układu dyskretnego

charakterystyce układu ciągłego ulegają zniekształceniu w charakterystyce odpowiadającego mu układu dyskretnego. Proporcjonalne odwzorowanie zachodzi tylko w początkowym zakresie częstotliwości. □

Zagadnienie odwzorowania charakterystyki częstotliwościowej układu ciągłego w odpowiadającym mu układzie dyskretnym jest ważne wówczas, gdy układy ciągłe są stosowane w charakterze wzorców do projektowania układów dyskretnych. Metoda ta jest stosowana w przypadku projektowania niektórych rodzajów filtrów cyfrowych.

2.3 Filtracja cyfrowa

2.3.1 Opis filtrów cyfrowych

Tradycyjnie przyjmuje się, że układ dyskretny (cyfrowy) realizujący określony algorytm przetwarzania, który jest zdefiniowany w dziedzinie czasu za pomocą równania różnicowego, jest *filtrem dyskretnym* (cyfrowym). Kluczowym pojęciem w analizie i projektowaniu filtrów cyfrowych i algorytmów przetwarzania cyfrowego jest funkcja przejścia $H(z)$, gdyż jest ona bezpośrednio powiązana ze stabilnością układu (filtru) oraz jego charakterystyką częstotliwościową. Może ona być określona jako transformata \mathcal{Z} funkcji impulsowej

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^{-k}. \quad (2.82)$$

Stabilność filtru zależy od warunków istnienia sumy szeregu (2.82). Obszar zbieżności transformaty $H(z)$ jest określony przez wartości zmiennej z , dla których ciąg $h(k)z^{-k}$ jest bezwzględnie sumowalny. W praktyce, warunek ten jest wiązany z właściwościami funkcji przejścia filtru, a mianowicie, filtr jest stabilny jeśli wszystkie bieguny (pierwiastki mianownika) jego transmitancji leżą w obszarze $|z| < 1$, czyli wewnątrz okręgu jednostkowego płaszczyzny zespolonej \mathcal{Z} .

W celu analizy właściwości częstotliwościowych filtru zakłada się, że jest on pobudzany harmonicznym sygnałem zespolonym

$$\underline{x}(k) = e^{j\omega kT}, \quad 0 < k < \infty. \quad (2.83)$$

Na podstawie (2.57) wiadomo, że opóźnienie próbek sygnału jest równoważne pomnożeniu tego sygnału przez odpowiedni współczynnik zespolony (przy ograniczeniu rozważań do stanu ustalonego):

$$\underline{x}(k-m) = e^{j\omega(k-m)T} = \underline{x}(k)e^{-j\omega mT}. \quad (2.84)$$

Stosując sygnał (2.84) jako wymuszenie w (2.60), otrzymuje się:

$$\underline{y}(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)\underline{x}(k-m) = \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{-j\omega mT} \right) \underline{x}(k) = H(e^{j\omega T})\underline{x}(k). \quad (2.85)$$

W ten sposób, odpowiedź jest równa wymuszeniu (harmonicznemu) pomnożonemu przez pewną zespoloną funkcję, która jest widmową postacią funkcji przejścia (2.67)

$$H(j\omega) = H(e^{j\omega T}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}}, \quad (2.86)$$

czyli charakterystyką częstotliwościową filtru. W dalszych rozważaniach będzie stosowane oznaczenia $H(j\omega)$ dla określenia zespolonej charakterystyki częstotliwościowej filtru. $H(j\omega)$ jest funkcją zespoloną, którą można przedstawić w postaci sumy składowej rzeczywistej i urojonej lub w zapisie wykładniczym:

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= H_r(j\omega) + jH_i(j\omega), \\ H(j\omega) &= |H(j\omega)|e^{j\arg(H(j\omega))}, \end{aligned} \quad (2.87)$$

gdzie $|H(j\omega)|$ reprezentuje charakterystykę amplitudową, a $\arg(H(j\omega)) = \angle H(j\omega)$ - charakterystyką fazową filtru.

Charakterystykę amplitudową przedstawia się często w skali logarytmicznej (w dB) i wówczas wzmocnienie filtru jest reprezentowane następującą wielkością: $20\log(|H(j\omega)|)$ [dB]. Z charakterystyką fazową filtru związane są dwie funkcje określane jako *opóźnienie fazowe* oraz *opóźnienie grupowe*, które są definiowane następująco:

$$\tau_p(\omega) = -\frac{\arg(H(j\omega))}{\omega} - \text{opóźnienie fazowe}, \quad (2.88)$$

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\arg(H(j\omega))}{d\omega} - \text{opóźnienie grupowe}. \quad (2.89)$$

Dla układów o rzeczywistych funkcjach impulsowych $h(k)$ zachodzi zależność:

$$H(j\omega) = [H(-j\omega)]^*, \quad (2.90)$$

gdzie * jest operacją sprzężenia zespolonego,

co oznacza, że charakterystyka amplitudowa $|H(j\omega)|$ jest funkcją parzystą, podczas gdy charakterystyka fazowa $\angle H(j\omega)$ jest nieparzystą funkcją częstotliwości ω [11].

Ciągi sygnałów przetwarzanych w rzeczywistych układach cyfrowych mają skończoną długość, zatem odpowiednie równania przetwarzania mają formę sum skończonych. Zależność wejście-wyjście w liniowym systemie dyskretnym jest przedstawiana w postaci równania różnicowego (2.66), z którym związana jest transmitancja (2.63).

Filtry cyfrowe dzieli się w zależności od charakteru funkcji impulsowej lub sposobu realizacji jego równania. W przypadku skończonej długości odpowiedzi impulsowej jest to filtr o *Skończonej Odpowiedzi Impulsowej* - SOI) (ang. *Finite Impulse Response* - FIR). W przeciwnym przypadku jest to filtr o *Nieskończonej Odpowiedzi Impulsowej* - NOI) (ang. *Infinite Impulse Response* - IIR) [4], [36].

Transmitancja filtru SOI nie ma biegunów (zer wielomianu mianownika), co można zauważyć analizując równanie (2.63) przy założeniu, że mianownik nie zależy od parametru z , to jest, gdy

$$a_l = 0 \text{ for } l = 1, 2, \dots, L, \quad (2.91)$$

co prowadzi do następującej zależności:

$$y(k) = \sum_{m=0}^M b_m x(k-m). \quad (2.92)$$

W ten sposób równanie (2.66) dla $L \geq 1$ opisuje procedurę filtru NOI, natomiast (2.92) przedstawia algorytm filtru SOI.

Filtry SOI są zazwyczaj realizowane według *algorytmu nierekursywnego*, co oznacza, że poprzednie wartości sygnału wyjściowego (lub wewnętrznego w procedurze filtru) nie są używane do określenia aktualnego sygnału wyjściowego. I odwrotnie - w procedurze filtru NOI ma miejsce relacja rekursywna, gdyż po prawej stronie równania (2.92) występują poprzednie wartości obliczanego sygnału wyjściowego. Taka procedura nazywa się *algorytmem rekursywnym*. Jednakże w ogólnym przypadku zarówno filtry NOI mogą być realizowane według algorytmu nierekursywnego, jak i filtry SOI mogą być wykonane według procedury rekursywnej. Stąd też należy zachować rozróżnienie pomiędzy charakterem odpowiedzi impulsowej filtru (SOI - NOI) a sposobem jego realizacji (nierekursywny - rekursywny).

2.3.2 Filtry o skończonej odpowiedzi impulsowej

Algorytm filtru SOI jest określony przez równanie (2.92). Sygnał wyjściowy powstaje jako liniowa kombinacja M próbek sygnału wejściowego, co można zapisać jako

$$y(k) = \sum_{m=0}^{M-1} h(m)x(k-m), \quad (2.93)$$

gdzie: $h(m)$ jest funkcją impulsową filtru.

Ze względu na sposób wykonywania operacji (2.93), przedział obejmujący ostatnie M próbek sygnału wejściowego nazywa się oknem pomiarowym (oknem przetwarzania). Równanie filtru (2.93) przedstawia splot kołowy, który może być także zapisany w następującej formie:

$$y(k) = \sum_{m=0}^{M-1} h(M-1-m)x(k+m-M+1). \quad (2.94)$$

Duże zainteresowanie filtrami SOI w automatyce elektroenergetycznej wynika z bardzo użytecznej ich właściwości: można łatwo zaprojektować filtry tego typu o liniowej charakterystyce fazowej, czyli o stałym opóźnieniu grupowym. Pozwala to w prosty sposób utworzyć parę filtrów o podobnych właściwościach częstotliwościowych których fazy sygnałów wyjściowych są przesunięte wzajemnie o kąt $\pi/2$. Para takich wąskopasmowych filtrów tworzy zatem estymator sygnału zespolonego o wybranej częstotliwości.

Transmitancja filtru (2.93) ma następującą postać

$$H(z) = \sum_{m=0}^{M-1} h(m)z^{-m}. \quad (2.95)$$

Jego charakterystyka częstotliwościowa (amplitudowo-fazowa) jest określona równaniem

$$H(j\omega) = \sum_{m=0}^{M-1} h(m)e^{-jm\omega T}. \quad (2.96)$$

Powyższą funkcję wygodnie jest przedstawić w postaci wykładniczej [19]

$$H(j\omega) = H(\omega)e^{j\theta(\omega)}, \quad (2.97)$$

gdzie: $H(\omega)$ jest nazywana charakterystyką częstotliwościową przy zerowej fazie (charakterystyką zerowo-fazową), gdyż:

$H(j\omega) = H(\omega)$ dla $\theta(\omega) = 0$, przy czym,

$|H(\omega)| = |H(j\omega)|$ - charakterystyka amplitudowa,

$\theta(\omega) = \begin{cases} \arg H(j\omega) & \text{dla } H(\omega) \geq 0 \\ \arg H(j\omega) + \pi & \text{dla } H(\omega) < 0 \end{cases}$ - charakterystyka fazowa.

Można zauważyć, że $H(\omega)$ jest funkcją rzeczywistą.

Ze względu na charakter funkcji określającej stałe opóźnienie grupowe (2.89), filtry SOI tworzą dwie następujące rodziny.

a) Filtry o stałym opóźnieniu grupowym i fazowym, dla których charakterystyka fazowa jest określona równaniem

$$\theta(\omega) = -\tau_g \omega. \quad (2.98)$$

Warunek ten jest spełniony gdy funkcja impulsowa filtru jest parzysta (symetryczna) względem środka okna pomiarowego

$$h(m) = h(M-1-m) \text{ dla } 0 \leq m \leq M-1 \quad (2.99)$$

i wówczas:

$$\tau_g = \frac{(M-1)T}{2} \quad (2.100)$$

oraz

$$\theta(\omega) = -\frac{(M-1)\omega T}{2}. \quad (2.101)$$

Przykład funkcji impulsowej filtru o stałym opóźnieniu grupowym i fazowym jest pokazany na rys. 2.16a.

b) Filtry o stałym opóźnieniu grupowym, dla których charakterystyka fazowa jest określona równaniem

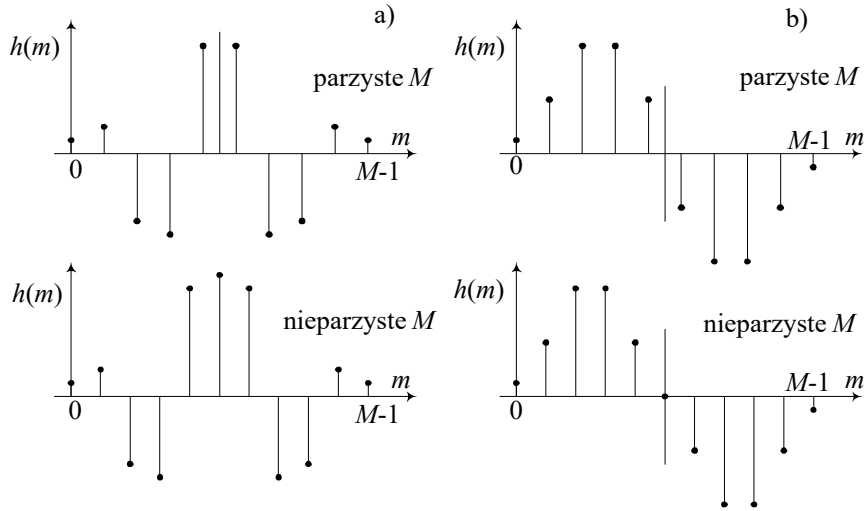
$$\theta(\omega) = \theta_0 - \tau_g \omega. \quad (2.102)$$

Dla $\theta_0 = \pm\pi/2$ powyższy warunek jest spełniony w przypadku funkcji impulsowej nieparzystej względem środka okna pomiarowego (rys. 2.16b)

$$h(m) = -h(M-1-m) \text{ dla } 0 \leq m \leq M-1, \quad (2.103)$$

co prowadzi do

$$\theta(\omega) = -\frac{(M-1)\omega T - \pi}{2}. \quad (2.104)$$



Rys. 2.16. Kształt parzystej (a) oraz nieparzystej (b) charakterystyki impulsowej filtru SOI

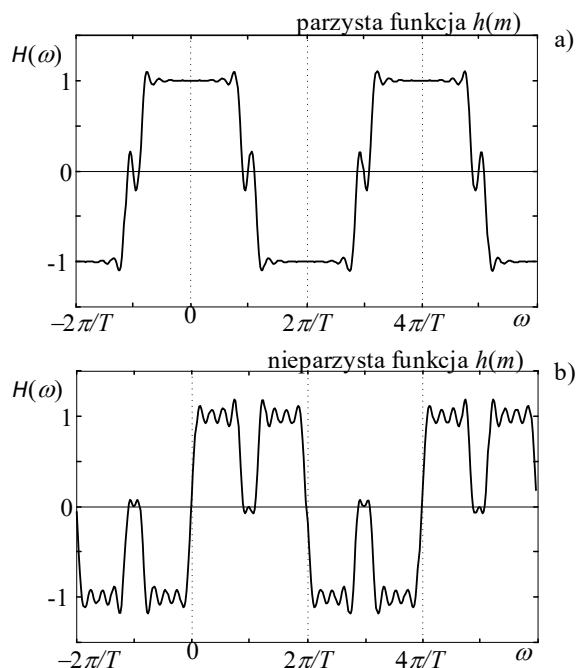
Charakterystyka częstotliwościowa rozważanych filtrów może być otrzymana przez podstawienie odpowiedniej funkcji impulsowej do (2.96). Dla parzystej liczby próbek M otrzymuje się [20]:

$$H(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\frac{M-1}{2}\omega T} \sum_{m=0}^{M/2-1} 2h(m) \cos\left(\left(\frac{M-1}{2} - m\right)\omega T\right) & \text{dla parzystej } h(m), \\ e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{M-1}{2}\omega T\right)} \sum_{m=0}^{M/2-1} 2h(m) \sin\left(\left(\frac{M-1}{2} - m\right)\omega T\right) & \text{dla nieparzystej } h(m), \end{cases} \quad (2.105)$$

skąd łatwo określić liniową fazę $\theta(\omega)$ oraz zerowo-fazową charakterystykę częstotliwościową $H(\omega)$. Przykład funkcji $H(\omega)$ dla przypadku jak w (2.105) jest pokazany na rys. 2.17.

Inny sposób określenia charakterystyki częstotliwościowej filtru prowadzi przez zastosowanie przekształcenia z . Dla parzystej wartości liczby próbek M , uzyskuje się:

$$H(z) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{M/2-1} h(m) (z^{-m} + z^{-(M-m-1)}) & \text{dla parzystej } h(m), \\ \sum_{m=0}^{M/2-1} h(m) (z^{-m} - z^{-(M-m-1)}) & \text{dla nieparzystej } h(m). \end{cases} \quad (2.106)$$



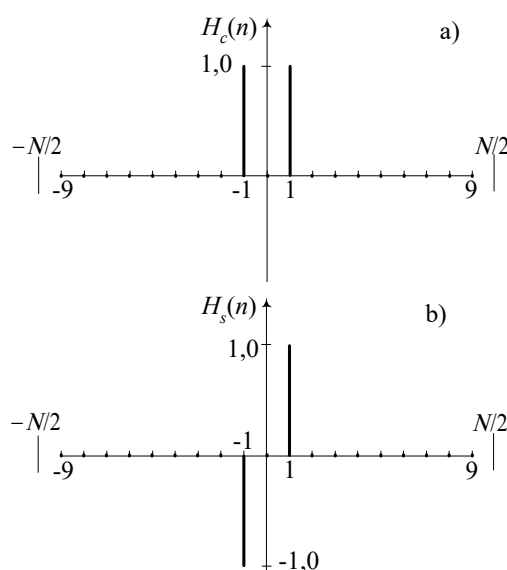
Rys. 2.17. Charakterystyka zerowo-fazowa filtrów SOI o parzystej (a) oraz nieparzystej (b) funkcji impulsowej; parzysta liczba próbek M

Projektowanie filtrów SOI polega na określeniu funkcji impulsowej $h(m)$ (2.93), która spełnia wymagania określone przez charakterystykę częstotliwościową (2.105). Znanych jest wiele konkretnych sposobów projektowania filtrów SOI [2], [19], [36]. W technice projektowania algorytmów pomiarowych automatyki elektroenergetycznej często stosuje się prostą metodę próbkowania częstotliwości [20], [36]. Wykorzystuje ona relacje pomiędzy przestrzenią dyskretnego czasu oraz dziedziną częstotliwości występujące w przekształceniu \mathcal{Z} . Pokazuje to następujący przykład.

Przykład 2.10. Zaprojektować parę filtrów wąskopasmowych do określania składowych ortogonalnych sygnału o częstotliwości 50 Hz z zakłóconego sygnału wejściowego. Sygnał jest próbkowany z okresem $T = 0,001$ s, a szerokość okna pomiarowego wynosi $M = 20$ próbek.

Jest to typowe zadanie projektowania estymatora sygnału zespolonego składowej podstawowej prądu lub napięcia w obwodzie elektrycznym. Należy zauważyć, że okno pomiarowe odpowiada okresowi podstawowej harmonicznej sygnału gdyż $M = N$, gdzie N - liczba próbek sygnału w okresie podstawowej harmonicznej.

Analizując charakterystykę częstotliwościową filtrów SOI (2.97) można zauważyć, że rozdzielanie sygnału harmonicznego na składowe ortogonalne (a więc takie, które są wzajemnie przesunięte o kąt $\pi/2$) uzyskuje się przez użycie dwóch filtrów, odpowiednio z parzystą $h_c(m)$ i nieparzystą $h_s(m)$ funkcją impulsową. W ten sposób na wyjściu filtru o transmitancji $H_c(j\omega)$ otrzyma się składową bezpośrednią, a na wyjściu filtru o transmitancji $H_s(j\omega)$ - składową prostopadłą (kwadraturową).



Rys. 2.18. Próbkowanie postulowanej charakterystyki częstotliwościowej filtru dla składowej bezpośredniej (a) oraz kwadraturowej (b)

ściowej, wystarczy ją określić w przedziale $(-\pi/T \leq \omega \leq \pi/T)$. Charakterystyka fazowa w (2.97) oraz kształt funkcji $H_c(\omega_n)$, $H_s(\omega_n)$ są zdeterminowane przez podstawowe parametry filtru: N - parzyste, $h_c(m)$ - funkcja parzysta, $h_s(m)$ - funkcja nieparzysta. Stąd, 'idealne' charakterystyki częstotliwościowe $H_c(\omega_n)$ oraz $H_s(\omega_n)$ w przedziale $\omega_n = n\omega_0$, $n = 0, \pm 1, \dots, \pm(N/2 - 1)$ powinny mieć formę jak na rys. 2.18, przy czym ich fazy są określone przez następujące zależności:

$$\theta_c(\omega_n) = -\frac{(N-1)\omega_n T}{2} \quad \text{oraz} \quad \theta_s(\omega_n) = -\frac{(N-1)\omega_n T - \pi}{2}$$

Omawiana metoda projektowania filtrów z próbkowaniem częstotliwości polega na zastosowaniu odwrotnego DPF (2.20) w odniesieniu do tak sformułowanych charakterystyk częstotliwościowych. Uzyskuje się w ten sposób ich charakterystyki impulsowe.

W celu określenia funkcji $h_c(m)$, $h_s(m)$ trzeba jeszcze zdefiniować przebieg charakterystyki amplitudowej obu filtrów. W rozważanym przypadku należy dążyć do uzyskania wąskopasmowych filtrów o podobnym przebiegu wzmocnienia, z częstotliwością środkową 50 Hz. Właściwy przebieg postulowanych charakterystyk uzyskuje się na podstawie rys. 2.17, przy czym, dla przyjętych danych krok próbkowania częstotliwości wynosi:

$$\omega_0 = \omega_1 = \frac{2\pi}{NT} = \frac{2\pi}{20 \cdot 0,001} = 100\pi$$

co odpowiada częstotliwości podstawowej sygnału 50 Hz. W związku z okresowością charakterystyki częstotliwościowej

Wracając do rys. 2.18 łatwo zauważyć, że postulowana charakterystyka częstotliwościowa $\underline{H}(n)$ przyjmuje niezerowe wartości tylko w dwóch punktach:

$$\underline{H}_c(n) = e^{\pm j \frac{\pi}{N}}, \quad \text{dla } n = \pm 1,$$

$$\underline{H}_s(n) = \pm e^{j \left(\frac{\pi}{N} - \frac{\pi}{2} \right)}, \quad \text{dla } n = \pm 1.$$

Stosując odwrotne DPF w odniesieniu do powyższych związków otrzymuje się odpowiedzi impulsowe: - dla filtru bezpośredniego:

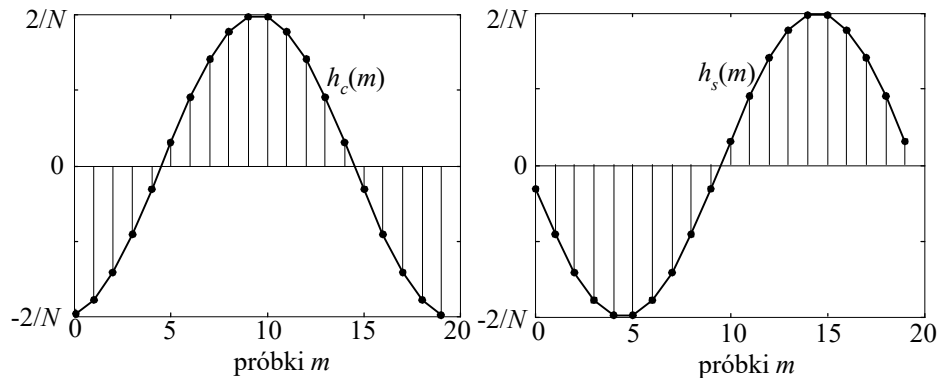
$$h_c(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=1-N/2}^{N/2-1} \underline{H}_c(n) e^{jan(m-N/2)}, \quad \text{dla } m = 0, 1, \dots, N-1, \quad a = 2\pi/N$$

i podobnie dla $h_s(m)$. Sumowanie dotyczy tylko wybranych punktów, dla których charakterystyki częstotliwościowe są różne od zera, zatem łatwo otrzymać wynik w następującej postaci:

$$h_c(m) = \frac{2}{N} \cos\left(\left(m - \frac{N-1}{2}\right)a\right),$$

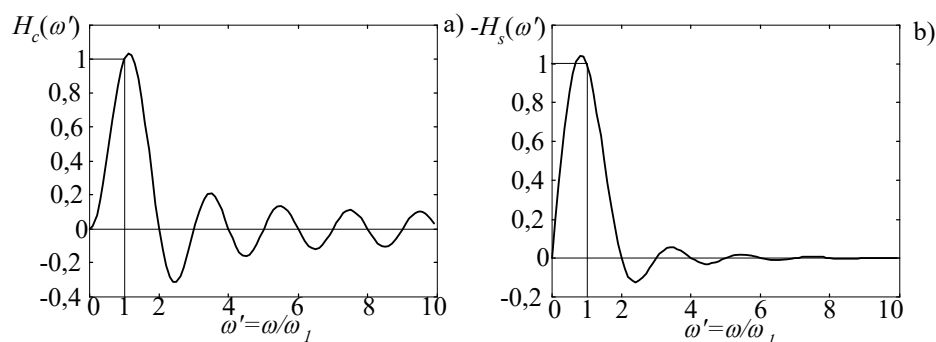
$$h_s(m) = \frac{2}{N} \sin\left(\left(m - \frac{N-1}{2}\right)a\right), \quad \text{dla } m = 0, 1, \dots, N-1.$$

Widać, że charakterystyki impulsowe są reprezentowane rzeczywistymi funkcjami sinus i kosinus w jednym okresie analizowanego przebiegu (rys. 2.19). Charakterystyki częstotliwościowe uzyskanych filtrów w przedziale

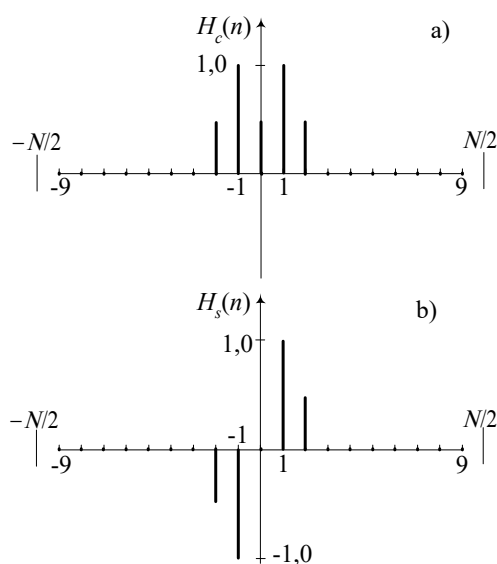


Rys. 2.19. Funkcje impulsowe filtrów SOI

$0 \leq \omega \leq \pi/T$ (co odpowiada liczbie $N/2$ próbek charakterystyki częstotliwościowej) są przedstawione na rys. 2.20. Można zauważyć, że uzyskane charakterystyki różnią się od ich wersji postulowanych - równość zachodzi jedynie dla punktów określonych przez pulsację ω_n odpowiadającą próbkom funkcji $X(n)$. Te różnice objawiają się w postaci oscylacji Gibbsa (listki boczne) [20]. Są one



Rys. 2. 20. Zerowo-fazowe charakterystyki częstotliwościowe filtra bezpośredniego (a) oraz kwadraturowego (b)



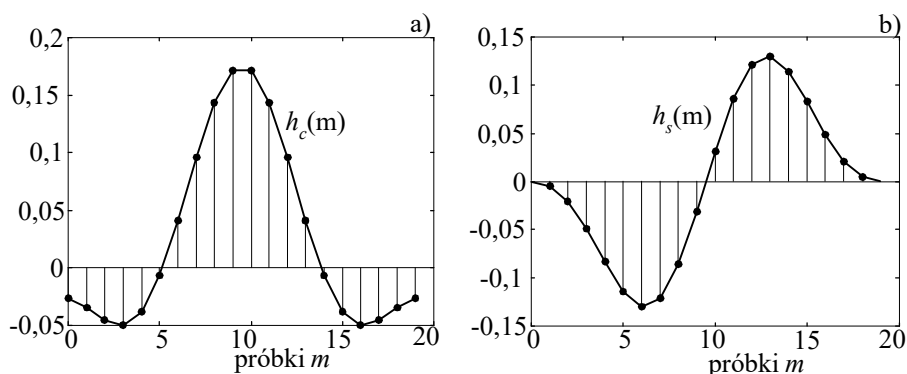
Rys. 2.21. Zmodyfikowane charakterystyki częstotliwościowe filtra bezpośredniego (a) oraz kwadraturowego (b)

rezultatem skończonej liczby próbek pierwotnej charakterystyki częstotliwościowej, które bierze się pod uwagę przy projektowaniu filtra. Im większa liczba próbek M sygnału w oknie pomiarowym filtra, tym mniejsze będą oscylacje Gibbsa, a co za tym idzie - również wierniejsze odwzorowanie pożądanej charakterystyki częstotliwościowej.

Duże oscylacje towarzyszą gwałtownym zmianom amplitudy charakterystyki częstotliwościowej filtra. Jednym ze sposobów eliminacji tych niekorzystnych oscylacji jest ograniczanie szybkich zmian w postulowanej charakterystyce częstotliwościowej

Tablica 2.1. Próbki charakterystyki częstotliwościowej zmodyfikowanego filtra SOI

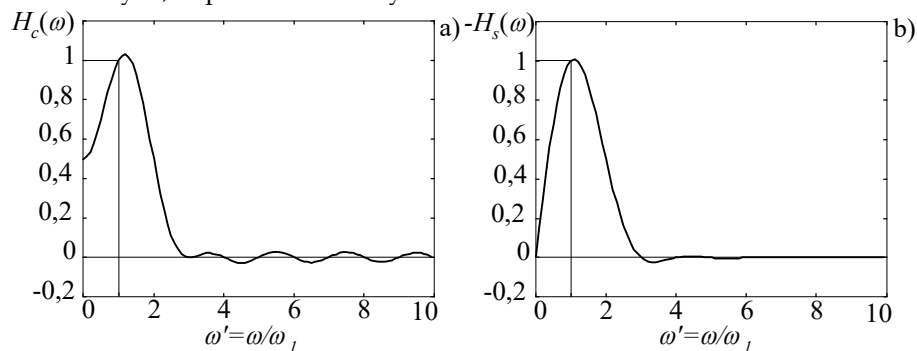
n	$\underline{H}_c(n)$	$\underline{H}_s(n)$
-2	$0,5e^{-j2\pi/N}$	$-0,5e^{-j(2\pi/N+\pi/2)}$
-1	$e^{-j\pi/N}$	$-e^{-j(\pi/N+\pi/2)}$
0	0,5	0
1	$e^{j\pi/N}$	$e^{j(\pi/N-\pi/2)}$
2	$0,5e^{j2\pi/N}$	$0,5e^{j(2\pi/N-\pi/2)}$



Rys. 2.22. Charakterystyki impulsowe filtrów zmodyfikowanych

przez dodanie próbek o pośrednich wartościach.

W rozpatrywanym przypadku znaczną redukcję oscylacji Gibbsa można uzyskać przez dodanie w wyjściowej charakterystyce częstotliwościowej próbek o wartości 0,5 w strefie przejściowej, gdy amplituda tej charakterystyki zmienia się pomiędzy wartościami 0 i 1 (rys. 2.18). Zmodyfikowana w ten sposób charakterystyka jest pokazana na rys. 2.21. Próbkę tej charakterystyki wraz z odpowiadającymi im wartościami charakterystyki fazowej są przedstawione w Tabelicy 2.1. Poddając je odwrotnemu DPF uzyskuje się odpowiedzi impulsowe $h_{cm}(m)$, $h_{sm}(m)$ projektowanych filtrów (rys. 2.22), którym odpowiadają charakterystyki amplitudowe jak na rys. 2.23. Można zauważyć istotną redukcję amplitudy listków bocznych, w porównaniu z rys. 2.20.



Rys. 2.23. Zerowo-fazowa charakterystyka zmodyfikowanego filtra bezpośrodkowego (a) oraz kwadraturowego (b) □

Przedstawiony w Przykładzie 2.10 sposób wygładzania charakterystyki częstotliwościowej filtra można uogólnić przez odwołanie się do funkcji okna (2.69). Można zauważyć, że charakterystyki impulsowe przedstawiają fragmenty nieskończonych ciągów dyskretnych funkcji

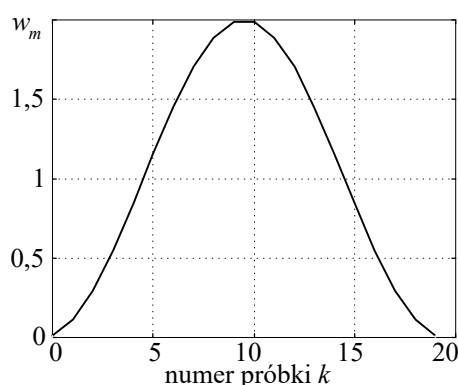
kosinus: $h_{cp}(m)$ oraz sinus: $h_{sp}(m)$, ograniczonych do jednego okresu, co można zapisać następująco:

$$\begin{aligned} h_c(m) &= w_p(m)h_{cp}(m), \\ h_s(m) &= w_p(m)h_{sp}(m), \end{aligned} \quad (2.107)$$

gdzie: $w_p(m)$ jest funkcją okna prostokątnego (2.69).

W przypadku filtru z wygładzoną charakterystyką częstotliwościową otrzymuje się

$$\begin{aligned} h_{cm}(m) &= w_m(m)h_{cp}(m), \\ h_{sm}(m) &= w_m(m)h_{sp}(m), \end{aligned} \quad (2.108)$$



Rys. 2.24. Funkcja okna zmodyfikowanego filtru

gdzie: $w_m(m)$ jest funkcją okna, które modyfikuje charakterystykę częstotliwościową filtru (rys. 2.24). Próbki funkcji $w_m(m)$ można uzyskać jako iloraz $w_m(m) = h_{sp}(m) / h_{sm}(m)$, $m = 0, 1, \dots, N - 1$. Widać, że wygładzenie pasma przejściowego charakterystyki amplitudowej jest równoważne zastosowaniu funkcji okna, która ogranicza efekt ucięcia funkcji impulsowej i jej redukcji do skończonej długości.

W praktyce stosowane są funkcje okna, które w określony sposób modyfikują charakterystyki impulsowe. Poniżej podane są charakterystyki niektórych znanych funkcji okna [19], [20].

- Okno Hamminga jest określone następującym równaniem:

$$w_M(k) = 0,54 - 0,46 \cos \frac{2\pi k}{M-1}, \quad k = 0, 1, \dots, M-1. \quad (2.109)$$

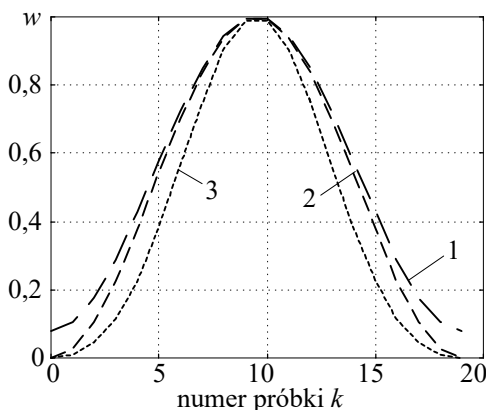
- Okno Hanna:

$$w_N(k) = 0,5 - 0,5 \cos \frac{2\pi k}{M-1}, \quad k = 0, 1, \dots, M-1. \quad (2.110)$$

- Okno Blackmana:

$$w_B(k) = 0,42 - 0,5 \cos \frac{2\pi k}{M-1} + 0,08 \cos \frac{4\pi k}{M-1}, \quad k = 0, 1, \dots, M-1. \quad (2.111)$$

Przebiegi tych funkcji są pokazane na rys. 2.25. Ich charakterystyki amplitudowe w zestawieniu z



Rys. 2.25. Funkcje typowych okien: 1 - Hamminga, 2 -Hanna, 3 - Blackmana

charakterystyką okna prostokątnego prezentuje rys. 2.26. Widać, że zastosowanie odpowiedniej funkcji kształtującej charakterystykę impulsową filtru może prowadzić do znacznego wzrostu tłumienia filtru w paśmie zaporowym. Niestety, dzieje się to kosztem wzrostu szerokości głównego listka charakterystyki amplitudowej – a więc poszerza się pasmo przepustowe filtru.

Ostatecznie można sformułować następujący algorytm projektowania filtrów SOI do rozważanych tu zastosowań.

Algorytm 2.1. *Projektowanie filtrów SOI dla potrzeb elektroenergetycznej automatyki zabezpieczeniowej.*

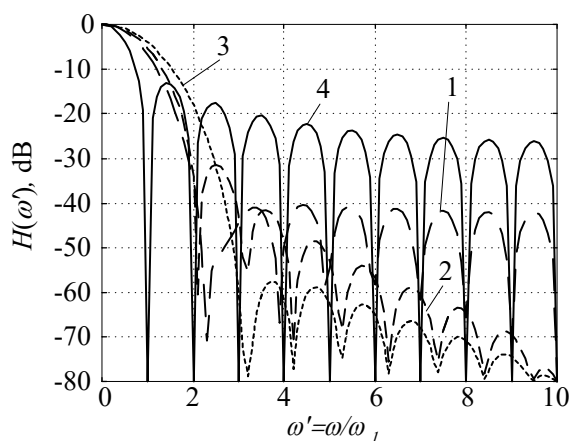
- Określić podstawowe parametry filtru: częstotliwość próbkowania (lub liczbę próbek w okresie N), szerokość okna pomiarowego oraz wymaganą amplitudową charakterystykę częstotliwościową filtru. W przypadku zastosowania do estymacji sygnału potrzebne są dwa filtry o zbliżonych charakterystykach amplitudowych oraz charakterystykach fazowych różniących się o kąt $\pi/2$.
- Metodą próbkowania częstotliwości wyznaczyć charakterystyki impulsowe filtrów.
- Wprowadzić ewentualną korektę charakterystyki amplitudowej za pomocą okien czasowych. □

Należy zauważyć, że rozważane tu filtry są przeznaczone do realizacji w mikroprocesorowym układzie pomiarowym pracującym w czasie rzeczywistym, a więc stosowane procedury powinny charakteryzować się szybką odpowiedzią i małą złożonością. Warunki te zmuszają projektantów do użycia stosunkowo prostych filtrów. Przedstawione powyżej rozważania ilustrują podstawowe właściwości filtrów SOI i ich przydatność

w automatyce zabezpieczeniowej. Można przy tym sformułować następujące uwagi.

- Użycie pary filtrów SOI o liniowej charakterystyce fazowej różniące się o kąt $\pi/2$, umożliwi łatwą estymację sygnału zespolonego

$$\underline{x}(k) = x_c(k) + jx_s(k), \quad (2.112)$$



Rys. 2.26. Charakterystyki częstotliwościowe typowych okien: 1 - Hamminga, 2 - Hanny, 3 - Blackmana, 4 - prostokątnej

gdzie: $x_c(k)$ i $x_s(k)$ są sygnałami wyjściowymi filtrów o odpowiednio, parzystej i nieparzystej charakterystyce impulsowej. Powinny to być filtry wąskopasmowe, z pasmem przepustowym dobranym do estymowanej składowej sygnału. Stosunkowo dobre efekty można uzyskać przez zastosowanie dwóch filtrów z ortogonalnymi funkcjami impulsowymi utworzonymi z fragmentów

funkcji sinus i kosinus. Filtry te w pełni eliminują wszystkie lub wybrane składowe harmoniczne sygnału wejściowego. Cecha ta jest bardzo istotna w omawianych tu zastosowaniach, gdyż podstawowe zakłócenia występujące w sygnale wejściowym układów automatyki zabezpieczeniowej mają charakter oscylacji harmoniczných [12], [23].

- Redukcja listków bocznych charakterystyki amplitudowej filtrów może być osiągnięta przez zastosowanie odpowiedniej funkcji okna. Jednakże powoduje to poszerzenie głównego listka uzyskanej charakterystyki amplitudowej, co przy stosunkowo wąskich oknach pomiarowych w omawianych tu zastosowaniach (zbliżonych do jednego okresu składowej podstawowej sygnału), pogarsza właściwości filtracyjne algorytmu.

2.3.3 Filtry o nieskończonej odpowiedzi impulsowej

Algorytm filtru NOI jest określony równaniem (2.66). Odpowiada mu transmitancja \mathcal{Z} jak w (2.63), którą wygodnie jest zapisać w następującej postaci:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{1 + \sum_{l=1}^L a_l z^{-l}}. \quad (2.113)$$

Ponieważ przynajmniej jeden spośród współczynników a_l , $l=1..L$ w (2.113) jest różny od zera, transmitancja filtru NOI ma różne od zera bieguny (pierwiastki mianownika), co istotnie zmienia jego właściwości w porównaniu z filtrem SOI. W ogólnym przypadku, aproksymacja określonej charakterystyki częstotliwościowej wymaga zastosowania filtru NOI mniejszego rzędu. Jednakże filtry NOI, w przeciwieństwie do prezentowanych powyżej filtrów SOI, mają nieliniową charakterystykę fazową [19].

Powszechnie stosowana metoda projektowania filtrów NOI polega na wcześniejszym określeniu prototypowego filtru analogowego, który następnie jest przekształcany w filtr cyfrowy. Jest to uzasadnione tym, że dobrze znana jest teoria filtrów analogowych, w ramach której stosowane są standardowe metody aproksymacji charakterystyki amplitudowej. Również procedury transformacji filtrów analogowych na filtry cyfrowe są dobrze poznane i można je łatwo stosować w programach komputerowych [2], [23].

W tym przypadku, procedura projektowania filtru NOI przebiega według następujących etapów:

1. Określić charakterystyki poszukiwanego filtru w odniesieniu do filtru analogowego.
2. Określić transmitancję prototypowego filtru analogowego.
3. Przekształcić transmitancję filtru analogowego (transformata \mathcal{S}) w ekwiwalentną transmitancję filtru cyfrowego (transformata \mathcal{Z}).

Prototyp analogowy jest zazwyczaj definiowany jako filtr dolnoprzepustowy. Po transformacji do postaci dyskretnej otrzymuje się również filtr dolnoprzepustowy. Projektowanie filtrów górnoprzepustowych, środkowoprzepustowych i zaporowych jest w tym przypadku dokonywane przez odpowiednią modyfikację charakterystyki, co może się odbywać zarówno w odniesieniu do filtru analogowego, jak i cyfrowego. Poniżej omówione są poszczególne etapy projektowania filtru NOI.

Projektowanie prototypowego filtra analogowego

Transmitancja filtra analogowego jest określona następującą funkcją zmiennej zespolonej s :

$$H_a(s) = \frac{C(s)}{D(s)} = \frac{\sum_{m=0}^M c_m s^m}{1 + \sum_{l=1}^L d_l s^l}, \quad (2.114)$$

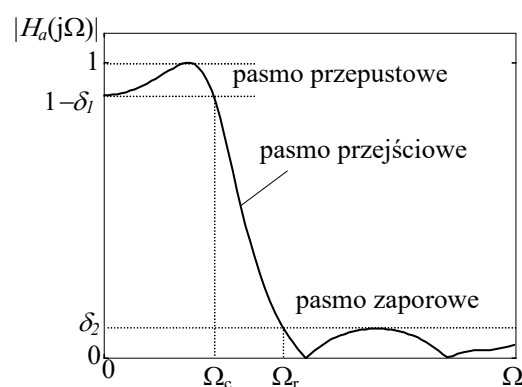
gdzie: L - rząd filtra; $M \leq L$ dla zapewnienia ograniczonego wzmocnienia przy częstotliwości dążącej do nieskończoności.

Filtr określony transmitancją (2.114) jest stabilny, gdy bieguny $H_a(s)$ (czyli pierwiastki funkcji $D(s)$):

$$s_k = \sigma_k + j\Omega_k, \quad k = 0, 1, \dots, L-1,$$

spełniają warunek: $\sigma_k < 0$ dla $k = 0, 1, \dots, L-1$.

Charakterystyka częstotliwościowa filtra o transmitancji (2.114) może być określona przez podstawienie $s = j\Omega$ w $H_a(s) \rightarrow H_a(j\Omega)$ (w miejsce



Rys. 2.27. Przebieg charakterystyki amplitudowej filtra dolnoprzepustowego

typowego symbolu ω pulsację oznaczono tu przez Ω w celu podkreślenia, że odnosi się ona do czasu ciągłego).

W przypadku filtra dolnoprzepustowego, charakterystyka amplitudowa odpowiadająca funkcji $H_a(j\Omega)$ może być zdefiniowana warunkami, jak na rys. 2.27. Dla pasma przepustowego zachodzi następująca zależność:

$$1 \geq |H_a(j\Omega)| \geq 1 - \delta_1 \quad (2.115)$$

i podobnie dla pasma zaporowego:

$$|H_a(j\Omega)| \leq \delta_2. \quad (2.116)$$

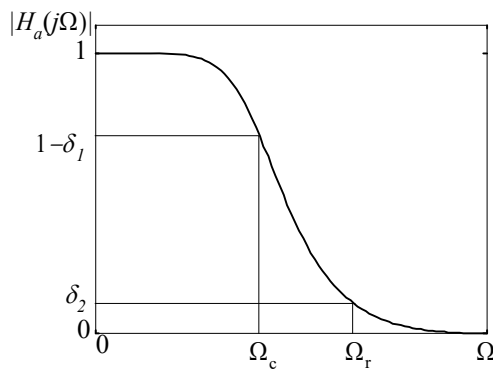
Powyższe relacje stanowią bazę wyjściową do projektowania filtrów, których charakterystyka amplitudowa jest zdefiniowana przez pasma przepustowe i zaporowe, a wzmocnienie jest stałe - z założoną tolerancją.

Poniżej przedstawione są typowe metody aproksymacji transmitancji takich filtrów.

Filtry Butterwortha

Aproksymacja Butterwortha zapewnia maksymalnie płaską charakterystykę amplitudową filtru w paśmie przepustowym i zaporowym [11]. Charakterystyka częstotliwościowa amplitudy filtru L -tego rzędu jest określona za pomocą następującej funkcji:

$$|H_a(j\Omega)|^2 = H_a(j\Omega)H_a(-j\Omega) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2L}}. \quad (2.117)$$



Rys. 2.28. Charakterystyka amplitudowa filtru Butterwortha

W celu powiązania częstotliwości odcięcia Ω_c z rzędem filtru L można zauważyć, że $|H_a(0)| = 1$ oraz $|H_a(\Omega_c)|^2 = 1/2$ (dla częstotliwości odcięcia wzmocnienie filtru spada o 3 dB). Filtr Butterwortha jest w pełni zdefiniowany przez założony rząd L , który może być określony na podstawie przyjętych założeń (rys. 2.28) według następującego równania [19]:

$$L \geq \frac{\log\left(\frac{1-\delta_2^2}{\delta_2^2}\right)}{2 \log\left(\frac{\Omega_r}{\Omega_c}\right)}. \quad (2.118)$$

Kwadrat transmitancji filtru: $H_a(s)H_a(-s)$ (2.117) ma $2L$ biegunów określonych zależnością

$$s_k = (-1)^{1/2L} (j\Omega_c)^k, \quad k = 0, 1, \dots, L-1, \quad (2.119)$$

które są równomiernie rozmieszczone na okręgu o promieniu Ω_c płaszczyzny zespolonej s [19]. Stabilnemu filtrowi odpowiadają bieguny znajdujące się w lewej części płaszczyzny, związane z indeksami

$k = 0, 1, \dots, L-1$. Łatwo sprawdzić, że są one określone następującym równaniem:

$$s_k = \sigma_k + j\Omega_k = \Omega_c \left(\cos\left(\frac{\pi(L+2k+1)}{2L}\right) + j\sin\left(\frac{\pi(L+2k+1)}{2L}\right) \right). \quad (2.120)$$

Odpowiada im transmitancja o postaci:

$$H_a(s) = \frac{1}{\prod_{k=0}^{L-1} (s - s_k)}. \quad (2.121)$$

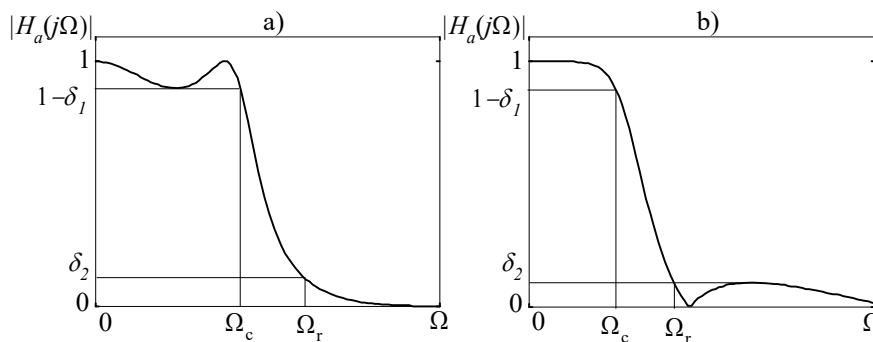
Filtr Czebyszewa

Filtr Butterwortha ma monotonicznie opadającą charakterystykę amplitudową w miarę wzrostu pulsacji $|\Omega|$. To powoduje, że nałożone wymagania w pasmach przepuszczania i tłumienia wymagają stosowania niekiedy filtrów wysokiego rzędu. Bardziej racjonalne może być stosowanie aproksymacji Czebyszewa, dla której charakterystyka amplitudowa pozostaje monotoniczna tylko w jednym z wymienionych pasm: w paśmie zaporowym (I rodzaj) lub w paśmie przepustowym (II rodzaj). W pozostałym zakresie charakterystyka wykazuje lokalne ekstrema, które jednak spełniają założone warunki (rys. 2.29).

Kwadrat modułu charakterystyki amplitudowej filtru Czebyszewa I rodzaju jest określony następującą funkcją [19]:

$$|H_a(j\Omega)|^2 = H_a(j\Omega)H_a(-j\Omega) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_L^2(\Omega/\Omega_c)}, \quad (2.122)$$

gdzie: $T_L(x)$ jest wielomianem Czebyszewa L -tego rzędu o następującej postaci (i - liczba całkowita nieujemna)



Rys. 2.29. Charakterystyka amplitudowa filtru Czebyszewa I (a) oraz II rodzaju (b)

$$T_i(x) = \begin{cases} \cos(i \cos^{-1} x), & |x| \leq 1 \\ \cosh(i \cosh^{-1} x), & |x| \geq 1 \end{cases} \quad (2.123)$$

Znany jest rekursywny algorytm obliczania tego wielomianu

$$T_{i+1}(x) = 2xT_i(x) - T_{i-1}(x), \quad i = 1, 2, \dots,$$

gdzie: $T_0(x) = 1$ oraz $T_1(x) = x$.

Parametr ε^2 w (2.122) jest określony przez dopuszczalny przedział [11]:

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{(1 - \delta_1)^2} - 1. \quad (2.124)$$

Rząd poszukiwanego filtru, który spełnia przyjęte założenia może być określony według zależności

$$L \geq \frac{\cosh^{-1} \left(\frac{1 - \delta_1}{\delta_2} \sqrt{\frac{1 - \delta_2^2}{1 - (1 - \delta_1)^2}} \right)}{\cosh^{-1} \left(\frac{\Omega_r}{\Omega_c} \right)}, \quad (2.125)$$

przy czym L biegunów transmitancji $H_a(s)$ stabilnego filtru jest rozmieszczonych w lewej półpłaszczyźnie s na elipsie o równaniu

$$s_k = \Omega_c (\sigma_k + j\Omega_k), \quad (2.126)$$

gdzie:

$$\sigma_k = -p \sin \left(\frac{\pi(2k+1)}{2L} \right), \quad \Omega_k = q \cos \left(\frac{\pi(2k+1)}{2L} \right), \quad \text{oraz}$$

$$p = \frac{\gamma - \gamma^{-1}}{2}, \quad q = \frac{\gamma + \gamma^{-1}}{2}, \quad \gamma = \left(\frac{2 - \delta_1}{\delta_1} \right)^{\frac{1}{2L}}.$$

Funkcja przejścia filtru może być określona w następującej postaci [2]:

$$H_a(s) = \frac{H_0}{\prod_{s=0}^{L-1} (s - s_k)}, \quad (2.127)$$

gdzie, w celu normalizacji charakterystyki (jednostkowe wzmocnienie dla zerowej częstotliwości), H_0 należy przyjąć zgodnie z zależnością:

$$H_0 = \begin{cases} (1 - \delta_1) \prod_{k=0}^{L-1} (-s_k) & L - \text{parzyste,} \\ \prod_{k=0}^{L-1} (-s_k) & L - \text{nieparzyste.} \end{cases}$$

Charakterystyka filtru Czebyszewa II rodzaju (rys. 2.29b) zanika monotonicznie w paśmie przepustowym i przybiera lokalne ekstrema w paśmie zaporowym. Kwadrat modułu tej charakterystyki jest określony równaniem

$$|H_a(j\Omega)|^2 = H_a(j\Omega)H_a(-j\Omega) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{T_L(\Omega_r / \Omega_c)}{T_L(\Omega_r / \Omega)} \right)^2}, \quad (2.128)$$

gdzie: ε^2 - jak w (2.124).

Ograniczenia dla pasma zaporowego są podobne jak dla filtru I rodzaju, zatem rząd filtru jest również określony przez zależność (2.125). W tym przypadku, przeciwnie niż dla filtru I rodzaju, transmitancja ma zera oraz bieguny. Zera transmitancji filtru są rozmieszczone na osi urojonej i przyjmują następujące wartości [19]:

$$r_k = \frac{j\Omega_r}{\cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{2L}\right)}, \quad k = 0, 1, \dots, L-1, \quad (2.129)$$

podczas gdy bieguny stabilnego filtru $s_k = \vartheta_k + j\Theta_k$ dla $k = 0, 1, \dots, L-1$, przyjmują wartości

$$\vartheta_k = \frac{\Omega_r \sigma_k}{\sigma_k^2 + \Omega_k^2}, \quad \Theta_k = \frac{\Omega_r \Omega_k}{\sigma_k^2 + \Omega_k^2}, \quad (2.130)$$

gdzie: σ_k oraz Ω_k są określone podobnie jak dla filtru I rodzaju (2.126), przy czym:

$$\gamma = \left(\frac{1}{\delta_2} \left(1 + \sqrt{1 - \delta_2^2} \right) \right)^{\frac{1}{L}}.$$

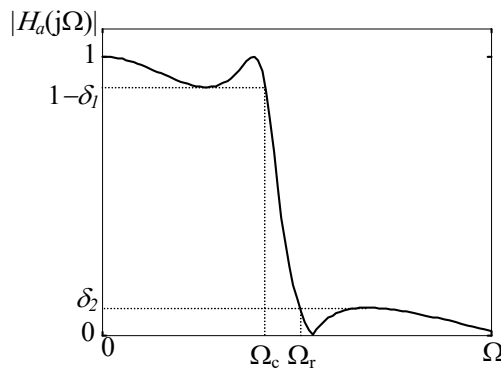
Funkcja przejścia tego filtru ma następującą postać [2]:

$$H_a(s) = H_0 \frac{\prod_{k=0}^{L-1} (s - r_k)}{\prod_{k=0}^{L-1} (s - s_k)}, \quad (2.131)$$

gdzie, w celu normalizacji charakterystyki, należy przyjąć:

$$H_0 = \prod_{k=0}^{L-1} \frac{s_k}{r_k}.$$

Należy zauważyć, że dzięki rezygnacji z wymogu monotoniczności części charakterystyki amplitudowej w filtrze Czebyszewa uzyskuje się bardziej strome niż w przypadku filtra Butterwortha, przejście pomiędzy



Rys. 2.30. Charakterystyka amplitudowa filtra eliptycznego

pasmem przepustowym i zaporowym. Z tego punktu widzenia jeszcze korzystniejszą charakterystykę można uzyskać rezygnując z monotoniczności charakterystyki w obu pasmach (zaporowym i przepustowym). Takie filtry nazywają się filtrami eliptycznymi (rys.2.30). Bliższe informacje na temat ich projektowania Czytelnik może znaleźć w bardziej zaawansowanej literaturze [2], [19].

Przekształcenie filtra analogowego w filtr cyfrowy

Kolejnym etapem syntezy filtra cyfrowego jest przekształcenie prototypowego filtra analogowego w jego odpowiednik cyfrowy. Oznacza to w tym przypadku przekształcenie transmitancji reprezentowanej w przestrzeni zespolonej s w przestrzeń zespoloną z . Można w tym celu zastosować jedną z metod przedstawionych w p. 2.2.4.

Projektowanie filtra cyfrowego z zastosowaniem przekształcenia dwuliniowego polega na użyciu transformacji (2.76) w odniesieniu do transmitancji prototypowego filtra analogowego. W celu uzyskania odpowiednich cech charakterystyk filtra w wybranych punktach częstotliwości (na przykład, ω_c oraz ω_r dla filtra dolnoprzepustowego), należy najpierw przetransformować wartości tych częstotliwości do przestrzeni ciągłej zgodnie z zależnością (2.77). W ten sposób przykładowe

częstotliwości filtru cyfrowego przyjmują odpowiednie wartości dla filtru ciągłego (Ω_c oraz Ω_r).

Przekształcenie dwuliniowe można także zastosować bezpośrednio do transmitancji filtru analogowego. Jeśli transmitancja prototypu analogowego ma następującą postać

$$H_a(s) = H_0 \frac{\prod_{m=0}^{M-1} (s - r_m)}{\prod_{l=0}^{L-1} (s - s_l)}, \quad (2.132)$$

to zastąpienie w (2.132) zmiennej s zgodnie z (2.76) prowadzi do następującej transmitancji filtru cyfrowego [11]

$$H(z) = h_0 (1 + z^{-1})^{L-M} \frac{\prod_{m=0}^{M-1} (1 - z_m z^{-1})}{\prod_{l=0}^{L-1} (1 - p_l z^{-1})}, \quad (2.133)$$

gdzie:

$$z_m = \frac{\alpha + r_m}{\alpha - r_m}, \quad p_l = \frac{\alpha + s_l}{\alpha - s_l}.$$

Współczynnik h_0 może być określony z transmitancji filtru dla zerowej częstotliwości: $\omega = \Omega = 0$.

Przekształcenie częstotliwości

Pokazana powyżej procedura przekształcenia dwuliniowego pozwala zaprojektować dolnoprzepustowy filtr cyfrowy na podstawie prototypu filtru analogowego. Inne rodzaje filtrów: górnoprzepustowy, pasmowozaporowy i pasmowoprzepustowy można uzyskać przez odpowiednie przekształcenie filtru dolnoprzepustowego. Pożądaną transformację funkcji przejścia można wykonać w odniesieniu zarówno do filtru analogowego, jak i cyfrowego.

Sposób przekształcenia analogowego filtru dolnoprzepustowego w filtr analogowy o odpowiedniej charakterystyce jest podany w Tablicy 2.2 [11]. Założono tam, że $H_a(s)$ jest transmitancją wyjściowego filtru analogowego, a częstotliwości ω_c , ω_l oraz ω_u odnoszą się do wynikowego filtru analogowego.

Zasady transformacji częstotliwości filtru dyskretnego są pokazane w Tablicy 2.3. Dolnoprzepustowy filtr o transmitancji $H(z)$ może być przekształcony w filtr górnoprzepustowy, środkowoprzepustowy lub

Tablica 2.2. Przekształcenie częstotliwości filtra analogowego

Typ projektowanego filtra	Przekształcenie
Dolnoprzepustowy $H_a(s')$, Ω_c - częstotliwość odcięcia projektowanego filtra	$s' = \frac{s}{\Omega_c}$
Górnoprzepustowy $H_a(s')$, Ω_c - częstotliwość odcięcia projektowanego filtra	$s' = \frac{\Omega_c}{s}$
Środkowoprzepustowy $H_a(s')$, Ω_l , Ω_u - dolna i górna częstotliwość odcięcia	$s' = \frac{s^2 + \Omega_l \Omega_u}{s(\Omega_u - \Omega_l)}$
Środkowozaporowy $H_a(s')$, Ω_l , Ω_u - dolna i górna częstotliwość odcięcia	$s' = \frac{s(\Omega_u - \Omega_l)}{s^2 + \Omega_l \Omega_u}$

środkowozaporowy o zadanych granicznych częstotliwościach przez zastąpienie zmiennej z^{-1} przez podaną funkcję. Wyprowadzenie tych związków można znaleźć w [2].

Gdy do przekształcenia filtra analogowego stosuje się przekształcenie dwuliniowe, to przekształcenie częstotliwości można przeprowadzić w odniesieniu do filtra analogowego lub cyfrowego [11]. Przekształcenia zawarte w Tablicach 2.2 oraz 2.3 pozwalają uzyskać dowolny filtr cyfrowy na podstawie prototypu dolnoprzepustowego filtra analogowego. Stanowią one podstawę komputerowych programów do projektowania filtrów cyfrowych NOI, które są stosowane w popularnych pakietach programowych [28].

Podsumowując, można podać następujący ogólny algorytm projektowania filtrów NOI

Algorytm 2.2. *Projektowanie filtrów NOI.*

- Zaprojektować prototyp analogowego filtra dolnoprzepustowego (wybrać odpowiedni typ filtra oraz szerokość pasma przepustowego określonego przez częstotliwość odcięcia Ω_c).
- Przekształcić filtr w celu uzyskania założonych właściwości widmowych (górnoprzepustowy, środkowoprzepustowy, środkowozaporowy) – zgodnie z Tablicą 2.2.
- Przekształcić transmitancję filtra do postaci cyfrowej - można skorzystać z przekształcenia dwuliniowego. □

Ostatnie dwa kroki algorytmu mogą być zamienione w zależności od tego, czy przekształcenie częstotliwości odbywa się w odniesieniu do

Tablica 2.3. Przekształcenie częstotliwości filtru cyfrowego

Typ projektowanego filtru	Przekształcenie	Parametry
Dolnoprzepustowy	$z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-1} - \beta}{1 - \beta z^{-1}}$	$\beta = \frac{\sin[T(\omega_c - \omega_c')/2]}{\sin[T(\omega_c + \omega_c')/2]}$
Górnoprzepustowy	$z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-1} - \beta}{1 - \beta z^{-1}}$	$\beta = \frac{\cos[T(\omega_c + \omega_c')/2]}{\cos[T(\omega_c - \omega_c')/2]}$
Środkowoprzepustowy	$z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-2} - \beta_1 z^{-1} - \beta_2}{\beta_2 z^{-2} - \beta_1 z^{-1} + 1}$	$\beta_1 = 2\gamma K / (K + 1)$ $\beta_2 = (K - 1) / (K + 1)$ $K = \operatorname{ctg} \frac{(\omega_u - \omega_l)T}{2} \operatorname{tg} \frac{\omega_c T}{2}$ $\gamma = \frac{\cos[T(\omega_u + \omega_l)/2]}{\cos[T(\omega_u - \omega_l)/2]}$
Środkowozaporowy	$z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-2} - \beta_1 z^{-1} - \beta_2}{\beta_2 z^{-2} - \beta_1 z^{-1} + 1}$	$\beta_1 = 2\gamma / (K + 1)$ $\beta_2 = (1 - K) / (1 + K)$ $K = \operatorname{tg} \frac{T(\omega_u - \omega_l)}{2} \operatorname{tg} \frac{\omega_c T}{2}$ $\gamma = \frac{\cos[T(\omega_u + \omega_l)/2]}{\cos[T(\omega_u - \omega_l)/2]}$
ω_c' - częstotliwość odcięcia; ω_l - dolna częstotliwość odcięcia; ω_u - górna częstotliwość odcięcia		

filtru analogowego, czy cyfrowego. Poniższy przykład ilustruje procedurę projektowania na przykładzie filtru dolnoprzepustowego i środkowoprzepustowego.

Przykład 2.11. Zaprojektować dolnoprzepustowy cyfrowy filtr Butterwortha, który spełnia następujące założenia:

- pasmo przepustowe zmienia się nie więcej niż o 1 dB dla częstotliwości mniejszej niż $f_p = 75 \text{ Hz}$,
- tłumienie w paśmie zaporowym jest większe niż 10 dB dla częstotliwości $f_r > 120 \text{ Hz}$,
- analogowy sygnał wejściowy jest próbkowany z częstotliwością $f_T = 2000 \text{ Hz}$.

Zgodnie z tym, okres próbkowania: $T = 1/f_T = 0,0005 \text{ s}$.

Następnie należy przekształcić wszystkie częstotliwości graniczne filtru cyfrowego: $\omega_p = 2\pi f_p$ oraz $\omega_r = 2\pi f_r$ do odpowiednich wielkości w dziedzinie czasu ciągłego. Określa to relacja (2.77), na podstawie której dla $\alpha = 1$:

$$\Omega_p = \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_p T}{2}\right) = 0,11835\text{s}^{-1}, \quad \Omega_r = \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_r T}{2}\right) = 0,19075\text{s}^{-1},$$

skąd można określić parametry filtra analogowego:

$$20\log_{10} |H_a(j\Omega)| \geq -1, \quad \text{dla } 0 \leq \Omega \leq \Omega_p,$$

$$20\log_{10} |H_a(j\Omega)| \geq -10, \quad \text{dla } \Omega \geq \Omega_r.$$

Rząd filtra można określić się na podstawie (2.118). Wielkość przedziału δ_2 dla powyższych danych jest zdefiniowana przez następujący związek:

$$20\log_{10} \delta_2 = -10, \quad \text{skąd otrzymuje się: } \delta_2 = 0,316.$$

Częstotliwość odcięcia Ω_c oraz rząd filtra L można określić na podstawie układu równań filtra dla dwóch znanych punktów:

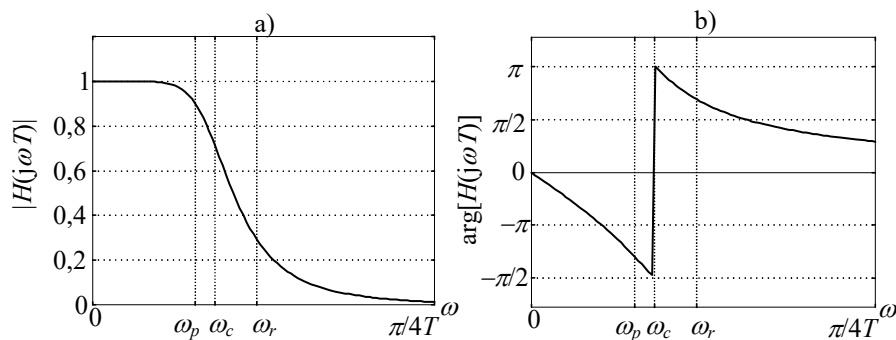
$$\frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2L}} = (0,891)^2, \quad \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_r}{\Omega_c}\right)^{2L}} = (0,316)^2,$$

gdzie: $0,891 = \delta_p$, co odpowiada wzmocnieniu filtra dla częstotliwości Ω_p :

$$20\log_{10} \delta_p = -1.$$

Rozwiązując te równania względem Ω_c oraz L otrzymuje się: $\Omega_c = 0,15906\text{s}^{-1}$ i $L = 3,719$. Ponieważ wartość L powinna być całkowita, więc uzyskany wynik należy zaokrąglić do najbliższej nie mniejszej wartości całkowitej, przyjmując $L = 2$. Bieguny filtra określa związek (2.120), skąd otrzymuje się następujące pary liczb: $s_{0,1} = -0,06087 \pm j0,14695$, $s_{2,3} = -0,14695 \pm j0,06087$.

Podstawiając te wartości do (2.121) uzyskuje się transmitancję prototypowego filtra analogowego:



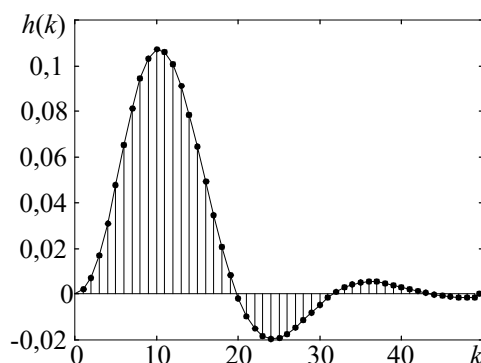
Rys. 2.31. Charakterystyka amplitudowa (a) oraz fazowa (b) dolnoprzepustowego filtra Butterwortha

$$H_a(s) = \frac{1}{1 + 16,429s + 134,952s^2 + 649,37s^3 + 1562,3s^4}$$

Stosując dwuliniowe przekształcenie (2.76) ze współczynnikiem $\alpha = 1$ otrzymuje się następującą postać transmitancji filtru cyfrowego

$$H(z) = \frac{(1 + 4z^{-1} + 6z^{-2} + 4z^{-3} + z^{-4})/3566,6}{1 - 3,2643z^{-1} + 4,0515z^{-2} - 2,2600z^{-3} + 0,4772z^{-4}}$$

Charakterystyki częstotliwościowe amplitudy i fazy uzyskanego filtru są pokazane na rys. 2.31, natomiast charakterystyka impulsowa – na rys. 2.32. Można zauważyć, że charakterystyka amplitudowa jest funkcją monotoniczną w całym przedziale zmian częstotliwości, co jest charakterystyczne dla tego typu filtru. □



Rys. 2.32. Odpowiedź impulsowa dolnoprzepustowego filtra Butterwotha

Przykład 2.12. Zaprojektować środkowoprzepustowy cyfrowy filtr Czebyszewa II rodzaju spełniający następujące założenia:

a) pasmo przepustowe jest stałe z tolerancją 1,5dB w zakresie $74\text{kHz} \leq f \leq 76\text{kHz}$,

b) pasmo zaporowe charakteryzuje się tłumieniem powyżej 15 dB dla zakresów częstotliwości $f_l \leq 65\text{kHz}$ oraz

$f_u \geq 85\text{kHz}$.

Wejściowy sygnał ciągły jest próbkowany z częstotliwością $f_T = 200\text{kHz}$, co odpowiada okresowi próbkowania $T = 0,5 \cdot 10^{-5}\text{s}$. Tego typu filtry są stosowane do separacji sygnału użytecznego od szumu w układach automatyki zabezpieczeniowej, których kryteria działania wykorzystują sygnał wysokiej częstotliwości generowany podczas zwarć w systemie elektroenergetycznym.

Charakterystyczne wartości częstotliwości filtru przeliczone na wielkości prędkości kątowej wynoszą:

- dolna częstotliwość odcięcia (granica pasma tłumiącego): $\omega_l = 2\pi \cdot 65000\text{ s}^{-1}$,

- górna częstotliwość odcięcia (granica pasma tłumiącego): $\omega_u = 2\pi \cdot 85000 \text{ s}^{-1}$,
- górna częstotliwość odcięcia pasma przepustowego: $\omega_c = 2\pi \cdot 76000 \text{ s}^{-1}$.

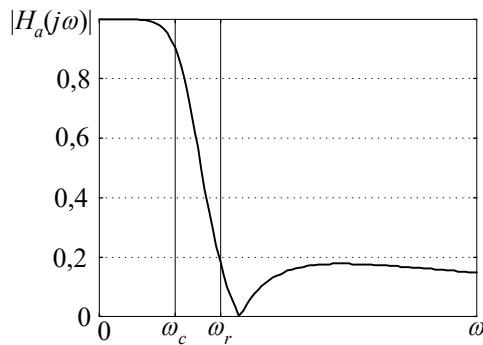
Najpierw należy zaprojektować filtr dolnoprzepustowy o tym samym paśmie przejściowym, jak w wymienionych danych. Odpowiednie częstotliwości powinny być przetransformowane do dziedziny filtru ciągłego. Jak i w poprzednim przykładzie przyjęto $\alpha = 1$, co prowadzi do następujących wielkości:

$$\Omega_l = \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_l T}{2}\right) = 1,6319 \text{ s}^{-1}, \quad \Omega_c = \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_c T}{2}\right) = 2,5257 \text{ s}^{-1}, \quad \Omega_u = \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_u T}{2}\right) = 4,1653 \text{ s}^{-1}.$$

Dolnoprzepustowy filtr analogowy powinien zatem spełniać następujące wymagania:

$$20 \log_{10} |H_a(j\Omega)| \geq -1,5 \quad \text{dla } 0 \leq \Omega \leq \Omega_c,$$

$$20 \log_{10} |H_a(j\Omega)| \geq -1,5 \quad \text{dla } \Omega \geq \Omega_u.$$



Rys.2.33. Charakterystyka amplitudowa analogowego prototypu filtru Czebyszewa I rodzaju

W przypadku filtru Czebyszewa II typu, jego rząd L określa się na podstawie (2.125). Wielkości δ_1 oraz δ_2 można obliczyć z następujących relacji:

$$20 \log_{10}(1 - \delta_1) = -1,5, \quad \text{co daje } \delta_1 = 0,1586, \quad \text{oraz}$$

$$20 \log_{10} \delta_2 = -15, \quad \text{skąd } \delta_2 = 0,1778.$$

Podstawienie tych wartości do (2.125) daje wynik $L \geq 2,6199$, a zatem należy przyjąć $L=3$.

Zera filtru (pierwiastki licznika) są określone na podstawie (2.129): pierwsza para: $r_{0,1} = \pm j4,8097$,

a trzeci pierwiastek r_2 przyjmuje wartość nieskończoną i należy go pominąć.

Podobnie, bieguny filtru (pierwiastki mianownika) obliczane są zgodnie z (2.130):

$$s_{0,1} = -1,2018 \pm j3,1241 \quad \text{oraz } s_2 = -4,6614.$$

Ostatecznie, transmitancja dolnoprzepustowego filtru analogowego przybiera następującą postać (2.131):

$$H_a(s) = \frac{1 + 0,0432s^2}{1 + 0,4291s + 0,1353s^2 + 0,0191s^3}.$$

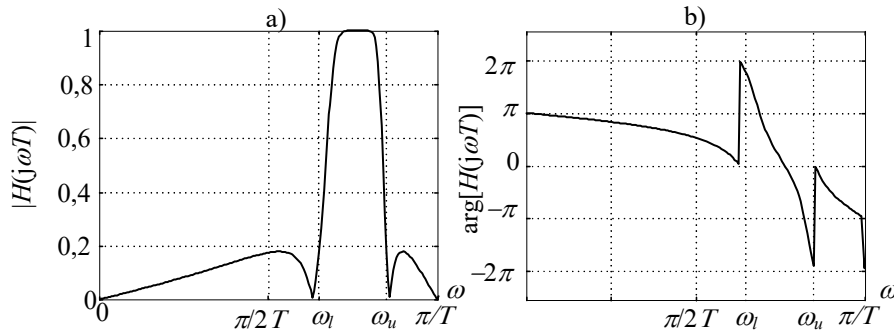
Charakterystyka amplitudowa tego filtru jest pokazana na rys. 2.33. Tym razem przekształcenie częstotliwości będzie prowadzone w odniesieniu do filtru analogowego. Stosując wzory z Tablicy 2.2 dla częstotliwości przepustowej Ω_l oraz Ω_u otrzymuje się następującą transmitancję analogowego filtru środkowoprzepustowego:

$$H_a(s) = \frac{63,445s + 30,420s^3 + 1,3732s^5}{314,04 + 198,53s + 194,95s^2 + 70,169s^3 + 28,681s^4 + 4,2972s^5 + s^6}.$$

Ostatecznie, stosując przekształcenie dwuliniowe w odniesieniu do powyższej transmitancji otrzymuje się funkcję przejścia projektowanego filtra cyfrowego

$$H(z) = \frac{(1 + 2,6070z^{-1} + 2,4447z^{-2} - 2,4447z^{-4} - 2,6070z^{-5} - z^{-6}) / 8,5251}{1 + 3,6809z^{-1} + 6,5366z^{-2} + 6,8940z^{-3} + 4,5564z^{-4} + 1,76655z^{-5} + 0,3273z^{-6}}.$$

Przebieg częstotliwościowej charakterystyki amplitudy i fazy uzyskanego filtra jest pokazany na rys. 2.34. Można zauważyć monotoniczny przebieg charakterystyki amplitudowej w paśmie przepustowym i występujące ekstrema lokalne w paśmie zaporowym, co jest charakterystyczne dla filtra Czebyszewa II rodzaju. Charakterystyka fazowa jest ogólnie nieliniowa. □



Rys. 2.34. Charakterystyka amplitudowa (a) oraz fazowa (b) cyfrowego środkowo-przepustowego filtra Czebyszewa II rodzaju

2.4 Korelacja cyfrowa

Korelacja $r_{xg}(n)$ pomiędzy dwoma dyskretnymi sygnałami $x(m)$ oraz $g(m)$ jest określona następującym związkiem:

$$r_{xg}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)g(m-n). \quad (2.134)$$

Przekształcenie to odgrywa bardzo ważną rolę w teorii procesów stochastycznych [5]. Jednak ze względu na bliskie powiązanie zależności (2.134) z podobną relacją odnoszącą się do dyskretnego splotu (2.85), korelacja cyfrowa jest również ważnym narzędziem cyfrowego przekształcania sygnałów i identyfikacji ich parametrów. Ten właśnie aspekt korelacji będzie przedmiotem dalszej analizy.

Jeśli sygnały $x(m)$ oraz $g(m)$ są okresowe z tym samym okresem M , to zależność (2.134) można zastąpić następującym równaniem [2]:

$$r_{xg}(n) = \sum_{m=0}^{M-1} x(m)g(m-n). \quad (2.135)$$

Gdy oba korelowane sygnały są równe: $x(m) = g(m)$, to operacja (2.135) jest nazywana *autokorelacją* i jest oznaczana przez $r_{xx}(n)$. Jeśli $x(m) \neq g(m)$, to mówi się o korelacji wzajemnej. Wynik korelacji (korelacji wzajemnej) okresowych sygnałów o okresie T_p jest także okresowy z tym samym okresem. W przeciwieństwie do autokorelacji, korelacja wzajemna zachowuje informację o przesunięciu fazowym pomiędzy korelowanymi sygnałami. Ponadto, wynik korelacji wzajemnej zawiera tylko te harmoniczne, które występują w obu korelowanych sygnałach.

Widać stąd, że korelacja ma wiele cech wspólnych z filtracją. W przekształceniu (2.134) sygnał $g(m)$ można traktować jako wzorzec interpolacyjny, a wynik korelacji $r_{xg}(n)$ jest ciągiem współczynników, które charakteryzują stopień podobieństwa pomiędzy przetwarzanym sygnałem $x(m)$ i wzorcem $g(m)$. Innymi słowy, ciąg $r_{xg}(n)$ daje szacunek, na ile model reprezentowany przez $g(m)$ jest zgodny z obserwowanymi danymi $x(m)$.

Rezultat korelacji (2.134) jest funkcją przesunięcia n . W zastosowaniach korelacji do cyfrowego przetwarzania sygnałów zazwyczaj przyjmuje się $n = 0$ i przekształcenie dokonywane jest na ostatnich M próbkach sygnału $x(k)$ i wzorca $g(k)$:

$$y(k) = \sum_{m=0}^{M-1} x(k-m)g(k-m) \quad (2.136)$$

lub

$$y(k) = \sum_{m=k-M+1}^k x(m)g(m), \quad (2.137)$$

co można zapisać w następującej postaci wektorowej

$$y(k) = \mathbf{x}^T(k)\mathbf{g}(k), \quad (2.138)$$

gdzie:

$$\mathbf{x}(k) = [x(k-M+1) \ x(k-M+2) \ \dots \ x(k)]^T,$$

$$\mathbf{g}(k) = [g(k-M+1) \ g(k-M+2) \ \dots \ g(k)]^T.$$

Zakłada się przy tym, że oba korelowane sygnały mają taką samą długość.

Podobnie jak w przypadku splotu, użyteczne formuły korelacji cyfrowej odnoszą się do skończonego ciągu próbek sygnału. Przedłużenie korelacji na pozostałe wyrazy analizowanego sygnału można wykonać na dwa sposoby, co jest pokazane na rys. 2.35. W pierwszym przypadku (rys. 2.35a) zakłada się, że przebieg wzorcowy (korelujący) jest sygnałem okresowym o tej samej długości co sygnał analizowany. Korelacja odbywa się w oknie o długości M próbek, które przesuwają się względem obu przebiegów. Odpowiada temu algorytm określony zależnościami (2.136)-(2.138).

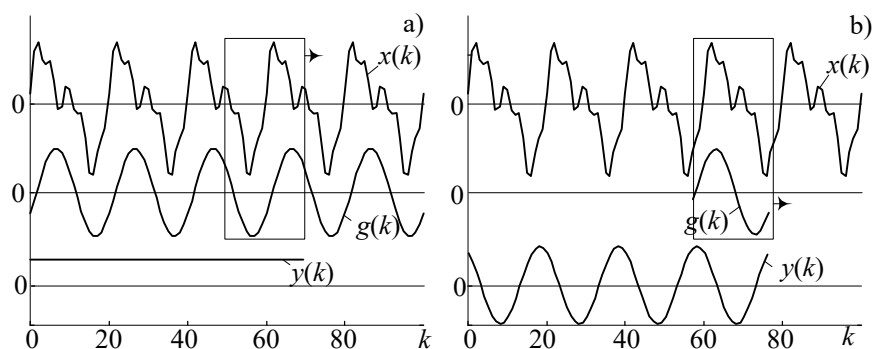
Natomiast w drugim przypadku (rys. 2.35b), wzorzec $g(m)$ jest ograniczony do M próbek rozmieszczonych w oknie pomiarowym, które przesuwają się względem sygnału $x(m)$ po każdorazowym wykonaniu operacji korelacji. Odpowiednia formuła przyjmuje wówczas następującą postać

$$y(k) = \sum_{m=0}^{M-1} x(k+m-M+1)g(m), \quad (2.139)$$

co w formie wektorowej jest określone równaniem

$$y(k) = \mathbf{x}^T(k)\mathbf{g}, \quad (2.140)$$

gdzie: $\mathbf{x}(k)$ - jak w (2.138),



Rys. 2.35. Ilustracja korelacji cyfrowej z dwoma różnymi sposobami przedłużenia przetwarzania na kolejne próbki

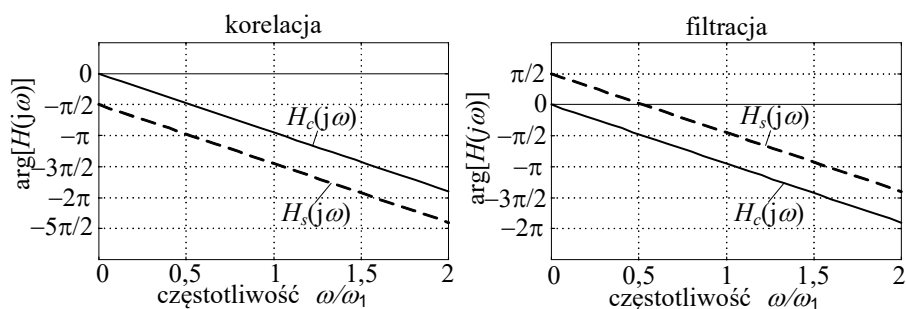
$$\mathbf{g} = [g(0)g(1)\dots g(M-1)]^T.$$

Można zauważyć, że algorytmy określone równaniami (2.136) oraz (2.139) dają rezultat w postaci sygnałów wyjściowych o całkowicie różnym charakterze (porównaj krzywe $y(k)$ na rys. 2.35 a i b). Stała wartość sygnału $y(k)$ na rys. 2.35a wynika z faktu, że podstawowa harmoniczna wzorcowego sygnału $g(k)$ i sygnału wejściowego $x(k)$ mają tę samą częstotliwość. Ponadto, długość okna pomiarowego jest równa okresowi podstawowej składowej i wszystkie harmoniczne są całkowicie wyeliminowane. W kolejnych pozycjach ślizgającego się względem obu przebiegów okna pomiarowego wynik korelacji jest taki sam, chociaż wzorec zawarty w kolejnych pozycjach okna zmienia się. W przeciwieństwie do tego, funkcja korelacyjna w algorytmie (2.139) jest stała w oknie pomiarowym (okno pomiarowe przesuwa się wraz z funkcją bazową), co jest charakterystyczne również dla filtracji (splotu).

Łatwo zauważyć, że DPF (2.18) jest także określane przez operację korelacji, a jego wynik (zbiór zespolonych amplitud przebiegu) można rozpatrywać jako ciąg współczynników korelacji pomiędzy sygnałem a poszczególnymi harmonicznymi funkcjami.

Konsekwencje stosowania korelacji w miejsce operacji splotu (filtracji), gdy w charakterze wzorca użyte zostaną te same funkcje: $g(m) = h(m)$, można zbadać przez porównanie zależności odpowiadającej korelacji (2.139) oraz filtracji (2.93).

Transmitancja filtru SOI jest określona wzorami (2.95) oraz (2.96), natomiast zastosowanie przekształcenia \mathcal{Z} w odniesieniu do (2.139) prowadzi do następującej widmowej postaci transmitancji korelacji:



Rys. 2.36. Argumenty przetwornika korelacyjnego i filtracyjnego dla jednakowych funkcji bazowych: sinusoidy - $H_s(j\omega)$ oraz kosinusoidy $H_c(j\omega)$ symetrycznie umieszczone w jednookresowym oknie pomiarowym

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = e^{-j\omega T(M-1)} \sum_{m=0}^{M-1} g(m)e^{jm\omega T}. \quad (2.141)$$

Porównując (2.96) oraz (2.141) można zauważyć, że dla $g(m) = h(m)$ charakterystyki amplitudowe obu przekształceń są jednakowe, natomiast różne są charakterystyki fazowe. Na rys. 2.36 pokazane są charakterystyki fazowe filtrów i algorytmów korelacyjnych dla przypadku, gdy w charakterze funkcji bazowych wybrano symetrycznie rozmieszczone w oknie pomiarowym funkcje kosinus oraz sinus. Można zauważyć, że rezultat splotu z funkcją sinus wyprzedza o kąt $\pi/2$ wynik splotu z funkcją kosinus, przy czym fazy obu transmitancji liniowo maleją wraz ze wzrostem częstotliwości.

Nieco inny obraz charakterystyki fazowej występuje w przypadku korelacji. Rezultat korelacji z funkcją sinus daje sygnał, który tym razem opóźnia o kąt $\pi/2$ wynik korelacji z funkcją kosinus. Związki te obowiązują niezależnie od tego, który z rozważanych algorytmów korelacyjnych zostanie użyty: ze ślizgającym się oknem (2.136), czy z przesuwaną się funkcją okna (2.139).

Widać stąd, że stosowanie algorytmu korelacyjnego z punktu widzenia charakterystyki amplitudowej jest równoważne użyciu filtru SOI o tej samej funkcji bazowej (funkcji impulsowej). Co więcej, projektowanie obu algorytmów jest takie same. Natomiast wskazane różnice należy uwzględnić przy projektowaniu estymatorów sygnału zespolonego tak, aby uzyskać poprawne przesunięcie fazowe pomiędzy składową rzeczywistą i urojoną.

W dalszej części, przy opisie sposobów pomiaru wielkości elektrycznych, będzie pokazane, że użycie metody korelacyjnej może prowadzić do istotnego uproszczenia algorytmu obliczeniowego.

2.5 Transformacja czasowo-częstotliwościowa

Celem analizy sygnałów jest wydobycie z nich określonej użytecznej informacji poprzez ich transformację (przekształcenie). Jak już wspomniano na początku bieżącego rozdziału, przekształcenie Fouriera podaje sposób określenia parametrów częstotliwościowych sygnału danego w postaci przebiegu czasowego i odwrotnie. Ogólna postać tego przekształcenia ma znane ograniczenia praktyczne: dokładna informacja o widmie sygnału jest możliwa tylko wtedy, gdy znany jest jego przebieg w nieograniczonym przedziale czasowym. Zakłada się przy tym, że sygnał jest

stacjonarny (niezmienny w czasie^{*}). Zmiana stanu sygnału jest uśredniona w wyjściowym widmie, a informacja o czasie jej wystąpienia zostaje bezpowrotnie utracona. Używane jest tutaj pojęcie *rozdzielczości sygnału* w dziedzinie czasu i częstotliwości. Z definicji, przekształcenie Fouriera charakteryzuje się nieskończenie ostrą lokalizacją w dziedzinie częstotliwości i zupełnym brakiem odniesienia do czasu wystąpienia zdarzenia. Dla ilustracji relacji czas-częstotliwość przytacza się często przykład odwrotnej bazy odniesienia: funkcja Diraca opisująca proces próbkowania ma właściwość dokładnego usytuowania w czasie, natomiast jej widmo jest równomiernie rozłożone na całej osi częstotliwości (2.29), co oznacza, że na podstawie pojedynczej próbki nic nie można powiedzieć na temat częstotliwości obserwowanego sygnału. Ten dylemat ma swoje fizyczne uzasadnienie w znanej zasadzie nieoznaczoności Heisenberga [3], [8].

Stosowane w praktyce metody przekształcenia Fouriera w ograniczonym przedziale (na przykład DPF) również niewiele tu zmieniają, gdyż informacja o stanie sygnału w oknie pomiarowym jest także uśredniana w procesie transformacji. Tymczasem, w wielu praktycznych zagadnieniach właśnie stan przejściowy sygnału niesie ważną informację z punktu widzenia celu jego przetwarzania i wykorzystania. W takim przypadku, próba wydobycia z obserwowanego sygnału tylko wiedzy na temat jego widma ma ograniczone znaczenie, gdyż wówczas straci się informację o czasie wystąpienia zakłócenia oraz jego rozwoju. Praktyczne rozwiązania opierają się na poszukiwaniu kompromisu pomiędzy dokładnością określenia widma sygnału, a dokładnością oszacowania jego parametrów dynamicznych (przede wszystkim – czasu wystąpienia określonego zdarzenia). Dotyczy to oczywiście tych metod przetwarzania sygnału, w których wykorzystuje się jakieś elementy jego charakterystyki częstotliwościowej, na przykład, amplitudę określonej harmonicznej.

Zagadnienia powiązania informacji o czasie wystąpienia określonej zmiany sygnału oraz jego widmie są przedmiotem teorii przekształceń czasowo-częstotliwościowych. Głównym nurtem tej teorii są zagadnienia związane z *Przekształceniem Falkowym* (PF) (ang. *Wavelet Transform* – WT) [3], [26]. Teoretyczne podstawy tego przekształcenia zostały sformułowane w latach osiemdziesiątych ubiegłego wieku, a praktyczne jego wykorzystanie ma swoją historię niewiele dłuższą od dziesięciu lat [3], [35]. Od kilku lat jest również przedmiotem zainteresowania projektantów

^{*} Określenia: ‘stacjonarny’ oraz ‘niezmienny w czasie’ są tu użyte w popularnym, niezbyt precyzyjnym znaczeniu. Dokładne wyjaśnienie stacjonarności sygnału można znaleźć w pracach [22], [30].

algorytmów pomiarowych i decyzyjnych stosowanych w automatyce elektroenergetycznej. Przedstawiony poniżej materiał jest jedynie krótkim wprowadzeniem w problematykę transformacji falkowej. Czytelnika zainteresowanego pogłębieniem tego zagadnienia odsyłamy do literatury, której główne pozycje na ten temat podane są w zakończeniu rozdziału.

2.5.1 Krótkoczasowe przekształcenie Fouriera

Pierwszym podejściem do rozwiązania problemu analizy sygnałów niestacjonarnych jest odpowiednia modyfikacja przekształcenia Fouriera. Polega ona na podzieleniu obserwowanego sygnału na przedziały, określone przez długości odpowiednich okien czasowych, w których rozpatrywany sygnał może być uznany za stacjonarny [26]. W celu bliższej analizy zakłada się niestacjonarny sygnał $x(t)$, który można uważać za stacjonarny w przedziałach o długości określonej przez funkcję okna $w(t)$, przy czym, $w(t) = 0$ dla $t < 0$ oraz $t > t_w$. Transformacja Fouriera funkcji określonej przez iloczyn $x(t)w(t - \tau)$:

$$X_w(j\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)w(t - \tau)e^{-j\omega t} dt, \quad (2.142)$$

gdzie: τ jest czasem określonym względem środka okna $w(t)$ i zmienia się w granicach wyznaczonych przez zakres przetwarzania,

nazywa się *Krótkoczasową Transformatą Fouriera* (KTF) (ang. *Short-Time Fourier Transform - STFT*). Używane jest też określenie: *okienkowe przekształcenie Fouriera* (ang. *windowed Fourier transform*). Transformata (2.142) przekształca sygnał z dziedziny czasu do dwuwymiarowej przestrzeni czas-częstotliwość (ω, t). Rezultat tego przekształcenia w dużym stopniu zależy od wyboru funkcji okna $w(t)$ - jej długości oraz kształtu.

Dyskretna postać przekształcenia (2.142) ma następującą formę:

$$X_w(n, m) = \sum_{k=0}^{M-1} x(k)w(k - m)e^{-jank}, \quad (2.143)$$

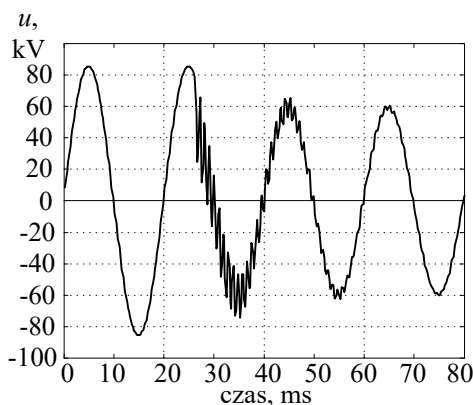
gdzie: a jest kątem pomiędzy kolejnymi próbkami, M - liczba próbek w oknie $w(k)$.

W najprostszym przypadku okno jest określone przez funkcję prostokątną (2.69). Należy zauważyć, że zmienna n w (2.143) odnosi się do częstotliwości (numer harmonicznej w odniesieniu do długości okna jako okresu składowej podstawowej), natomiast indeks m wskazuje na czas

(numer okna w sekwencji przetwarzania). Zależność czas-częstotliwość związana z tym przekształceniem ilustruje poniższy przykład.

Przykład 2.13. Przebieg napięcia podczas zwarcia w linii 110 kV został zarejestrowany z częstotliwością 5 kHz (rys. 2.37). Określić krótkookresowe dyskretne transformaty Fouriera tego przebiegu dla pełno- i półokresowego okna prostokątnego.

Liczba próbek w oknie przy podanej częstotliwości próbkowania dla okna pełnookresowego wynosi: $M = 100$. W tym przypadku transformatą (2.143) jest

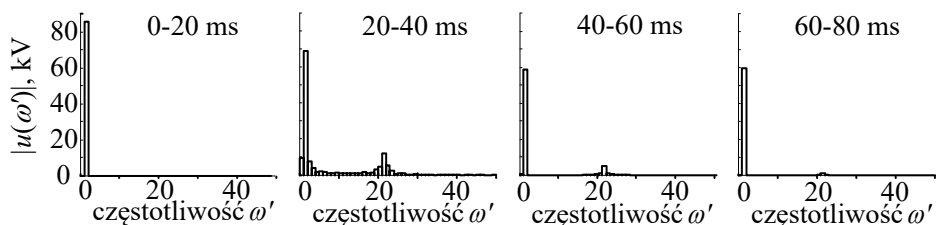


Rys. 2.37. Przebieg napięcia fazowego linii podczas zwarcia

identyczna z DPF. Zarejestrowany przebieg mieści się w czterech okresach napięcia, a więc indeks m w (2.143) przyjmuje kolejne wartości $m = 1, 2, 3, 2$. Wynik przetwarzania jest pokazany na rys. 2.38. Otrzymuje się informację o wartościach zespolonych amplitud 25 harmonicznym, co daje rozdzielczość częstotliwości $\Delta f = 50$ Hz (częstotliwość Nyquista $f_N = 2500$ Hz). Rozdzielczość czasowa jest ograniczona przez długość okna i wynosi $T = 20$ ms. Stan przejściowy obserwowany w przebiegu napięcia

uwidacznia się w postaci wyższych harmonicznym w kolejnych oknach przetwarzania. Fakt ten można wykorzystać do określenia momentu wystąpienia zakłócenia, jednak wynik będzie obciążony błędem rozdzielczości czasowej metody.

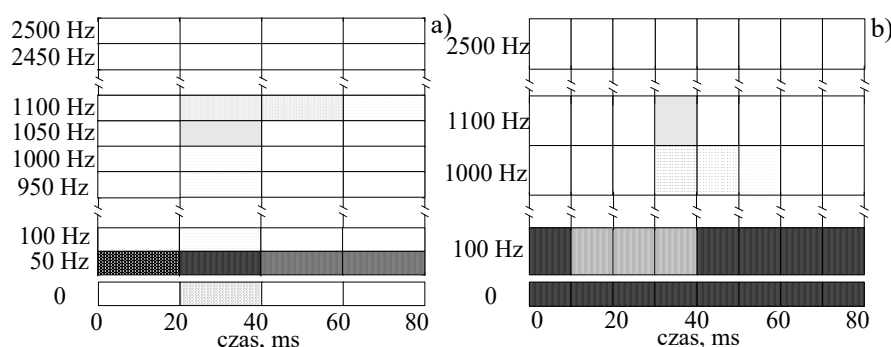
Dokonując z kolei transformacji z oknem półokresowym ($M = 50$, $T = 10$ ms) otrzymuje się możliwość dokładniejszej oceny czasowej zdarzenia, tym razem jednak rozdzielczość częstotliwościowa wyniesie $\Delta f = 1/T = 100$ Hz. Porównanie rezultatów obu transformacji jest pokazane na rys. 2.39. Intensywność



Rys. 2.38. Histogramy jednookresowego DPF w kolejnych okresach przebiegu

cieniowania wskazuje na wartość amplitudy związanej z danym prostokątem. Widać, że zwiększenie rozdzielczości czasowej odbywa się zawsze kosztem zmniejszenia rozdzielczości czasowej i odwrotnie. □

Prostokąty na płaszczyźnie czas-częstotliwość (zwane też kostkami Heisenberga [3]) mają tę właściwość, że przy zmianie długości okna przetwarzania ich powierzchnia pozostaje stała: zwiększenie rozdzielczości czasowej prowadzi do zmniejszenia rozdzielczości w dziedzinie często-



Rys. 2.39. Wynik przetwarzania za pomocą KTF sygnału z rys. 2.37: pełnokresowe (a) i półokresowe (b) okno przetwarzania

tliwości, i odwrotnie (jednorozdzielcza reprezentacja sygnału). Istotną cechą KTF jest jednakowa rozdzielczość na całej osi częstotliwości. Jest to wyraźna rozrzutność w sensie wykorzystania informacji zawartej w zarejestrowanym przebiegu: do identyfikacji parametrów wysokiej harmonicznej nie ma potrzeby stosowania okna o tej samej długości, co w odniesieniu do pierwszej harmonicznej. Zagadnienie to stało się podstawą rozwoju teorii transformacji falkowej.

2.5.2 Przekształcenie falkowe

Transformata falkowa funkcji $x(t)$, podobnie jak krótkoczasowa transformata Fouriera, jest określona za pomocą przekształcenia całkowego z funkcją bazową ograniczoną przez okno przetwarzania [3], [26]

$$CWx(p, \tau) = \frac{1}{\sqrt{p}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi^* \left(\frac{t - \tau}{p} \right) dt, \quad (2.144)$$

gdzie: p jest współczynnikiem skali, natomiast τ - przesunięciem; * oznacza sprzężenie funkcji zespolonej. Wielkość $1/\sqrt{p}$ jest współczynnikiem skalującym w celu zachowania odpowiednich relacji energetycznych. Jest to tak zwana *Ciągła Transformata Falkowa* (CTW) (ang. *Continuous Wavelet Transform* - CWT).

Można zauważyć, że funkcja $\psi_{p\tau}(t)$ w (2.144) pełni tę samą rolę, co wyrażenie $w(t-\tau)e^{j\omega t}$ w KTF (2.142). Współczynnik p służy do zmiany skali (rozdzielczości) przekształcenia, co jest istotnym wyróżnikiem transformaty falkowej.

Przekształcenie (2.144) jest znane jako ciągła (stąd pierwsza litera C) transformata falkowa. Funkcje

$$\psi_{p\tau}(t) = \psi\left(\frac{t-\tau}{p}\right), \quad (2.145)$$

są nazywane falkami, przy czym $\psi_{10}(t)$ jest falką podstawową (macierzystą) [3], [8]. W odróżnieniu od transformaty Fouriera, przekształcenie falkowe jest skalowane względem czasu i częstotliwości za pomocą współczynnika skali p . Jeśli funkcji $\psi(t)$ odpowiada na płaszczyźnie czas-częstotliwość prostokąt o rozdzielczości określonej współrzędnymi $(\Delta t, \Delta \omega)$, to dla funkcji $\psi_p(t) = \psi(t/p)/\sqrt{p}$ ten prostokąt będzie miał współrzędne $(p\Delta t, \Delta \omega/p)$. Zatem, przez wybór skali istnieje możliwość zmiany rozdzielczości przekształcenia względem czasu i częstotliwości.

Oryginalny sygnał $x(t)$ może być odtworzony w wyniku odwrotnego ciągłego przekształcenia falkowego określonego następująco:

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} CWx(p, \tau) \psi\left(\frac{t-\tau}{p}\right) \frac{dp d\tau}{p^2}, \quad (2.146)$$

gdzie: C_ψ jest stałą normalizującą [3].

Istnienie pary przekształceń (2.144), (2.146) uzależnione jest od odpowiednich właściwości funkcji bazowych $\psi_{p\tau}(t)$. Ogólnie biorąc, powinny to być funkcje oscylacyjne, ograniczone w czasie i tłumione na granicach przedziału - stąd nazwa tych funkcji (falki) [3], [29]. Rodzina falek charakteryzuje się wspólnym kształtem, a poszczególne jej reprezentacje różnią się skalą i przesunięciem. Transformacja (2.144) przedstawia korelację analizowanej funkcji $x(t)$ z odpowiednimi falkami, czego rezultatem jest funkcja określająca stopień ich podobieństwa. Można zatem oczekiwać,

że w wyniku transformacji (2.144) z zastosowaniem całej rodziny falek, rozpatrywany sygnał zostanie rozłożony na składowe falki, które po dodaniu zgodnie z (2.146), złożą się na oryginalny sygnał [26]. Prowadzi to do tak zwanej reprezentacji sygnału w postaci rozwinięć falkowych [3]. W zależności od wyboru falek w przekształceniu (2.144), funkcje $CWx(\tau, p)$ reprezentują różne specyficzne cechy sygnału, co może stanowić podstawę jego analizy. W praktycznych realizacjach wykorzystuje się również fakt, że przekształcenie (2.144) dla ustalonej skali p jest filtrem, którego funkcja impulsowa jest określona przez odpowiednią funkcję falkową. Z przeprowadzonej dyskusji wynika, że powinien to być filtr środkowoprzepustowy, którego częstotliwość środkowa związana jest ze współczynnikiem skali p . Zakres zmian skali powinien pokrywać całe widmo analizowanego sygnału.

Aby bliżej powiązać parametry funkcji $\psi_{p\tau}(t)$: p - współczynnik skali oraz τ - przesunięcie, z właściwościami uzyskanych składowych należy zauważyć, że:

- duże wartości parametru p ($p \gg 1$) odpowiadają wolnozmiennym funkcjom bazowym $\psi_{p\tau}(t)$ o szerokim oknie, a więc, przez analogię do przekształcenia Fouriera, odpowiadające im składowe będą charakteryzować również wolnozmiennie cechy sygnału;
- małe wartości współczynnika skali p ($0 < p < 1$) prowadzą do szybkozmiennych falek $\psi_{p\tau}(t)$ mieszczących się w wąskich oknach, co daje możliwość identyfikacji gwałtownych zmian w przetwarzanym sygnale zarówno co do czasu ich wystąpienia (wąskie okno), jak i intensywności procesu (duża częstotliwość funkcji bazowej);
- przesunięcie τ pozwala na dobrą lokalizację danego zdarzenia w czasie.

Wzajemną zależność skali i częstotliwości falki ilustruje poniższy przykład.

Przykład 2.14. Właściwości czasowe i częstotliwościowe falki Morleta.

Falka Morleta przedstawia funkcję harmoniczną modulowaną krzywą Gaussa [31]:

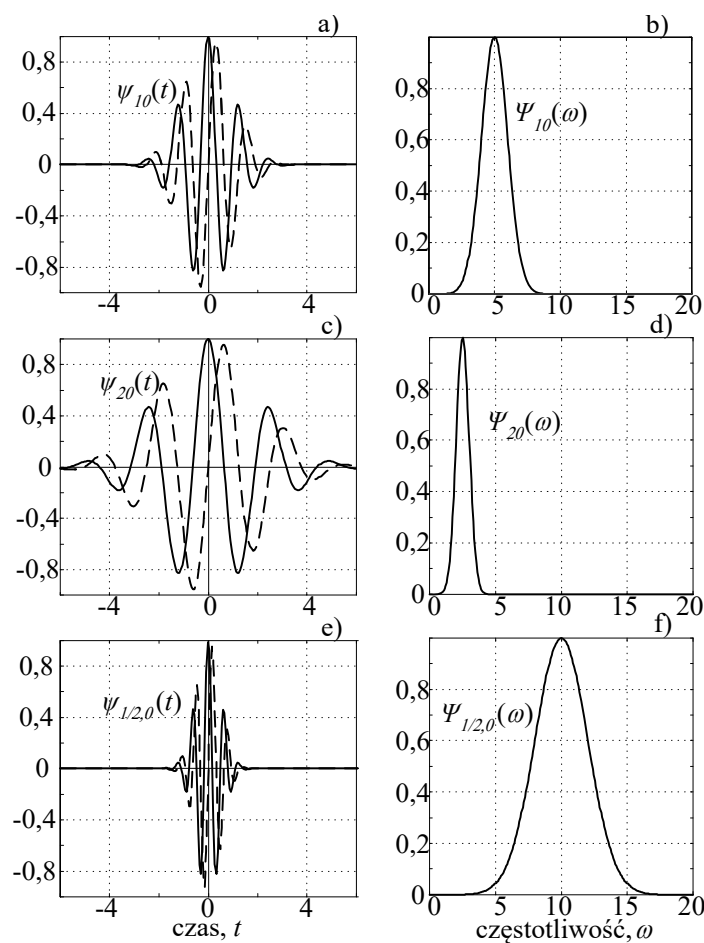
$$\psi_{p\tau}(t) = e^{-x^2/2} e^{j\omega_0 x}, \text{ gdzie } x = \frac{t - \tau}{p}.$$

Odpowiednie przekształcenie falkowe jest w tym przypadku bardzo bliskie przekształceniu Fouriera, z tym, że funkcja bazowa jest tłumiona przez obwiednię w kształcie dzwonu. Transformata Fouriera tej falki ma następującą postać:

$$\mathcal{F}\{\psi_{p\tau}(t)\} = \Psi(j\omega) = e^{-(p\omega - \omega_0)^2 / 2} e^{-j\omega\tau}$$

Przebiegi falek Morleta oraz ich widma dla wartości skali $p = 1, 2$ i $0,5$ ($\tau = 0$) są pokazane na rys. 2.40. Przyjęto wartość pulsacji podstawowej $\omega_0 = 5$. Widać, że częstotliwość falki jest odwrotnie proporcjonalna do wartości skali. □

W przeciwieństwie do KPF, w którym stosuje się okna o jednakowej



Rys. 2.40. Falka Morleta i jej widmo częstotliwościowe dla różnych wartości skali: $p = 1$ (a,b), $p = 2$ (c,d), $p = 0,5$ (e,f); linia przerywana: składowa urojona falki

szerokości (funkcja bazowa wypełnia całe okno), w przekształceniu falkowym wąskie okno jest związane z falką o dużej częstotliwości i w miarę wzrostu skali p rozszerza się również okno pomiarowe. Jest to zgodne z

wymogiem zachowania względnej rozdzielczości przekształcenia względem częstotliwości:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = c, \quad (2.147)$$

gdzie: c jest stałą, $\Delta\omega$ określa rozdzielczość sygnału o pulsacji ω .

Warunek (2.147) prowadzi do logarytmicznej skali częstotliwości na płaszczyźnie czas-częstotliwość, co związane jest ze wspomnianą już zmianą boku $\Delta\omega$ prostokąta $(\Delta t, \Delta\omega)$ wzdłuż osi częstotliwości.

Relacja (2.147) sprawia, że w przekształceniu falkowym częstotliwość traci swoje centralne miejsce jako parametr charakteryzujący właściwości analizowanego sygnału. Jeśli założyć, że macierzysta falka jest reprezentowana przez funkcję o częstotliwości środkowej f_0 , to kolejne przeskalowane falki mają częstotliwość $f = f_0 / p$. Wynikające stąd składowe przekształcenia falkowego wygodnie jest identyfikować przez wartość skali p , zamiast podawać lokalną częstotliwość f . Jest to tym bardziej uzasadnione, że falki niekoniecznie muszą być reprezentowane przez regularne funkcje o wyraźnych cechach sygnału harmonicznego. Zatem, w miejsce określenia: charakterystyka czasowo-częstotliwościowa (spektrogram), odnoszącego się do przekształcenia Fouriera (krótkoczasowego), w analizie falkowej stosuje się pojęcie charakterystyki skalowo-czasowej (skalogramu) [3], [26].

W analizowanym powyżej ciągłym przekształceniu falkowym zakłada się, że parametry przekształcenia: skala p oraz przesunięcie τ są funkcjami ciągłymi. W przypadku, gdy skala p falki oraz przesunięcie τ są funkcjami dyskretnymi, przekształcenie (2.144) wyznacza tak zwaną *Dyskretną Transformację Falkową* (DTF) (ang. *Discrete Wavelet Transform - DWT*) - przez analogię z podobnym dyskretnym przekształceniem Fouriera (DPF). Wygodnie jest w takim przypadku przyjąć, że skala p ulega zmianie (jest próbkowana) z krotnością 2. Niech p_0 oznacza skalę falki podstawowej: $p_0 = 1 = 2^0$. Wówczas $p_1 = 2$ i ogólnie:

$$p_j = 2^j. \quad (2.148)$$

Jeśli przyjąć, że indeks n oznacza liczbę przedziałów (próbek) elementarnego przesunięcia τ_0 , to zmiana skali pociąga za sobą również zmianę kroku przesunięcia: $\tau_n = 2^j n \tau_0$. Zatem, zależność (2.145) można zapisać w następującej formie:

$$\psi_{jn}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - n\tau_0), \quad (2.149)$$

co przy założeniu, że czas t oraz przesunięcie n są liczone względem okresu τ_0 , daje następującą relację:

$$\psi_{jn}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - n), \quad (2.150)$$

gdzie: $\psi(t) = \psi_{00}(t)$ jest falką podstawową.

Zmiana skali zgodnie z (2.148) oznacza również zmianę próbkowania częstotliwości na płaszczyźnie czas-częstotliwość w stopniu określonym przez odpowiednią potęgę liczby 2. Jest to tak zwane *próbkowanie diadyczne* [3]. Prowadzi ono do zmiany częstotliwości środkowej widma sąsiedniej skali o oktawę.

Przekształcenie (2.144) w warunkach próbkowania skali p i przesunięcia τ przyjmuje następującą postać:

$$CWx(p_j, \tau_n) = DWx_{jn} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi_{jn}^*(t) dt. \quad (2.151)$$

Przetwarzany sygnał można zrekonstruować bez straty informacji (jeśli wybrana falka podstawowa spełnia określone warunki [3], [8]) przez wżone sumowanie uzyskanych współczynników DWx_{jn} :

$$x(t) = \sum_j \sum_n DWx_{jn} \psi_{jn}(t). \quad (2.152)$$

Powyższa operacja nazywa się odwrotnym dyskretnym przekształceniem falkowym.

Należy zauważyć, że zarówno w prostym (2.151), jak i w odwrotnym (2.152) dyskretnym przekształceniu falkowym analizowana funkcja oraz stosowne falki są ciągłe względem czasu. W praktyce oznacza to, że próbkowanie analizowanego sygnału w czasie jest niezależne od sposobu dyskretyzacji skali oraz przesunięcia. W zastosowaniach komputerowych operację całkowania (2.151) można zastąpić odpowiednią formułą numeryczną. Granice sumowania są w rzeczywistości ograniczone do przedziałów (okien) niezerowych wartości falki $\psi_{jn}(t)$. Prowadzi to do następującego równania określającego praktyczną postać dyskretnej transformaty falkowej:

$$DWx_{jn} = \sum_{k=0}^{M-1} x(k) \psi_{jn}^*(k), \quad (2.153)$$

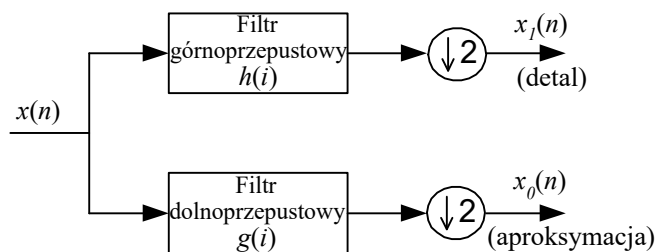
gdzie: $\psi_{jn}(k) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}k - n)$, przy czym $kT = t_k$, T - okres próbkowania sygnału $x(t)$, M - liczba próbek określona przez granice występowania falki $\psi_{jn}(k)$.

Dyskretna transformata falkowa różni się od transformaty ciągłej występowaniem wyraźnych progów rozdzielczości na płaszczyźnie czas-częstotliwość, które wynikają z próbkowania skali i dyskretnego przesunięcia. W tym sensie, w odniesieniu do tej transformacji stosuje się także określenie: *wielorozdzielcza analiza falkowa* [3].

Zaletą DTF jest możliwość utworzenia efektywnych algorytmów numerycznego wyznaczania współczynników rozkładu falkowego. Wykorzystuje się tu fakt, że w każdym etapie analizy wielorozdzielczej (dla określonej dyskretnej wartości współczynnika skali) sygnał może być rozdzielony na dwie składowe, których pasma częstotliwości zajmują dokładnie połowę (odpowiednio górną i dolną) danego n -tego stopnia rozdzielczości $\Delta\omega_n$. Składowe te można uzyskać przez zastosowanie filtracji, odpowiednio, górno- i dolnoprzepustowej oraz operacji próbkowania sygnału w stosunku 2 ($\downarrow 2$) (przez wybranie tylko próbek parzystych) (rys. 2.41). Sygnał $x_0(n)$ na wyjściu filtra dolnoprzepustowego jest wygładzoną (aprosymowaną) wersją sygnału wejściowego, natomiast sygnał $x_1(n)$ na wyjściu filtra górnoprzepustowego zawiera szczegóły (detale), które dopełniają aproksymację. Oba te sygnały są wynikiem następującej filtracji sygnału wejściowego $x(n)$:

$$\begin{aligned} x_1(n) &= \sum_k h(2n-k)x(k), \\ x_0(n) &= \sum_k g(2n-k)x(k), \end{aligned} \quad (2.154)$$

gdzie: $h(2n-k)$ przedstawia funkcję impulsową filtra górnoprzepustowego, a $g(2n-k)$ - filtr dolnoprzepustowego.



Rys. 2.41. Schemat jednostopniowego prostego dyskretnego przekształcenia falkowego

Filtry o funkcjach impulsowych spełniających powyższe warunki nazywają się *sprzężonymi filtrami lustrzanymi* [3]. Pomiedzy współczynnikami tych filtrów zachodzi następujący związek [3], [26]:

$$h(L-1-k) = (-1)^k g(k), \quad (2.155)$$

gdzie: $L = 2M$ jest liczbą określającą szerokość okna filtru, M - rząd falki.

Należy zauważyć, że zmiana znaku co drugiej próbki funkcji impulsowej rzeczywiście przekształca filtr z dolnoprzepustowego w górnoprzepustowy i odwrotnie. Mogą być tu także stosowane filtry o innych właściwościach [8], [29].

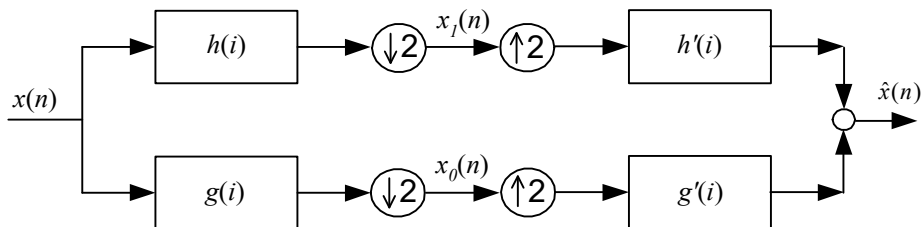
Warunkiem poprawności powyższego algorytmu jest możliwość odtworzenia sygnału oryginalnego $x(t)$ na podstawie jego składowych: detalu $x_1(n)$ oraz aproksymacji $x_0(n)$. Proces rekonstrukcji (syntezy) sygnału wejściowego jest określony następującym równaniem (rys.2.42):

$$\hat{x}(k) = \sum_l h'(l-2k)x_1(l) + \sum_l g'(l-2k)x_0(l), \quad (2.156)$$

co oznacza, że ciągi $x_1(n)$ oraz $x_0(n)$ należy uzupełnić przez wstawienie zerowych wyrazów pomiędzy wartości oryginalne (operacja $\uparrow 2$) i dokonać splotu z odpowiednimi funkcjami $h'(l-2k)$ oraz $g'(l-2k)$. Funkcje te można utworzyć z oryginalnych funkcji impulsowych stosowanych w analizie (2.154), przez wykonanie następujących operacji [29]:

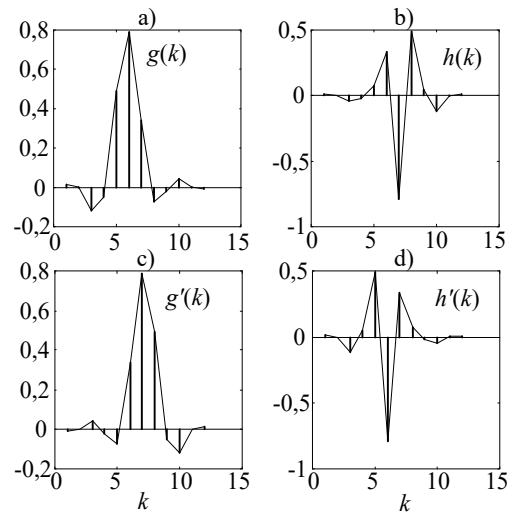
$$\begin{aligned} g'(k) &= (-1)^{k+1} h(k), \quad k = 0, \dots, L-1 \\ h'(k) &= (-1)^k g(k) \end{aligned} \quad (2.157)$$

przy czym należy uwzględnić fakt, że przetwarzany sygnał jest 'dziurawy' po dodaniu zer (jego energia jest dwukrotnie mniejsza po tej operacji). Zależność pomiędzy współczynnikami filtrów analizy (2.155) oraz



Rys. 2.42. Schemat jednostopniowego prostego i odwrotnego dyskretnego przekształcenia falkowego

syntezy (2.157) jest pokazana na rys. 2.43 na przykładzie falki Symmlet 6 rzędu.

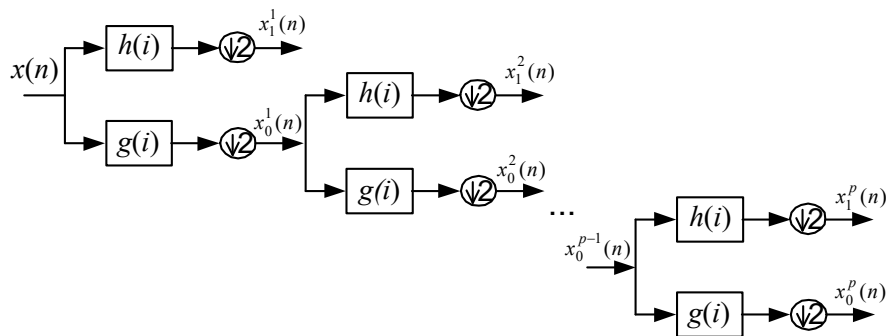


Rys. 2.43. Odpowiedzi impulsowe filtrów stosowanych w analizie (a, b) oraz syntezie (c, d) sygnału z zastosowaniem falki *sym6*

Proces filtracji zgodnie z (2.154) może być powtarzany iteracyjnie, tworząc w kolejnych iteracjach nowy poziom rozdzielczości (skalowania sygnału), przy czym wielkości x_1^j (detale) są współczynnikami rozwinięcia falkowego funkcji wejściowej:

$$x_1^j(n) = DWx_{jn} \quad (2.158)$$

Wielorozdzielcza dekompozycja sygnału odbywa się zgodnie ze schematem przedstawionym na rys. 2.42. W kolejnych etapach przetwarzania,



Rys. 2.44. Struktura algorytmu falkowej dekompozycji sygnału

dalszej obróbce podlega sygnał uzyskany na wyjściu odpowiedniego filtra dolnoprzepustowego (a więc w kolejnym stopniu aproksymacji). Wszystkie kolejne detale (sygnały x_l') tworzą elementy falkowej dekompozycji sygnału. Podobną strukturę ma również algorytm syntezy sygnału, przy czym, operacje próbkowania są zastąpione odpowiednio dodawaniem zer, jak na rys. 2.44.

Problem syntezy sprzężonych filtrów lustrzanych $g(k)$, $h(k)$, które spełniają warunki przedstawionej wielorozdzielczej analizy sygnału można znaleźć w literaturze specjalistycznej [3], [26]. Funkcje impulsowe tych filtrów zależą od przyjętej rodziny falek. W wielu praktycznych zastosowaniach można korzystać w tym celu z gotowych programów komputerowych, które zapewniają także wygodną graficzną obróbkę wyników analizy [18].

2.5.3 Uwagi końcowe

Przedstawione rozważania są tylko bardzo pobieżnym wprowadzeniem w problematykę falkowego przekształcenia sygnałów. Teoria falek jest dziedziną matematyki [35], która powstała zaledwie kilkanaście lat temu i już znalazła bardzo obiecujące zastosowania w różnych, niekiedy odległych dziedzinach wiedzy, takich jak: teoria aproksymacji i równań różniczkowych, meteorologia, geologia, medycyna, czy też astronomia [15], [31].

Wspólnym wyróżnikiem zastosowań transformaty falkowej w technice jest przetwarzanie sygnałów [8], [26], [29]. Zastosowanie przekształcenia falkowego niesie istotne korzyści w porównaniu z przekształceniem Fouriera w odniesieniu do sygnałów niestacjonarnych. Również te cechy transformaty falkowej zostały zauważone w przypadku analizy zjawisk w elektrotechnice [6], [13], [14], [17], [27], [32] lub analizy harmonicznej w stanach dynamicznych sieci elektrycznej [24], [25], [37].

W zakresie przetwarzania sygnałów dla potrzeb automatyki elektroenergetycznej, co mieści się w głównym nurcie tej książki, można odnotować obecnie duże zainteresowanie badaczy tą techniką. Także bardzo obiecujące wydaje się być zastosowanie falkowego przetwarzania sygnałów do oceny wskaźników jakości energii elektrycznej [1] oraz wyznaczania i klasyfikacji zakłóceń w systemie elektroenergetycznym [9]. Wysoka rozdzielczość przetwarzania może także poprawić także selektywność działania zabezpieczeń elektroenergetycznych [7], [10], [16].

2.6 Literatura

- [1] Angrisani L., Daponte P., A'Apuzzo M., Testa A.: *A measurement method based on the wavelet transform for power quality analysis*. IEEE Trans. on Power Delivery, 1998 Vol. 13, No 4, ss. 990-998.
- [2] Antoniou A.: *Digital filters: analysis and design*. McGraw-Hill. New York 1979.
- [3] Białasiewicz J.T.: *Falki i aproksymacje*. WNT. Warszawa 2000.
- [4] Bozic S.M.: *Digital and Kalman Filtering*. Edward Arnold Ltd. London 1979.
- [5] Dwight F.M.: *Random signal processing*. Prentice-Hall. Englewood Cliffs New Jersey 1995.
- [6] Gandelli A., Monti A., Riva M.: *Wavelet-based approach to network analysis: an introduction*. ETEP, 1988 Vol. 8, No 4, ss. 256-262.
- [7] Gómez-Morante M., Nicoletti D.W.: *A wavelet-based differential transformer protection*. IEEE Trans. on Power Delivery, 1999 Vol. 14, No 4, ss. 1351-1356.
- [8] Hess-Nielsen N., Wickerhauser M.V.: *Wavelets and time-frequency analysis*. Proceedings of the IEEE, 1996 Vol. 84, No 4, ss. 523-539.
- [9] Huang S.J., Hsieh C.T., Huang C.L.: *Application of wavelets to classify power system disturbances*. Electric Power System Research, 1998 No 47, ss. 87-93.
- [10] Huang S.J., Hsieh C.T.: *High-impedance fault detection utilizing a Morlet wavelet transform approach*. IEEE Trans. on Power Delivery, 1999 Vol. 14, No 4, ss. 1401-1407.
- [11] Jackson L.B.: *Digital Filters and Signal Processing*. Kluwer Academic Publishers. Boston 1986.
- [12] Johnes A.T., Salman S.K.: *Digital Protection for Power Systems*. Peter Peregrinus Ltd. IEE Power Series 15. London 1995.
- [13] Kim C.H., Aggarwal R.: *Wavelet transforms in power systems. Part 1. General introduction to the wavelet transform*. Power Engineering Journal, 2000 April, ss. 81-87.
- [14] Kim C.H., Aggarwal R.: *Wavelet transforms in power systems. Part 2. Examples of application to actual power system transients*. Power Engineering Journal, 2001 August, ss. 193-202.
- [15] Littler T.B., Morrow D.J.: *Wavelets for the analysis and compression of power system disturbances*. IEEE Trans. on Power Delivery, 1999 Vol. 14, No 2, ss. 358-362.
- [16] Mao P.L., Aggarwal R.K.: *A wavelet transform based decision making logic method for discrimination between internal faults and inrush currents in power transformers*. Electric Power and Energy Systems, 2000 No 22, ss. 389-395.

- [17] Meliopoulos A.P.S., Lee C.H.: *An alternative method for transient analysis via wavelets*. IEEE Trans. on Power Delivery, 2000 Vol. 15, No 1, s. 114-121.
- [18] Misiti M., Misiti Y., Oppenheim G., Poggi J.M.: *Wavelet Toolbox for use with MATLAB. Wavelet Toolbox User's Guide*. The MathWorks, Inc. 1996.
- [19] Mitra S.K., Kaiser J.F. (Red.): *Handbook for digital signal processing*. John Wiley & Sons, Inc. New York 1993.
- [20] Oppenheim A.V., Schaffer R.W.: *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów*. WKiŁ. Warszawa: 1979.
- [21] Osowski J.: *Zarys rachunku operatorowego*. WNT. Warszawa 1981.
- [22] Papoulis A.: *Prawdopodobieństwo, zmienne losowe i procesy stochastyczne*. WNT. Warszawa 1972.
- [23] Phadke A.G., Thorp J.S.: *Computer Relaying for Power Systems*. Research Studies Press Ltd. Taunton, Somerset 1992.
- [24] Pham V.L., Wong K.P.: *Wavelet-transform-based algorithm for harmonic analysis of power system waveforms*. IEE Proc.-Gener. Transm. Distrib., 1999 Vol. 146, No 3, ss. 249-252.
- [25] Pham V.L., Wong K.P.: *Antidistortion method for wavelet transform filter banks and nonstationary power system waveform harmonic analysis*. IEE Proc.-Gener. Transm. Distrib., 2001 Vol. 148, No 2, ss. 117-122.
- [26] Rioul O., Vetterli M.: *Wavelets and signal processing*. IEEE Signal Processing Magazine, 1991 October, ss. 14-38.
- [27] Robertson D.C., Camps O.I., Mayer J.S., Gish W.B.: *Wavelets and electromagnetic power system transients*. IEEE Trans. on Power Delivery, 1996 Vol. 11, No 2, ss. 1050-1057.
- [28] *Signal Processing TOOLBOX for use with MATLAB. User's Guide*. The MathWorks, Inc. 1998.
- [29] Strang G.: *Signal processing for everyone. W: Computational Mathematics Driven by Industrial Problems*. Springer-Verlag. New York 2000.
- [30] Szabatın J.: *Podstawy teorii sygnałów*. WKiŁ. Warszawa 2000.
- [31] Torrence C., Compo G.P.: *A practical guide to wavelet analysis*. Bulletin of the American Meteorological Society. 1998 Vol. 79, No 1, ss. 61-78.
- [32] Wilkinson W.A., Cox M.D.: *Discrete wavelet analysis of power system transients*. IEEE Trans. on Power Delivery, 1996 Vol. 11, No 4, ss. 2038-2042.
- [33] Wiszniewski A.: *Algorytmy pomiarów cyfrowych w automatyce elektroenergetycznej*. WNT. Warszawa 1990.
- [34] Wojnar A.: *Teoria sygnałów*. WNT. Warszawa 1980.
- [35] Wojtaszczyk P.: *Teoria falek*. Wydawnictwo Naukowe PWN. Warszawa 2000.
- [36] Wojtkiewicz A.: *Elementy syntezy filtrów cyfrowych*. WNT. Warszawa 1982.
- [37] Zheng T., Makram E.B., Girgis A.A.: *Power system transient and harmonic studies using wavelet transform*. IEEE Trans. on Power Delivery, 1999 Vol. 14, No 4, ss. 1461-1468.

Rozdział 3

ESTYMACJA PARAMETRÓW SYGNAŁÓW ELEKTRYCZNYCH

3.1 Wprowadzenie

Rozpatrywane tu sygnały prądu i napięcia mają swoje źródło w procesie zachodzącym w systemie elektroenergetycznym. Są one reprezentowane w postaci funkcji zależnej od czasu. Odpowiednie odwzorowanie jest określone przez *model sygnałowy procesu* lub *model matematyczny sygnału*. Sposób przetwarzania sygnału w celu określenia jego poszukiwanych parametrów musi być dostosowany do przyjętego modelu sygnałowego. Zagadnienie to jest pokrótce przedstawione w p. 3.2.

Podstawowym celem tego rozdziału jest przedstawienie metod estymacji parametrów wspomnianych sygnałów. Ponieważ najczęściej wielkości kryterialne stosowane w automatyce elektroenergetycznej są określone za pomocą modeli zespolonych sygnałów prądu i napięcia, zatem rozpatrywane są tu metody identyfikacji takich właśnie sygnałów. Przedstawiono najbardziej znane metody, takie jak pełno- i półokresowy algorytm Fouriera oraz Walsh'a (p. 3.3), a także cały szereg algorytmów wywodzących się z metody najmniejszych kwadratów (p. 3.4). Ich poszczególne wersje zależą od formy numerycznej realizacji (algorytmy nierekursywne i rekursywne), głębokości uwzględnianych zjawisk (metody liniowe i nieliniowe) oraz sposobu reprezentacji obserwowanego procesu i pomiaru (modele deterministyczne i probabilistyczne). Oddzielną grupę tych algorytmów stanowią metody wywodzące się z modelu sygnałowego przedstawionego w postaci równań zmiennych stanu. Są to obserwatory stanu (p. 3.5) oraz filtry Kalmana (p. 3.6).

Metody prezentowane w tym rozdziale stanowią podstawę większości algorytmów pomiarowych stosowanych obecnie w automatyce elektroenergetycznej. Na opis poszczególnych metod składa się zwięzłe

wyprowadzenie algorytmu, jego zapis z wyszczególnieniem kolejnych kroków postępowania oraz przykład zastosowania.

3.2 Modele sygnałowe procesu

Stan elektrycznej części systemu elektroenergetycznego oraz jego elementów można opisać za pomocą sygnałów prądu i napięcia. W przypadku systemu prądu przemiennego generatory wymuszają sinusoidalny kształt fali napięcia zasilającego. W rezultacie, nawet przy intensywnych zakłóceniach w systemie, istotnym elementem przebiegów prądu i napięcia jest składowa podstawowa o częstotliwości narzuconej przez obracające się wirniki generatorów.

W stanie ustalonym systemu, przebiegi prądu i napięcia mają charakter fal, których model wygodnie jest przedstawić w postaci zespolonej

$$\underline{y}(t) = X e^{j(\omega_1 t + \varphi)} = x_r(t) + jx_i(t), \quad (3.1)$$

gdzie: ω_1 - pulsacja składowej podstawowej.

W modelu tym część rzeczywista reprezentuje sygnał, który jest bezpośrednio osiągalny przez obserwację procesu

$$y(t) = y_r(t) = X \cos(\omega_1 t + \varphi). \quad (3.2)$$

Widać, że do pełnej identyfikacji sygnału należy w tym przypadku określić trzy wielkości: pulsację ω_1 , fazę φ oraz amplitudę X . Zbiór ten zazwyczaj można zredukować do dwóch ostatnich wielkości, gdyż pulsację ω_1 najczęściej przyjmuje się za wielkość stałą, równą wartości znamionowej (w niektórych jednak przypadkach to założenie nie jest uprawnione).

Z punktu widzenia automatyki zabezpieczeniowej znacznie bardziej interesujący jest przypadek sygnałów prądu i napięcia występujących podczas zwarcia w nadzorowanym systemie. Prosty przykład obwodu zwarciovego jest pokazany na rys. 3.1. Dla sinusoidalnego wymuszenia napięciowego o postaci

$$e(t) = U \cos(\omega_1 t + \varphi), \quad (3.3)$$

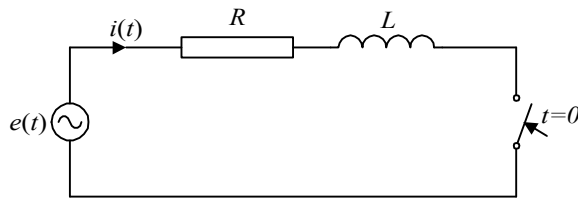
prąd zwarciovowy przybiera następującą formę

$$i(t) = I_1 \cos(\omega_1 t + \varphi - \psi) - I_0 e^{-\frac{R}{L}t}, \quad (3.4)$$

gdzie: $I_1 = \frac{|U|}{|Z|}$, $Z = R + j\omega_1 L$, $I_0 = I_1 \cos(\varphi - \psi)$, $\psi = \arctg \frac{\omega_1 L}{R}$.

Schemat zastępczy rzeczywistego obwodu zwarciovego jest zazwyczaj znacznie bardziej złożony niż ten pokazany na rys. 3.1. Przede

wszystkim występuje tu układ wielofazowy, wielostronnie zasilany, z takimi elementami, jak linie elektroenergetyczne, które bardziej adekwatnie powinny być reprezentowane modelami o stałych rozłożonych, transformatory z obwodami magnetycznymi itd. Ponadto, sygnały obserwowane na wejściu układu automatyki ulegają zniekształceniom w torze pomiarowym. Problemy te były przedstawione w rozdziale 1.



Rys. 3.1. Schemat zastępczy obwodu zwarciovego

prądu i napięcia obserwowane przez układy automatyki elektroenergetycznej można uprościć do następującej postaci:

$$y_m(t) = X_0 e^{-\frac{t}{\tau_0}} + \sum_{i=1}^L X_i(t) \cos(\omega_i t + \varphi_i), \quad (3.5)$$

gdzie: τ_0 - stała czasowa zanikania składowej aperiodycznej, L - liczba uwzględnianych harmonicznych.

Amplitudy harmonicznych $X_i(t)$ zazwyczaj zmieniają się w czasie, jednak w krótkim oknie pomiarowym można je uważać za stałe

$$X_i(t) = X_i, \quad (3.6)$$

co znacznie upraszcza model sygnałowy.

Z punktu widzenia algorytmów pomiarowych cyfrowych układów automatyki, model sygnałowy (3.5) należy rozpatrywać w postaci dyskretnej

$$y_m(k) = X_0 e^{-\frac{kT}{\tau_0}} + \sum_{i=1}^L X_i(k) \cos(ia k + \varphi_i), \quad (3.7)$$

gdzie: $a = 2\pi / N$ jest kątem pomiędzy kolejnymi próbkami składowej podstawowej ($i=1$), N - liczba próbek w okresie podstawowej harmonicznej sygnału, T - okres próbkowania.

Model sygnałowy procesu obserwowanego przez człon pomiarowy jest tylko pewnym przybliżeniem rzeczywistych zdarzeń, które mają charakter losowy. Oznacza to, że równanie (3.5) z danymi parametrami

Model obserwowanego procesu powinien adekwatnie odwzorować zachodzące zjawiska, pozwalając jednocześnie na syntezę odpowiedniego układu pomiarowego. W przypadku podejścia deterministycznego, sygnały

sygnału może określać jedynie pojedynczą realizację obserwowanego procesu. Każdemu kolejnemu zdarzeniu będzie towarzyszył nieco inny sygnał. Wygodnie jest tu posługiwać się pojęciem sygnału losowego. Ze względu na sposób reprezentacji sygnałów prądu i napięcia w układach elektrycznych, sygnał losowy określa się zazwyczaj przez losowe uzmiennianie parametrów sygnału zdeterminowanego. Dla sygnału harmonicznego (monochromatycznego) otrzymuje się postać podobną do (3.2)

$$y(k) = X \cos(\omega'ak + \varphi) + v(k), \quad (3.8)$$

gdzie: $\omega' = \omega / \omega_1$ - względna częstotliwość sygnału, $v(k)$ - zakłócenie.

Sygnał $y(k)$ jest losowy jeśli przynajmniej jeden z jego parametrów: X , ω' , φ lub $v(k)$ jest losowy.

Do pełnego opisu sygnału losowego niezbędna jest znajomość podstawowych probabilistycznych charakterystyk jego losowych parametrów, które są związane z przyjętym rodzajem rozkładu prawdopodobieństwa. Najważniejsze z tych charakterystyk są określone następująco (na przykładzie zakłócenia $v(k)$):

$$m_v(k) = E[v(k)] \quad - \text{wartość oczekiwana zmiennej } v(k), \quad (3.9)$$

$$\sigma_v^2(k) = E[(m_v(k) - v(k))^2] \quad - \text{wariancja zmiennej } v(k), \quad (3.10)$$

gdzie: $E[\cdot]$ oznacza operator wartości oczekiwanej.

Należy podkreślić, że ze względu na zdeterminowany charakter funkcji (3.8), proces przedstawiony tym wyrażeniem często określa się jako quasi-deterministyczny (może on być rozszerzony na inne harmoniczne).

Z punktu widzenia celu, jakiemu ma służyć pomiar, model (3.7) można przedstawić w postaci sumy dwóch składników:

$$y_m(k) = y_{mu}(k) + y_{me}(k), \quad (3.11)$$

gdzie: $y_{mu}(k)$ sygnał użyteczny, który jest wykorzystywany do identyfikacji stanu obiektu, $y_{me}(k)$ sygnał błędu, który jest reprezentowany znany modelem.

Sygnał $y_{me}(k)$ jest rozpatrywany jako zakłócenie z punktu widzenia celu, jakiemu ma służyć pomiar. Na przykład, impedancja pętli zwarciowej może być określona jako iloraz zespolonych sygnałów napięcia i prądu podstawowej harmonicznej. Występująca w prądzie zwarciovym

składowa aperiodyczna jest w tym przypadku zakłóceniem, chociaż jej model sygnałowy może być dobrze określony.

Podstawowym modelem sygnału użytecznego w rozważanym zastosowaniu jest sygnał harmoniczny. Dyskretna postać przebiegu podstawowej harmonicznej może być zapisana następująco (przyjęto, że $\omega' = 1$)

$$y(k) = X \cos(ak + \varphi) = X \cos(ak) \cos \varphi - X \sin(ak) \sin \varphi, \quad (3.12)$$

co można przedstawić w następującej formie

$$y(k) = X_c \cos(ak) - X_s \sin(ak) = x_c(k) \cos \varphi - x_s(k) \sin \varphi, \quad (3.13a)$$

gdzie: $X_c = X \cos \varphi, \quad X_s = X \sin \varphi \quad (3.13b)$

$$x_c(k) = X \cos(ak), \quad x_s(k) = X \sin(ak). \quad (3.13c)$$

Sygnał (3.12) reprezentuje część rzeczywistą bardziej ogólnego sygnału zespolonego

$$\underline{y}(k) = X \cos(ak + \varphi) + jX \sin(ak + \varphi) = x_r(k) + jx_i(k) \quad (3.14)$$

gdzie: $x_r(k) = X \cos(ak + \varphi), \quad x_i(k) = X \sin(ak + \varphi).$

Sygnał (3.14) może być także przedstawiony w postaci wykładniczej

$$\underline{y}(k) = \underline{X} e^{jak} = \underline{x}(k), \quad (3.15)$$

gdzie: $\underline{X} = X_c + jX_s = X e^{j\varphi}, \quad (3.16)$

$$\underline{x}(k) = x_r(k) + jx_i(k) = (x_c(k) + jx_s(k)) e^{j\varphi}. \quad (3.17)$$

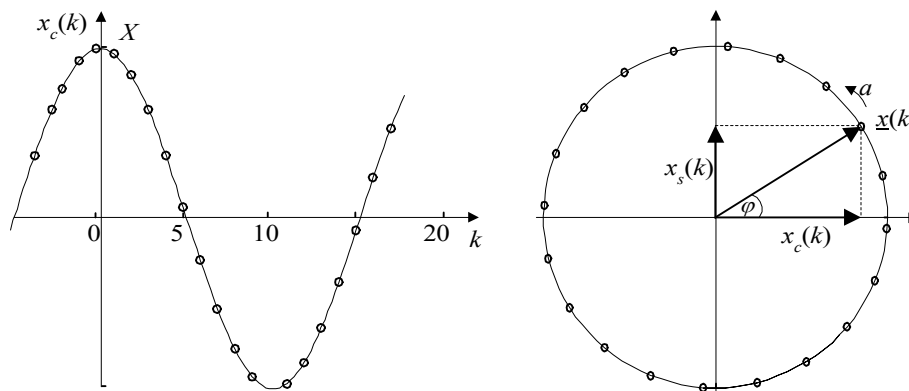
Jak widać, składowe ortogonalne $x_r(k)$, $x_i(k)$ oraz $x_c(k)$, $x_s(k)$ są sobie równoważne z dokładnością do fazy początkowej sygnału.

Przytoczone tu zostały znane relacje gdyż sposób reprezentacji sygnału ma swoje konsekwencje w doborze odpowiedniego estymatora parametrów tego sygnału. \underline{X} jest *amplitudą zespoloną* pierwszej harmonicznej, która przedstawia na płaszczyźnie zespolonej stały wektor określony przez składowe X_c i X_s o argumentie φ oraz amplitudzie X . Natomiast $\underline{x}(k)$ jest sygnałem zespolonym, który jest reprezentowany wektorem obracającym się na płaszczyźnie zespolonej z prędkością kątową a (rys. 3.2). Moduł tego wektora (a więc i amplituda przebiegu) oraz jego faza początkowa mogą być określone według następujących zależności:

$$X = \sqrt{x_c^2(k) + x_s^2(k)}, \quad \varphi = \arctg\left(\frac{x_c(k)}{x_s(k)}\right) - ak. \quad (3.18)$$

Podobne związki zachodzą również dla amplitudy zespolonej \underline{X} , przy

$$\text{czyli: } \varphi = \arctg\left(\frac{X_s}{X_c}\right). \quad (3.19)$$



Rys. 3.2. Przebieg harmoniczny próbkowany z częstością $N=20$ próbek w okresie (a) oraz jego reprezentacja wektorowa (b)

Jak widać, istnieje zasadnicza różnica w interpretacji fizycznej składowych ortogonalnych (X_c, X_s) oraz $(x_c(k), x_s(k))$. W pierwszym przypadku są to wielkości stałe w stanie ustalonym, podczas gdy druga para składowych przedstawia sygnały sinusoidalne. Należy zauważyć, że obie pary składowych ortogonalnych pozwalają jednoznacznie opisać sygnał harmoniczny. Jest to bardzo istotne z punktu widzenia rozważanych tu problemów, gdyż znane są bardzo efektywne algorytmy obliczania tych składowych w obu przedstawionych postaciach. Dla uniknięcia niejednoznaczności, w dalszym ciągu będą stosowane oznaczenia jak w (3.13): duże litery odnoszą się do składowych zespolonej amplitudy, natomiast małe litery przedstawiają składowe sygnału zespolonego.

Wielkości prądów i napięć występujące w układach elektrycznych podaje się zazwyczaj w wartościach skutecznych. Korzystając ze znanej zależności pomiędzy amplitudą i wartością skuteczną przebiegu sinusoidalnego, sygnał (3.12) można przedstawić jako

$$y(k) = X \cos(ak + \varphi) = \sqrt{2} X_{sk} \cos(ak + \varphi), \quad (3.20)$$

gdzie: X_{sk} - wartość skuteczna sygnału.

W dalszej analizie głównie będzie stosowane pojęcie amplitudy sygnału.

Gdy sygnał zawiera większą liczbę składowych harmoniczných, to podany sposób reprezentacji sygnału można zastosować do każdej z nich. Na przykład, gdy sygnał składa się z podstawowej oraz z trzeciej harmonicznej to jego model ma następującą postać:

$$y(k) = X_{1c} \cos(ak) - X_{1s} \sin(ak) + X_{3c} \cos(3ak) - X_{3s} \sin(3ak). \quad (3.21)$$

Można zauważyć, że powyższy model jest liniowy względem odpowiednich składowych ortogonalnych. Jest to istotne z punktu widzenia poszukiwania procedury obliczania tych składowych.

Podobny model można również utworzyć w celu reprezentacji składowej aperiodycznej w równaniu (3.7). Rozłożenie funkcji wykładniczej w szereg Taylora daje następujący związek:

$$X_0 e^{\frac{kT}{\tau_0}} = X_0 - X_0 \frac{kT}{\tau_0} + X_0 \left(\frac{kT}{\tau_0} \right)^2 + \dots = X_{01} + X_{02} ak + X_{03} (ak)^2 + \dots \quad (3.22)$$

W praktycznych zastosowaniach ogranicza się liczbę elementów w powyższym szeregu do 1..3 członów.

Widać, że przedstawiając sygnał za pomocą odpowiednich składowych można łatwo uzyskać model sygnałowy liniowy względem niezależnych parametrów. W sposób ogólny określa to następujące równanie:

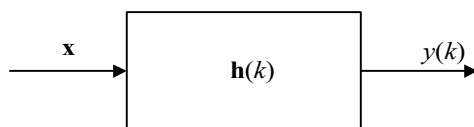
$$y(k) = \mathbf{h}(k)\mathbf{x} + v(k), \quad (3.23)$$

gdzie: $\mathbf{h}(k)$ - wektor współczynników modelu, \mathbf{x} - wektor niezależnych parametrów modelu, $v(k)$ - błąd pomiarowy.

Na przykład, sygnał złożony z podstawowej harmonicznej i składowej aperiodycznej może być przedstawiony następującym modelem:

$$\mathbf{h}(k) = \begin{bmatrix} \cos(ak) & -\sin(ak) & 1 & ak & (ak)^2 \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

$$\mathbf{x} = [X_{1c} \ X_{1s} \ X_{01} \ X_{02} \ X_{03}]^T.$$



Rys. 3.3. Struktura nierekursywnego modelu sygnałowego

Struktura takiego modelu jest pokazana na rys. 3.3. Widać, że sygnał $y(k)$ jest liniową kombinacją niezależnych parametrów modelu reprezentowanych przez wektor \mathbf{x} . Ten model sygnałowy ma strukturę nierekursywną (*model nierekursywny*), gdyż każda

kolejna próbka sygnału wyjściowego nie zależy od poprzedniego stanu modelu i sygnałów spoza zbioru określonego przez wektor \mathbf{x} .

W przeciwieństwie do tego, w modelu rekursywnym sygnał wyjściowy zależy od poprzedniego stanu modelu. Prosty przykład takiego modelu można podać rozpatrując właściwości sygnału harmonicznego reprezentowanego stałymi w czasie składowymi ortogonalnymi (3.13). Dynamika parametrów tego sygnału może być zapisana następująco

$$\begin{aligned} X_c(k+1) &= X_c(k), \\ X_s(k+1) &= X_s(k), \end{aligned} \quad (3.25)$$

co odzwierciedla fakt, że składowe te dążą do wartości stałych.

Równanie (3.25) razem z (3.13) tworzy znany stanowy model sygnału harmonicznego (model w przestrzeni stanów):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X_c(k+1) \\ X_s(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_c(k) \\ X_s(k) \end{bmatrix}, \\ y(k) &= [\cos(ak) \quad -\sin(ak)] \begin{bmatrix} X_c(k) \\ X_s(k) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

który przybiera następującą postać ogólną:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k), \\ y(k) &= \mathbf{c}(k)\mathbf{x}(k). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Na przykład, dla 5-stanowego modelu sygnałowego z parametrami odpowiadającymi podstawowej harmoniczej (2 składowe) oraz składowej aperiodycznej (3 parametry), współczynniki równania (3.27) są następujące:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}(k) = [\cos(ak) \quad -\sin(ak) \quad 1 \quad ak \quad (ak)^2], \quad (3.28)$$

$$\mathbf{x}(k) = [X_{1c}(k) \quad X_{1s}(k) \quad X_{01}(k) \quad X_{02}(k) \quad X_{03}(k)]^T.$$

Parametry modelu o strukturze jak w (3.27) mogą mieć także odmienną interpretację fizyczną. Jeśli w modelu sygnałowym zastosować zmienne w czasie składowe ortogonalne:

$$y(k) = x_c(k) \cos \varphi - x_s(k) \sin \varphi, \quad (3.29)$$

gdzie: $x_c(k)$, $x_s(k)$ - jak w (3.13c),

to model (3.26) zostanie przekształcony do następującej postaci:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_c(k+1) \\ x_s(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c(k) \\ x_s(k) \end{bmatrix}, \\ y(k) &= [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_c(k) \\ x_s(k) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

przy czym przyjęto, że faza początkowa $\varphi = 0$.

Można zauważyć, że modele określone równaniami (3.27) i (3.30) mają podobną strukturę, z tym, że w tym ostatnim macierze parametrów \mathbf{A} oraz \mathbf{c} są stałe

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k), \\ y(k) &= \mathbf{c}\mathbf{x}(k). \end{aligned} \quad (3.31)$$

W przypadku rozpatrywanego modelu 5-stanowego, odpowiednie macierze mają następującą postać:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos a & -\sin a & 0 & 0 & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}(k) = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0],$$

$$\mathbf{x}(k) = [x_{1c}(k) \ x_{1s}(k) \ x_{01}(k) \ x_{02}(k) \ x_{03}(k)]^T. \quad (3.32)$$

Porównując modele (3.27) oraz (3.31) można zauważyć następujące główne różnice:

- w modelu (3.27) składowe ortogonalne odnoszą się do amplitudy zespolonej i określają wektor niezmienny w czasie, podczas gdy w modelu (3.31) odpowiada im zespolony sygnał przedstawiony wektorem wirującym z prędkością kątową odpowiednio do reprezentowanej harmonicznej;
- w przeciwieństwie do modelu (3.27), system (3.31) jest stacjonarny (parametry modelu nie zmieniają się w czasie).

Podobnie jak w przypadku modelu nierekursywnego, model stanowy może być rozpatrywany jako deterministyczny lub probabilistyczny (losowy). W tym ostatnim przypadku wszystkie lub tylko wybrane parametry modelu są rozpatrywane jako zmienne losowe. Wówczas należy również brać pod uwagę błędy pomiarowe (zakłócenie pomiaru) oraz błędy reprezentacji zmiennych stanu (zakłócenie procesu). Ogólna postać takiego modelu jest następująca:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k), \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k),\end{aligned}\quad (3.33)$$

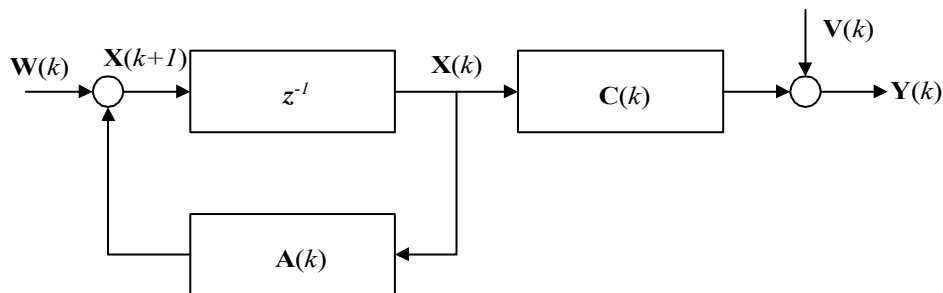
gdzie: $\mathbf{y}(k)$ - wektor zmiennych wejściowych (pomiarów), $\mathbf{w}(k)$ - wektor zakłóceń procesu (stanu), $\mathbf{v}(k)$ - wektor zakłóceń pomiarowych.

W dalszych rozważaniach przyjmuje się, że macierze $\mathbf{A}(k)$ oraz $\mathbf{C}(k)$ są zdeterminowane (nielosowe), a zakłócenia są charakteryzowane przez następujące macierze kowariancji:

$$\begin{aligned}E[\mathbf{w}\mathbf{w}^T] &= \sigma_w^2 \mathbf{Q}, \\ E[\mathbf{v}\mathbf{v}^T] &= \sigma_v^2 \mathbf{R}.\end{aligned}\quad (3.34)$$

Jeśli nie ma korelacji pomiędzy zakłóceniami w powyższym modelu (błędy pomiarowe lub błędy odwzorowania procesu są niezależne w kolejnych próbkach), to odpowiednie macierze kowariancji są diagonalne. W modelu deterministycznym, gdy nie ma informacji o zakłóceniach procesu lub pomiaru, wielkości te przyjmują postać macierzy jednostkowych.

Struktura sygnałowego modelu stanowego jest pokazana na rys. 3.4.



Rys. 3.4. Struktura modelu stanowego

3.3 Podstawowe algorytmy pomiaru składowych ortogonalnych

3.3.1 Algorytm Fouriera

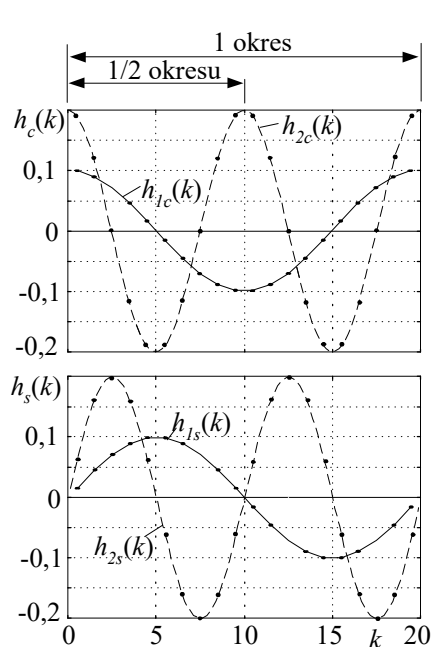
Duże znaczenie DPF w odniesieniu do omawianego tu zastosowania wynika stąd, że w układach prądu przemiennego podstawowa składowa i harmoniczne przebiegu zawierają informację o stanie nadzorowanego

systemu. Jednak w praktycznych realizacjach algorytmów pomiarowych rzadko stosuje się ogólną postać DPF. W jego miejsce często wprowadza się metody uproszczone, które pozwalają mierzyć parametry tylko wybranych składowych sygnału. Zwykle przyjmuje się, że próbkowanie sygnału ciągłego $y(t)$ odbywa się w równych odstępach czasu tak, że w okresie składowej podstawowej T_1 pobieranych jest N próbek, co odpowiada częstotliwości próbkowania $f_T = T_1 / N$. W wyniku pełnokresowego DPF określone są składowe ortogonalne odpowiadające $m = 1..N/2$ harmonicznym sygnału y oraz składowa stała ($m = 0$):

$$\begin{aligned} X_{mc} &= p_{mc} \sum_{i=0}^{N-1} y(i) \cos(ma(i + 0,5)), \\ X_{ms} &= -p_{ms} \sum_{i=0}^{N-1} y(i) \sin(ma(i + 0,5)), \end{aligned} \quad m = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}, \quad (3.35)$$

gdzie: $p_{mc} = p_{ms} = 2m / N$ - współczynniki skalujące dla $m = 1..N/2$ oraz $p_0 = p_{0c} = 1 / N$. Przyjęto, że funkcje korelacyjne są umieszczone symetrycznie w oknie pomiarowym.

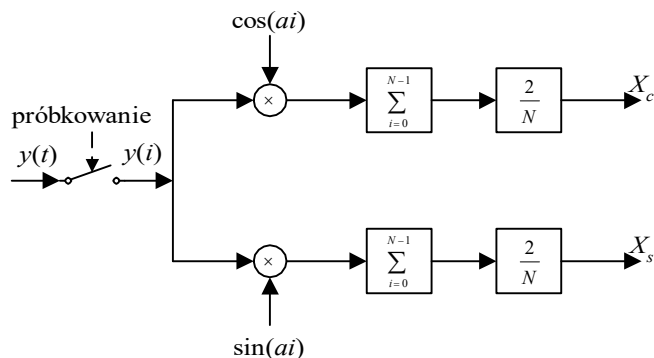
Przebiegi funkcji korelacyjnych (pomnożone przez odpowiednie



Rys. 3.5. Ortogonalne funkcje korelacyjne; $N = 20$

współczynniki skalujące) do estymacji składowych ortogonalnych podstawowej i drugiej harmonicznej są pokazane na rys. 3.5. W rozpatrywanym przypadku, pary funkcji korelacyjnych mogą być dowolnie rozmieszczone w oknie pomiarowym – jedynym warunkiem jest ich wzajemna ortogonalność. Jednak w celu ułatwienia porównania różnych algorytmów przyjęto, że funkcje te będą symetrycznie położone względem środka okna pomiarowego.

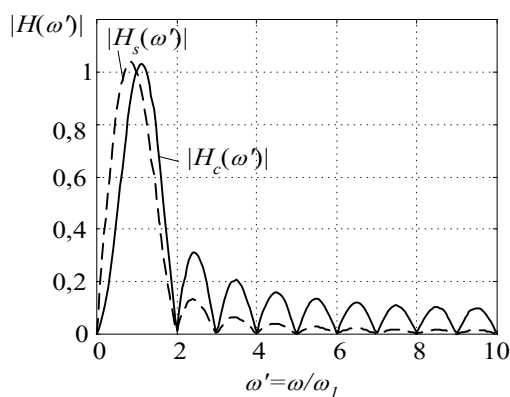
Struktura algorytmu estymacji składowej podstawowej jest pokazana na rys. 3.6. Charakterystyki częstotliwościowe amplitudy obu filtrów składowych przedstawia rys. 3.7. Do przetwarzania bezpośrednio obserwowanego sygnału y należy uwzględnić fakt, że w kolejnym



Rys. 3.6. Struktura algorytmu estymacji składowych ortogonalnych podstawowej harmonicznej sygnału na drodze korelacji

okresie próbkowania dostępny jest nowy ciąg danych wejściowych uzupełniony o ostatnią dostępną wartość $y(k)$. W przypadku stałej długości okna pomiarowego należy pominąć próbkę $y(k - M)$. Zatem w k -tym takcie próbkowania dostępny jest zbiór próbek $y(k - M + 1), \dots, y(k)$. Konkretna postać algorytmu zależy od sposobu przemieszczania się okna pomiarowego w miarę napływania nowych danych. W dalszych rozważaniach zakłada się, że w oknie pomiarowym mieści się parzysta liczba próbek sygnału.

Gdy okno pomiarowe przesuwa się razem z funkcją korelującą wzdłuż obserwowanego przebiegu, pełnookresowy algorytm Fouriera przyjmuje następującą postać:



Rys. 3.7. Charakterystyka częstotliwościowa amplitudy pełnookresowego algorytmu Fouriera; $N=20$

$$\begin{aligned}
 x_c(k) &= \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} y(k-i) \cos(a(N-i) - a/2), \\
 x_s(k) &= \frac{-2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} y(k-i) \sin(a(N-i) - a/2),
 \end{aligned}
 \quad k=0, 1, \dots \quad (3.36)$$

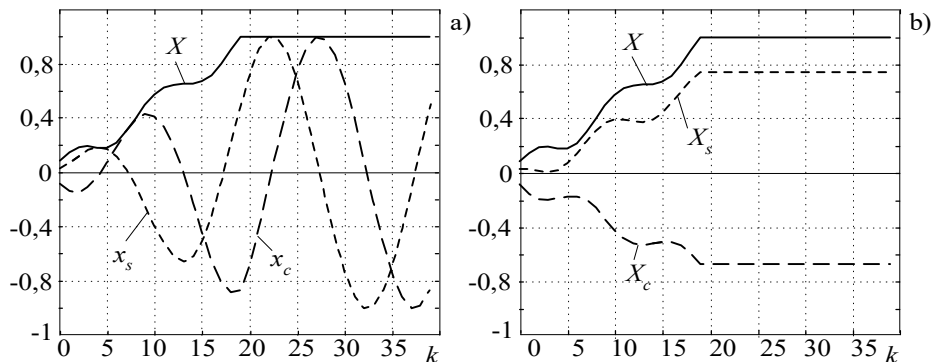
Zakłada się przy tym, że do rozpoczęcia obliczeń znane są wartości próbek sygnału $y(1-N), \dots, y(-1)$. Znak 'minus' w równaniu określającym składową $x_s(k)$ służy do dopasowania tej składowej do postaci zespolonej, jak w (3.17). Funkcja korelacyjna, w tym przypadku, nie zależy od kroku k . Odpowiedź czasowa powyższego algorytmu na wymuszenie o postaci:

$$y(k) = \sin(ak - \pi/3), \quad a = \frac{2\pi}{N}, \quad N = 20, \quad (3.37)$$

jest pokazana na rys. 3.8a. Można zauważyć, że algorytm ma podobne właściwości jak odpowiedni filtr SOI. Różnica występuje jedynie w fazie sygnału wyjściowego.

W przypadku, gdy okno pomiarowe ślizga się względem funkcji korelującej i mierzonego sygnału, kolejne próbki odpowiedzi są stałe w stanie ustalonym (przy założeniu, że wymuszenie jest zgodne z modelem pomiarowym). Dla tego przypadku algorytm pełnookresowy ma następującą postać:

$$\begin{aligned}
 X_c(k) &= \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} y(k-i) \cos(a(k+N-i) - a/2), \\
 X_s(k) &= \frac{-2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} y(k-i) \sin(a(k+N-i) - a/2),
 \end{aligned}
 \quad k=0, 1, \dots \quad (3.38)$$



Rys. 3.8. Odpowiedź czasowa pełnookresowego algorytmu Fouriera z niestacjonarną (a) i stacjonarną (b) funkcją korelacyjną

co odpowiada zależności (3.35) dla $M = N$ i $m = 1$. Odpowiedź czasowa powyższego algorytmu na wymuszenie (3.37) jest pokazana na rys. 3.8b. Należy zauważyć, że indeks k w opisie powyższych składowych: $X_c(k)$ i $X_s(k)$ ma inne znaczenie niż w (3.37). Ewentualna zmiana w czasie tych składowych może występować w stanie dynamicznym procesu.

Gdy w miejsce korelacji (3.35) zastosować filtrację z takimi samymi funkcjami bazowymi

$$\begin{aligned} x_{mc} &= p_{mc} \sum_{i=0}^{N-1} y(N-1-i) \cos(ma(i+0,5)), \\ x_{ms} &= p_{ms} \sum_{i=0}^{N-1} y(N-1-i) \sin(ma(i+0,5)), \end{aligned} \quad m = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}, \quad (3.39)$$

to wielkości x_{mc} , x_{ms} są próbkami składowych ortogonalnych odpowiednich sygnałów zespolonych.

Ze względu na bezpośredni związek powyższych zależności z przekształceniem Fouriera, są one nazywane *algorytmami Fouriera* – odpowiednio korelacyjnym lub filtracyjnym. Jeśli okno pomiarowe pokrywa się z długością okresu podstawowej harmonicznej modelu sygnałowego, to jest to *pełnookresowy algorytm Fouriera*.

Pełnookresowy algorytm filtracyjny można uzyskać na podstawie (3.39)

$$\begin{aligned} x_c(k) &= \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} y(k-i) \cos(ai + a/2), \\ x_s(k) &= \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} y(k-i) \sin(ai + a/2), \end{aligned} \quad , k = 0, 1, \dots \quad (3.40)$$

Różni się on od algorytmu korelacyjnego (3.36) kierunkiem wybierania współczynników bazowych funkcji sinusoidalnych.

Charakterystyki częstotliwościowe powyższych procedur można analizować w podobny sposób, jak w przypadku filtrów cyfrowych. Stosując przekształcenie \mathcal{Z} w odniesieniu do (3.36) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} X_c(z) &= \frac{2}{N} Y(z) \sum_{i=0}^{N-1} \cos(a(N-i) - a/2) z^{-i}, \\ X_s(z) &= \frac{-2}{N} Y(z) \sum_{i=0}^{N-1} \sin(a(N-i) - a/2) z^{-i}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

co prowadzi do następujących transmitancji:

$$\begin{aligned} H_c(z) &= \frac{X_c(z)}{Y(z)} = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \cos(a(N-i) - a/2) z^{-i}, \\ H_s(z) &= \frac{X_s(z)}{Y(z)} = \frac{-2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \sin(a(N-i) - a/2) z^{-i}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Charakterystyka częstotliwościowa może być uzyskana przez podstawienie $z = e^{j\omega T} = e^{j\omega' a}$, $T = T_1 / N$ - okres próbkowania, $\omega' = \omega / \omega_1$ - pulsacja względna, dla $0 \leq \omega' \leq 2/N$. Po przekształceniu otrzymuje się:

$$\begin{aligned} H_c(j\omega') &= H_c(\omega') e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\omega' a\right)}, \\ H_s(j\omega') &= H_s(\omega') e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\omega' a - \frac{\pi}{2}\right)}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} H_c(\omega') &= p(\omega') \cos(a/2) \sin(\omega' a/2), \\ H_s(\omega') &= -p(\omega') \sin(a/2) \cos(\omega' a/2), \end{aligned} \quad (3.44)$$

są widmowymi charakterystykami zerowo-fazowymi, przy czym:

$$p(\omega') = \frac{2 \sin(\pi\omega')}{N \sin((\omega' + 1)a/2) \sin((\omega' - 1)a/2)}.$$

Przebieg funkcji $H_c(\omega')$ oraz $H_s(\omega')$ dla $N = 20$ jest pokazany na rys. 2.20. Moduły tych funkcji określają granice charakterystyki amplitudowej estymatora sygnału zespolonego (rys. 3.7).

W przypadku algorytmu filtracyjnego (3.40), transmitancja filtru kosinusowego jest taka sama jak w (3.43), natomiast faza transmitancji filtru sinusowego jest przesunięta o kąt π :

$$H_s(j\omega') = -H_s(\omega') e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\omega' a + \frac{\pi}{2}\right)}, \quad (3.45)$$

co potwierdza fakt, że transmitancje filtracji i korelacji są wzajemnie sprzężone.

W przypadku algorytmu (3.38) funkcja korelacyjna zmienia się w każdym kroku przetwarzania. Do analizy pojawiających się w ten sposób kolejnych transmitancji można skorzystać z ogólnego zapisu funkcji przejścia algorytmu pełnookresowego. Odpowiednie zależności powstają w wyniku kombinacji transmitancji (3.43) ze współczynnikami zależnymi od aktualnego położenia okna, które może przyjmować N różnych pozycji względem funkcji korelacyjnych:

$$\begin{aligned} H_c(j\omega', m) &= \cos(am)H_c(j\omega') - \sin(am)H_s(j\omega'), \\ H_s(j\omega', m) &= \sin(am)H_c(j\omega') + \cos(am)H_s(j\omega'), \end{aligned} \quad m=0, 1, \dots, N-1. \quad (3.46)$$

Wszystkie składniki powyższych równań są zespolone.

W centralnym położeniu funkcji korelacyjnych ($m=0$) transmitancje (3.46) i (3.43) są sobie równe, a ich charakterystyki amplitudowe przedstawia rys. 3.7. W miarę przesuwania się okna pomiarowego rośnie kąt am w (3.46) i odpowiednio zmieniają się wypadkowe transmitancje z okresem N próbek. W tym czasie charakterystyki amplitudowe są stałe jedynie w węzłach odpowiadających poszczególnym harmonicznym (rys. 3.7). Pozostałe części charakterystyki zmieniają się w granicach wyznaczonych przez oba wyjściowe przebiegi. Moduły tych przebiegów tworzą charakterystyki amplitudowe (rys. 3.7). Są one szczegółowo analizowane w następnym rozdziale. Można zauważyć, że wszystkie harmoniczne są w pełni eliminowane z sygnału wejściowego.

Składowe ortogonalne uzyskane według jednego z powyższych algorytmów określają parametry sygnału zespolonego podstawowej harmonicznej. Konkretna forma tego sygnału zależy od użytej metody estymacji. I tak, w przypadku algorytmu (3.36) uzyskuje się następującą postać sygnału wyjściowego

$$\underline{x}(k) = x_c(k) + jx_s(k) = X(k)e^{-j\varphi}e^{jak}, \quad (3.47)$$

gdzie:
$$\varphi = \arctg \frac{x_s(k)}{x_c(k)} + ak, \quad (3.48)$$

$$X(k) = \sqrt{x_c^2(k) + x_s^2(k)}. \quad (3.49)$$

Należy zwrócić uwagę, że indeks k pełni tu podwójną rolę: wskazuje na to, iż sygnał zespolony (3.47) jest funkcją czasu, a także na fakt, że estymata amplitudy, w ogólnym przypadku, zmienia się w zależności od bieżącej wartości sygnału.

W przypadku korelacji stacjonarnej (3.38), estymata sygnału wyjściowego ma następującą postać:

$$\underline{X}(k) = X_c(k) + jX_s(k) = X(k)e^{-j\varphi}, \quad (3.50)$$

gdzie:
$$\varphi = \arctg \frac{X_s(k)}{X_c(k)}. \quad (3.51)$$

Obie składowe tworzą zatem amplitudę zespoloną sygnału.

Algorytm filtracyjny (3.40) ma odpowiedź podobną do (3.36), z tym, że faza estymaty jest przeciwna:

$$\underline{x}(k) = x_c(k) + jx_s(k) = X(k)e^{j\varphi}e^{jak}, \quad (3.52)$$

gdzie:
$$\varphi = \arctg \frac{x_s(k)}{x_c(k)} - ak. \quad (3.53)$$

We wszystkich powyższych przypadkach amplituda sygnału jest określona jak w (3.49).

Warto zaznaczyć, że do estymacji parametrów danej harmonicznej funkcja korelacyjna powinna mieć częstotliwość tej harmonicznej. Dokładność przetwarzania i zwłoka w odpowiedzi zależą od długości okna pomiarowego. Dla wybranej pary funkcji korelacyjnych w algorytmie stacjonarnym długość okna powinna być tak wybrana, aby funkcje te były ortogonalne w dowolnym położeniu okna [32]. Określa to następująca zależność

$$\sum_{i=0}^{M-1} h_c(k,i)h_s(k,i) = 0 \text{ dla dowolnego } k, \quad (3.54)$$

gdzie: M - liczba próbek w oknie pomiarowym.

W przypadku algorytmów stacjonarnych funkcje bazowe w (3.54) nie zależą od kroku k .

Gdy spełniony jest warunek (3.54), a ponadto, wymuszenie jest zgodne z modelem sygnałowym, to amplituda sygnału wyjściowego w stanie ustalonym jest niezmienna. Jest to tak zwany *estymator nieobciążony*. Do estymacji składowej podstawowej sygnału warunek ten jest spełniony wówczas, gdy długość okna pomiarowego jest wielokrotnością połowy okresu tej składowej [27], [42]. A zatem, najkrótsze okno pomiarowe algorytmu Fouriera jest równe połowie okresu składowej podstawowej. Mówi się wówczas o *półokresowym algorytmie Fouriera*, którego postać korelacyjna jest określona analogicznie do (3.38) parą następujących równań:

$$\begin{aligned} X_c(k) &= \frac{4}{N} \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} y(k-i) \sin(a(k+N/2-i) - a/2), \\ X_s(k) &= \frac{4}{N} \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} y(k-i) \cos(a(k+N/2-i) - a/2). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Jak poprzednio, funkcje korelacyjne są tu symetrycznie umieszczone w oknie pomiarowym (rys. 3.5).

Transmitancja estymatora (3.55) przyjmuje następującą formę:

$$\begin{aligned} H_c(j\omega') &= H_c(\omega') e^{-j\left(\frac{N-2}{4}a\omega'\right)}, \\ H_s(j\omega') &= H_s(\omega') e^{-j\left(\frac{N-2}{4}a\omega' - \frac{\pi}{2}\right)}, \end{aligned} \quad (3.56)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} H_c(\omega') &= p(\omega') \sin(a/2) \cos(\omega' a/2), \\ H_s(\omega') &= p(\omega') \cos(a/2) \sin(\omega' a/2), \end{aligned}$$

przy czym:
$$p(\omega') = \frac{-4 \cos(\pi\omega'/2)}{N \sin((\omega'+1)a/2) \sin((\omega'-1)a/2)}.$$

W miarę przesuwania się okna pomiarowego wzdłuż funkcji korelacyjnych transmitancje również zmieniają się zgodnie z następującymi zależnościami

$$\begin{aligned} H_c(j\omega', m) &= \cos(am) H_c(j\omega') - \sin(am) H_s(j\omega'), \\ H_s(j\omega', m) &= -\sin(am) H_c(j\omega') - \cos(am) H_s(j\omega'), \end{aligned} \quad m=0, 1, \dots, N-1. \quad (3.57)$$

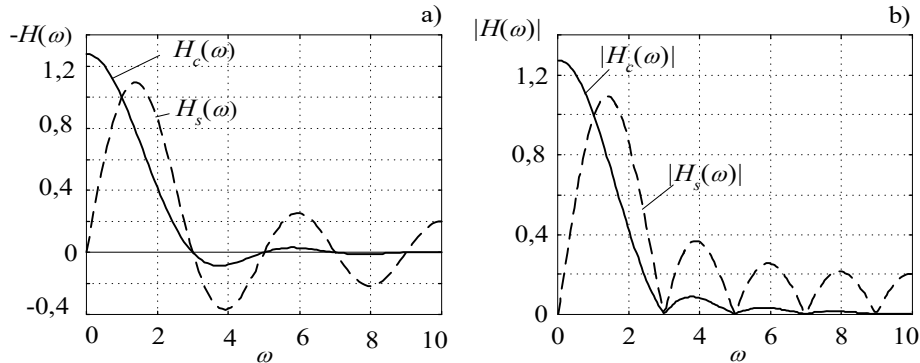
Charakterystyki: zerowo-fazowa oraz amplitudowa algorytmu półokresowego Fouriera są pokazane na rys. 3.9. Stan przejściowy algorytmu jest teraz skrócony do połowy okresu estymowanej harmonicznej ($N/2$ próbek), co jednak powoduje pogorszenie jego właściwości częstotliwościowych. Można zauważyć, że zarówno składowa stała, jak i druga harmoniczna nie są, w ogólnym przypadku, eliminowane podczas przetwarzania.

Algorytm (3.55) może być także zapisany w formie korelacji z przesuwającą się funkcją okna (algorytm niestacjonarny):

$$\begin{aligned} x_c(k) &= \frac{4}{N} \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} y(k-i) \cos(a(N/4-i) - a/2), \\ x_s(k) &= \frac{-4}{N} \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} y(k-i) \sin(a(N/4-i) - a/2) \end{aligned} \quad (3.58)$$

lub w formie pary filtrów:

$$\begin{aligned} x_c(k) &= \frac{4}{N} \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} y(k-i) \cos(a(i-N/4) + a/2), \\ x_s(k) &= \frac{4}{N} \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} y(k-i) \sin(a(i-N/4) + a/2). \end{aligned} \quad (3.59)$$



Rys. 3.9. Zerowo-fazowe (a) oraz amplitudowe (b) charakterystyki częstotliwościowe półokresowych algorytmów Fouriera, $N=20$

Zauważyć należy, że pomimo tego, iż w powyższych zależnościach użyte zostały inne funkcje bazowe niż w (3.55), to ich kształt w oknie pomiarowym jest taki sam.

Dzięki symetrii funkcji sinusoidalnej, zapis algorytmu Fouriera może być łatwo uproszczony, co prowadzi do znacznej oszczędności obliczeniowej [27], [42]. Zapisując sygnały wyjściowe algorytmu (3.38) dla dwóch kolejnych próbek można uzyskać następującą rekursywną postać przekształcenia pełnookresowego [28]:

$$\begin{aligned} X_c(k) &= X_c(k-1) + \frac{2}{N} \cos(ak)(y(k) - y(k-N)), \\ X_s(k) &= X_s(k-1) - \frac{2}{N} \sin(ak)(y(k) - y(k-N)). \end{aligned} \quad (3.60)$$

W przypadku okna półokresowego (3.55) postać rekursywna przyjmuje formę następujących równań

$$\begin{aligned} X_c(k) &= X_c(k-1) + \frac{4}{N} \cos(ak)(y(k) + y(k-N/2)), \\ X_s(k) &= X_s(k-1) + \frac{4}{N} \sin(ak)(y(k) + y(k-N/2)). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Można zauważyć, że wyrażenia w nawiasie prawej strony w powyższych równaniach określają przyrost przetwarzanego sygnału w okresie (3.60) lub w jego połowie (3.61). W obu przypadkach sygnał wyjściowy jest stacjonarny w tym samym sensie, jak ma to miejsce w algorytmach nierekursywnych.

Formę rekursywną można również uzyskać przekształcając niestacjonarne algorytmy korelacyjne. I tak, po zapisaniu wyrażen (3.36) dla

dwóch kolejnych próbek i wykonaniu niezbędnych przekształceń, otrzymuje się

$$\begin{aligned}x_c(k) &= x_c(k-1) \cos a - x_s(k-1) \sin a + \frac{2}{N} \cos a (y(k) - y(k-N)), \\x_s(k) &= x_c(k-1) \sin a + x_s(k-1) \cos a + \frac{2}{N} \sin a (y(k) - y(k-N)).\end{aligned}\quad (3.62)$$

Rekursywna forma podobnego algorytmu półokresowego (3.58) jest następująca

$$\begin{aligned}x_c(k) &= x_c(k-1) \cos a - x_s(k-1) \sin a - \frac{4}{N} \cos a (y(k) + y(k-N/2)), \\x_s(k) &= x_c(k-1) \sin a + x_s(k-1) \cos a - \frac{4}{N} \sin a (y(k) + y(k-N/2)).\end{aligned}\quad (3.63)$$

W celu rozpoczęcia obliczeń należy również określić wartości próbek sygnału wejściowego w oknie poprzedzającym obliczenia.

W podobny sposób można również uzyskać rekursywną postać pełnokresowego algorytmu filtracyjnego (3.40):

$$\begin{aligned}x_c(k) &= x_c(k-1) \cos a - x_s(k-1) \sin a + \frac{2}{N} (y(k) - y(k-N)), \\x_s(k) &= x_c(k-1) \sin a + x_s(k-1) \cos a\end{aligned}\quad (3.64)$$

oraz algorytmu półokresowego:

$$\begin{aligned}x_c(k) &= x_c(k-1) \cos a - x_s(k-1) \sin a + \frac{4}{N} (y(k) + y(k-N/2)), \\x_s(k) &= x_c(k-1) \sin a + x_s(k-1) \cos a.\end{aligned}\quad (3.65)$$

3.3.2 Algorytm Walsh

Przekształcenie Fouriera jest podstawą wielu algorytmów stosowanych do szybkich pomiarów wielkości elektrycznych. Ich modyfikacje zmierzają do uproszczenia obliczeń lub do uzyskania określonych właściwości metody. Jedną z modyfikacji polega na zastosowaniu w charakterze funkcji bazowych przekształcenia funkcji Walsh [17], [18].

Funkcje Walsh mają tę korzystną cechę, że wszystkie współczynniki użyte do ich reprezentacji zamykają się w zbiorze wartości ± 1 . Okresowa funkcja $f(k)$ równomiernie próbkowana w okresie $(0, T_w)$ jest w tym przypadku reprezentowana za pomocą następującej transformacji:

$$f(k) = \sum_{i=0}^{N-1} W_i \text{wal}(i, k/T_w), \quad (3.66)$$

gdzie: $f(k) = f(t_k)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, N - liczba próbek w przedziale $(0, T_w)$,

$$W_i = \frac{1}{T_w} \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \text{wal}(i, k/T_w). \quad (3.67)$$

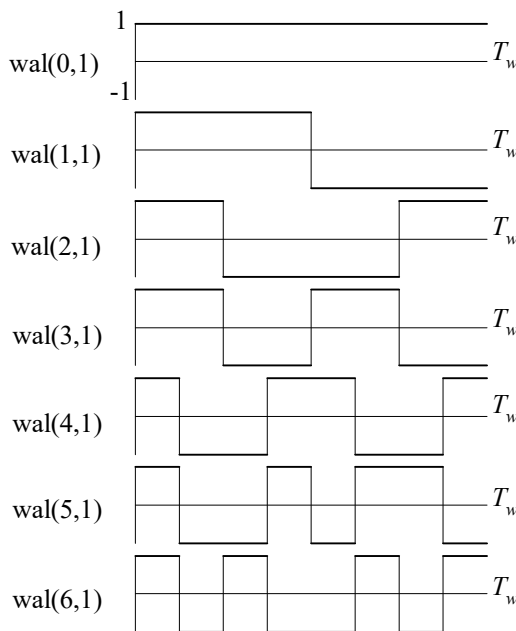
Funkcja Walsha $w(i, j/T_w) = w(i, j)$, gdzie i - rząd funkcji, jest dyskretną funkcją o wartości $+1$ lub -1 , która przecina oś czasu i razy w okresie T_w . Zastosowanie transformacji (3.66) jest korzystne wówczas, gdy liczba próbek N w okresie jest potęgą liczby 2 [30]. Gdy $N = 2^p$, p -liczba całkowita, to funkcja Walsha może być określona w postaci [18]:

$$w(i, j) = \prod_{r=0}^{p-1} (-1)^{(i_{p-r} + i_{p-r-1})j_r}, \quad (3.68)$$

gdzie: i, j należą do zbioru $(0, 1, 2, \dots, N-1)$ oraz i_k, j_k są bitami rozkładu BCD liczb i, j zgodnie z następującą relacją

$$i = \sum_{k=0}^{p-1} 2^k i_k \quad \text{oraz} \quad j = \sum_{k=0}^{p-1} 2^k j_k, \quad (3.69)$$

przy czym: bity $i_k = j_k = 0$ dla $k \geq p$.



Rys. 3.10. Pierwszych sześć funkcji Walsha w okresie jednostkowym T_w

Przebiegi pierwszych sześciu funkcji Walsha w okresie T_w są pokazane na rys. 3.10. Należy zauważyć, że $w(i, j)$ jest funkcją dyskretną w odróżnieniu od $w(i, t/T_w)$, która przedstawia funkcję czasu ciągłego.

Współczynniki Walsha (3.67) uzyskuje się przez dodawanie lub odejmowanie próbek sygnału $f(k)$ w zależności od wartości fali prostokątnej określonej przez funkcje Walsha. Współczynniki Walsha nie są bezpośrednio związane ze składowymi sygnałami, które wynikają z przekształcenia

Fouriera. Znane jest jednak bezpośrednie powiązanie pomiędzy przekształceniami Walsh'a i Fouriera, w którym amplitudy składowych sygnału określa się następująco [18]:

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}^T \mathbf{W}, \quad (3.70)$$

gdzie:

$$\mathbf{F} = [F_0 \ F_1 \ \dots \ F_{N-1}]^T \quad \text{- współczynniki przekształcenia,}$$

$$\mathbf{W} = [W_0 \ W_1 \ \dots \ W_{N-1}]^T \quad \text{- współczynniki przekształcenia Walsh'a zgodnie z (3.67),}$$

$$\mathbf{A} = \{a_{ij}\} \quad \text{- macierz przekształceń z następującymi współczynnikami:}$$

$$a_{i,1} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \text{wal}(i, j),$$

$$a_{i,2m} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sin(m(aj + a/2)) \text{wal}(i, j), \quad m = 1, 2, \dots, \quad (3.71)$$

$$a_{i,2m+1} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \cos(m(aj + a/2)) \text{wal}(i, j), \quad a = \frac{2\pi}{N}.$$

W ogólnym przypadku, macierz \mathbf{A} jest prostokątna, gdyż liczba składowych Fouriera i Walsh'a nie musi być taka sama. Na przykład, do określenia współczynników Fouriera związanych ze składową stałą, pierwszą i drugą harmoniczną na podstawie pierwszych piętnastu współczynników Walsh'a, macierz \mathbf{A}^T ma następującą postać:

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 & a_6 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & -a_3 & 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 & -a_6 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_5 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.72)$$

gdzie: $a_1 = 0,641$, $a_2 = 0,653$, $a_3 = -0,265$, $a_4 = -0,053$, $a_5 = -0,271$, $a_6 = -0,127$.

Współczynniki Fouriera wyrażają się zatem w następującej formie:

$$F_0 = W_0,$$

$$F_{1s} = 0,641W_1 - 0,265W_5 - 0,053W_9 - 0,127W_{13},$$

$$F_{1c} = 0,641W_2 + 0,265W_6 - 0,053W_{10} + 0,127W_{14}, \quad (3.73)$$

$$F_{2s} = 0,653W_3 - 0,271W_{11},$$

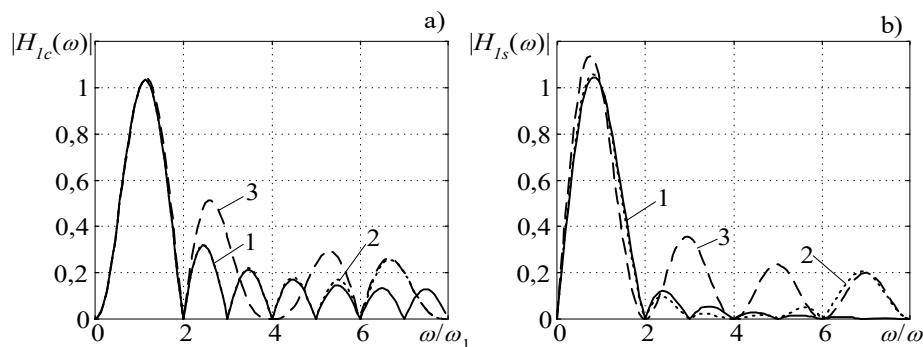
$$F_{2c} = 0,653W_4 + 0,271W_{12}.$$

Pary odpowiednich współczynników tworzą następnie zespoloną reprezentację składowych sygnału, na przykład wektor zespolony podstawowej harmonicznej jest następujący:

$$F_1 = F_{1c} + jF_{1s}. \quad (3.74)$$

Liczba składników Walsh'a wykorzystanych w reprezentacji (3.74) określa właściwości algorytmu. Charakterystyki amplitudowe estymatorów współczynników Fouriera (3.74) dla różnej liczby użytych współczynników Walsh'a są pokazane na rys. 3.11. Nie jest zaskoczeniem, że w miarę wzrostu liczby uwzględnianych współczynników Walsh'a, właściwości częstotliwościowe estymatorów zbliżają się do ich pierwowzorów. Na przykład, krzywe 1 dokładnie odwzorowują charakterystykę pełnokresowego algorytmu Fouriera.

Wyznaczenie współczynników Walsh'a jest proste - wymaga tylko dodawania odpowiednich próbek sygnału - jednak zbliżenie się tą drogą do przekształcenia Fouriera związane jest z wykonaniem operacji (3.70), co pomimo wielu zerowych współczynników macierzy \mathbf{A} , zmusza do wykonania wielu mnożeń. W celu pełnego wykorzystania prostoty przekształcenia Walsh'a stosuje się zredukowaną postać reprezentacji współczynników Fouriera w (3.70), ograniczoną tylko do pierwszego współczynnika Walsh'a. Prowadzi to do bardzo uproszczonego numerycznie algorytmu określania składowych ortogonalnych sygnału. W przypadku pełnego okresu jego postać jest następująca:



Rys. 3.11. Charakterystyki częstotliwościowe algorytmów uzyskanych z funkcji Walsh'a; 1 - uwzględnione wszystkie współczynniki, 2- dwa pierwsze współczynniki 3- tylko jeden współczynnik ; $N=16$

$$\begin{aligned}
 x_c(k) &= \frac{\sin(a/2)}{2} \sum_{i=0}^{N-1} y(k-i) \text{wal}(2, N-1-i), \\
 x_s(k) &= \frac{-\sin(a/2)}{2} \sum_{i=0}^{N-1} y(k-i) \text{wal}(1, N-1-i).
 \end{aligned}
 \tag{3.75}$$

Zmiana znaku w powyższych wyrażeniach wynika stąd, że polaryzacja funkcji $\text{wal}(1, i)$ oraz $\text{wal}(2, i)$ w oknie pomiarowym jest odwrotna niż w polaryzacja funkcji korelacyjnych w rozważanym algorytmie Fouriera. Ma to jednak znaczenie tylko wówczas, gdy ewentualnie porównywane są wyniki obu przekształceń.

Równania (3.75) mają podobną formę jak przekształcenia (3.36). Sinusoidalne funkcje korelacyjne zostały zamienione na funkcje Walsha tak, że:

$$\begin{aligned}
 \text{wal}(1, i) &= \text{sgn}(\sin(ai)), \\
 \text{wal}(2, i) &= \text{sgn}(\cos(ai)),
 \end{aligned}
 \tag{3.76}$$

$$1 \text{ gdy } f(x) > 0,$$

$$\text{gdzie: } \text{sgn}(f(x)) = 0 \text{ gdy } f(x) = 0,$$

$$-1 \text{ gdy } f(x) < 0.$$

Ponieważ w (3.76) zostały użyte tylko funkcje Walsha pierwszego i drugiego rzędu, więc ograniczenie liczby próbek N sygnału w oknie pomiarowym jest teraz spełnione gdy $N/2$ jest parzyste.

Estymator (3.76) jest nazywany *pełnokresowym algorytmem Walsha* [45]. Transformaty powyższych algorytmów można uzyskać podobnie jak w przypadku algorytmu Fouriera. Ogólna postać transformat jest przedstawiona równaniami (3.43), gdzie:

$$\begin{aligned}
 H_c(\omega') &= p(\omega') \sin(\pi\omega' / 4), \\
 H_s(\omega') &= p(\omega') \cos(\pi\omega' / 4),
 \end{aligned}
 \tag{3.77}$$

$$\text{przy czym: } p(\omega') = \frac{-2 \sin(a/2) \sin(\pi\omega' / 2) \sin(\pi\omega' / 4)}{\sin(a\omega' / 2)}.$$

Przebiegi funkcji (3.77) dla $N = 16$ są pokazane na rys. 3.12.

Algorytm korelacyjny Walsha w wersji stacjonarnej (gdy okno pomiarowe przesuwa się wzdłuż funkcji korelacyjnej) ma następującą postać:

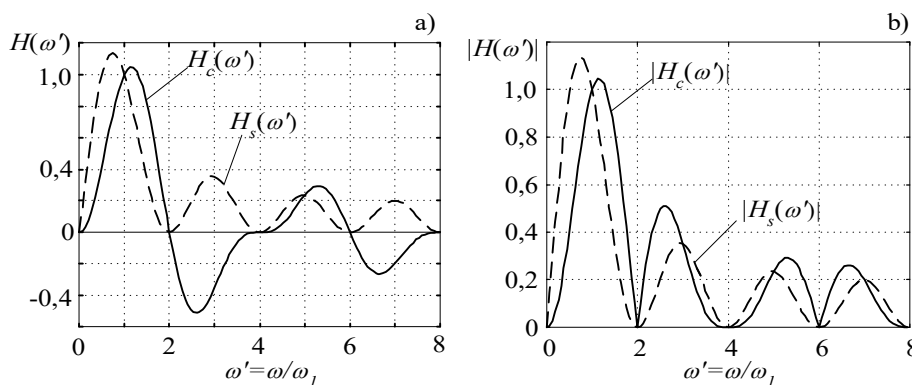
$$\begin{aligned}
 X_c(k) &= \frac{\sin(a/2)}{2} \sum_{i=0}^{N-1} y(k-i) \text{wal}(2, k+N-i-1), \\
 X_s(k) &= \frac{-\sin(a/2)}{2} \sum_{i=0}^{N-1} y(k-i) \text{wal}(1, k+N-i-1).
 \end{aligned}
 \tag{3.78}$$

Porównując charakterystyki częstotliwościowe algorytmów Fouriera i Walsha można zauważyć, że uproszczenie obliczeń w przypadku metody Walsha prowadzi do pogorszenia jej właściwości częstotliwościowych. Widać, że w tym przypadku eliminowane są tylko parzyste harmoniczne sygnału wejściowego (rys. 3.12). Jednak wówczas, gdy zakłócenia w postaci składowych nieparzystych są do pominięcia, algorytm jest bardzo efektywny [18], [44].

Półokresowy algorytm Walsha może być uzyskany przez przyjęcie w charakterze funkcji korelacyjnej funkcji Walsha dla okna równego połowie okresu podstawowej składowej sygnału. Widać z rys. 3.10, że wówczas należy wybrać dwie pierwsze funkcje Walsha w oknie o szerokości połowy okresu: $\text{wal}(0, i)$, $\text{wal}(1, i)$, $i = 0, 1, \dots, N/2 - 1$. Otrzymuje się wtedy następujące przekształcenie:

$$\begin{aligned}
 x_c(k) &= \sin(a/2) \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} y(k-i) \text{wal}(1, N/2-1-i), \\
 x_s(k) &= \sin(a/2) \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} y(k-i) \text{wal}(2, N/2-1-i).
 \end{aligned}
 \tag{3.79}$$

Jego właściwości częstotliwościowe są określone przez transmitancje:



Rys. 3.12. Charakterystyka zerowo-fazowa (a) oraz charakterystyka amplitudowa (b) pełnookresowego algorytmu Walsh; $N=16$

$$\begin{aligned} H_c(\omega') &= p(\omega') \cos(\pi\omega' / 4), \\ H_s(\omega') &= -p(\omega') \sin(\pi\omega' / 4), \end{aligned} \quad (3.80)$$

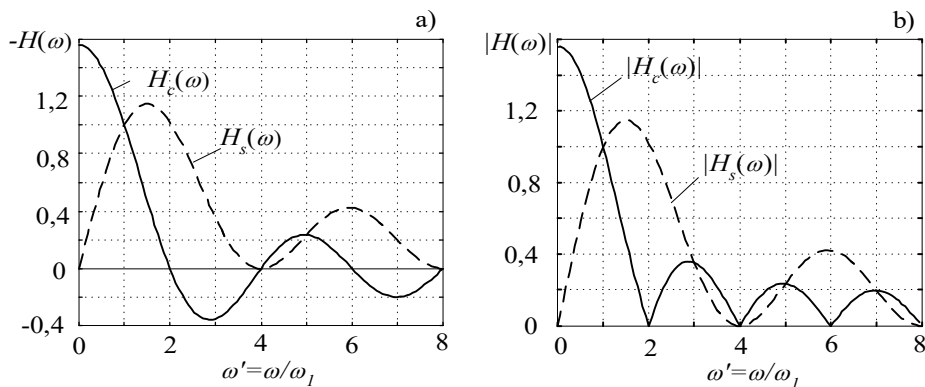
przy czym:
$$p(\omega') = \frac{2 \sin(a/2) \sin(\pi\omega' / 4)}{\sin(a\omega' / 2)}.$$

Przebiegi funkcji (3.80) oraz charakterystyki amplitudowe półokresowych estymatorów Walsh'a składowych ortogonalnych sygnału są pokazane na rys. 3.13. Podobnie, jak w przypadku półokresowego algorytmu Fouriera, metoda jest wrażliwa na obecność składowej stałej w sygnale.

Algorytm Walsh'a może być również przedstawiony w postaci rekursywnej. Na przykład, zapisując wyrażenia (3.75) dla dwóch kolejnych próbek otrzymuje się:

$$\begin{aligned} x_c(k) &= x_c(k-1) + \frac{\sin(a/2)}{2} (y(k) - y(k-N) - 2(y(k-N/4) - y(k-3N/4))), \\ x_s(k) &= x_s(k-1) - \frac{\sin(a/2)}{2} (y(k) + y(k-N) - 2y(k-N/2)). \end{aligned} \quad (3.81)$$

Widać, że w tym przypadku, składowe ortogonalne można uzyskać w wyniku wykonania rzeczywiście prostej procedury.



Rys. 3.13. Charakterystyka zerowo-fazowa (a) oraz charakterystyka amplitudowa (b) półokresowego algorytmu Walsh'a; $N=16$

3.4 Metoda najmniejszych kwadratów

3.4.1 Zależności podstawowe

Metoda najmniejszych kwadratów (MNK) jest często stosowana do określenia parametrów funkcji, która ma aproksymować dane uzyskane z pomiarów. Zakłada się, że pomiar jest obarczony błędem (w postaci zakłócającego szumu), który sprawia, że postulowana funkcja aproksymuje dany proces (przebieg wybranej zmiennej procesu) w przybliżony sposób. Zagadnienie takie występuje przy obserwacji sygnałów elektrycznych dostarczanych przez przekładniki pomiarowe. Zakłada się na przykład, że w stanie ustalonym przebiegi prądów i napięć przedstawiają idealne sinusoidy o znanej częstotliwości. Jednak, przy próbie pomiaru takiego sygnału okaże się, że poszczególne jego próbki odbiegają od założonego modelu – z powodu innej niż zakładano fazy, zakłóceń w torze pomiarowym, odchyłki częstotliwości i tak dalej. Metoda najmniejszych kwadratów jest narzędziem, które pozwala ‘najlepiej’ przybliżyć daną funkcję (model sygnałowy) do mierzonych danych. Określenie ‘najlepiej’ jest tu związane z warunkiem minimalizacji sumy kwadratów odchyłek pomiędzy założonym modelem i pomiarami.

Jeśli przyjąć, że dany sygnał jest aproksymowany za pomocą funkcji sinusoidalnej, to odpowiedni model może być reprezentowany dwiema ortogonalnymi składowymi tej sinusoidy (zgodnie z (3.14)). Gdy dostępny jest zbiór M kolejnych pomiarów, to relacje pomiędzy pomiarami a modelem mogą być zapisane w następujący sposób:

$$\begin{aligned} y(0) &= X_c & - 0 & + v(0), \\ y(1) &= X_c \cos a & - X_s \sin a & + v(1), \\ &\vdots & \vdots & \vdots \\ y(M-1) &= X_c \cos((M-1)a) & - X_s \sin((M-1)a) & + v(M-1), \end{aligned} \quad (3.82)$$

co w zapisie macierzowym przyjmuje następującą formę:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{v}, \quad (3.83)$$

gdzie:

$\mathbf{y} = [y(0) \ y(1) \ \dots \ y(M-1)]^T$ - wektor pomiarów,

$\mathbf{H} = [\mathbf{h}(0) \ \mathbf{h}(1) \ \dots \ \mathbf{h}(M-1)]^T$ - macierz modelu sygnałowego:

$$\mathbf{h}(i) = [\cos(ai) \quad \sin(ai)] = [h_c(i) \quad h_s(i)],$$

$\mathbf{v} = [v(0) \ v(1) \dots v(M-1)]^T$ - wektor błędów pomiarowych,

$\mathbf{x} = [X_c \ X_s]^T$ - wektor poszukiwanych parametrów modelu.

Wektor \mathbf{x} jest nazywany prawdziwym lub postulowanym wektorem parametrów i ze względu na obecność zakłóceń nie może być dokładnie wyznaczony. W przyjętym modelu sygnałowym ma on dwa współczynniki. W ogólnym przypadku wektor \mathbf{x} można określić następująco:

$$\mathbf{x} = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_L]^T, \quad (3.84)$$

gdzie: L - liczba estymowanych wielkości (liczba stanów modelu sygnałowego).

Estymata wektora parametrów $\hat{\mathbf{x}} \approx \mathbf{x}$ określa model mierzonych wielkości zgodnie z (3.83)

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}. \quad (3.85)$$

Celem estymacji według MNK jest uzyskanie takiego wektora $\hat{\mathbf{y}}$, który zapewnia minimalną wartość wektora błędów

$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} = \{e_i\}, i = 1, \dots, M \quad (3.86)$$

w sensie przyjętego kryterium. Funkcja kryterialna, która w tym przypadku podlega minimalizacji ma następującą ogólną postać [37], [47]

$$S_2(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{e}^T \mathbf{G} \mathbf{e} = \sum_{l=1}^M \sum_{j=1}^M g_{lj} e_j e_l, \quad (3.87)$$

gdzie: $\mathbf{G} = \{g_{lj}\}$ jest kwadratową macierzą wagową, która jest wybierana pod kątem minimalizacji (3.86). W przypadku, gdy $\mathbf{G} = \mathbf{1}$, $S_2(\hat{\mathbf{x}})$ jest normą L_2 (normą euklidesową) wektora $\mathbf{e}(\hat{\mathbf{x}})$, skąd pochodzi wartość indeksu w powyższym zapisie*.

Warunek minimalizacji (3.87) względem wektora $\hat{\mathbf{x}}$ ma następującą postać:

* W literaturze można spotkać wiele definicji norm wektorów i macierzy [21], [24], [41]. Zazwyczaj jednak norma L_p wektora \mathbf{x} jest określana następująco [3]:

$$\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{i=1}^M |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

$$\frac{\partial \mathcal{S}(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}}} = \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{x}}} [(\mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{G}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}})] = 2\mathbf{H}^T \mathbf{G} \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}} - 2\mathbf{H}^T \mathbf{G} \mathbf{y} = 0, \quad (3.88)$$

co prowadzi do tak zwanego *równania normalnego*

$$\mathbf{H}^T \mathbf{G} \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{H}^T \mathbf{G} \mathbf{y}. \quad (3.89)$$

Na podstawie (3.89) można określić poszukiwany wektor parametrów aproksymującej funkcji

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{P} \mathbf{H}^T \mathbf{G} \mathbf{y}, \quad (3.90)$$

gdzie: $\mathbf{P} = (\mathbf{H}^T \mathbf{G} \mathbf{H})^{-1}$. (3.91)

Można dowieść, że macierz wagowa \mathbf{G} , która minimalizuje funkcję kryterialną $S(\hat{\mathbf{x}})$ przyjmuje następującą wartość [47]

$$\mathbf{G} = \mathbf{R}^{-1}, \quad (3.92)$$

przy czym: $\mathbf{R} = E(\mathbf{v}\mathbf{v}^T)$ jest macierzą kowariancji pomiarów.

Gdy wartość oczekiwana wektora błędów pomiarowych jest zerowa: $E(\mathbf{v}) = 0$ oraz macierz wagowa została wybrana zgodnie z (3.92), to estymator MNK (3.90) jest optymalny [47].

W przypadku procesu deterministycznego, gdy brak jest informacji o zakłóceniach, należy założyć jednostkową macierz wagową

$$\mathbf{G} = \mathbf{1} \quad (3.93)$$

i algorytm (3.90) przyjmuje klasyczną postać

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{H}^{\#} \mathbf{y}, \quad (3.94)$$

gdzie: $\mathbf{H}^{\#}$ jest macierzą pseudoodwrotną

$$\mathbf{H}^{\#} = \mathbf{P} \mathbf{H}^T, \quad \mathbf{P} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1}. \quad (3.95)$$

Macierz $\mathbf{H}^{\#}$ określa model pomiarowy algorytmu MNK. Model pomiarowy jest nadokreślony, gdy liczba pomiarów jest większa od liczby estymowanych zmiennych $M > L$ (3.82) i tylko takie przypadki będą tutaj rozważane. Operacja określona przez $\hat{\mathbf{x}}$ (3.90) nazywa się estymacją liniową [27]. Należy podkreślić, że określenie 'liniowy model' stosowane w odniesieniu do MNK oznacza liniowość modelu względem parametru $\hat{\mathbf{x}}$, a nie względem niezależnej zmiennej k .

Analityczna postać algorytmu MNK dostarcza również informacji o błędzie estymacji. Elementy diagonalne macierzy \mathbf{P} są wariancjami

otrzymanych estymat. Jest to dogodny wskaźnik porównania różnych algorytmów pomiarowych.

Bezpośrednie zastosowanie ogólnej (ważonej) metody NK prowadzi do nierekursywnego algorytmu MNK.

3.4.2 Nierekursywny algorytm MNK

Można zauważyć, że składowe estymowanego wektora $\hat{\mathbf{x}}$ (3.90) są wynikiem mnożenia odpowiedniego wiersza macierzy $\mathbf{P}\mathbf{H}^T\mathbf{G}$ przez wektor \mathbf{y} . Można to zapisać w następującej postaci

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{P}_G \mathbf{H}_G \mathbf{y}, \quad (3.96)$$

$$\text{gdzie: } \mathbf{P}_G = (\mathbf{H}_G \mathbf{H})^{-1}, \quad \mathbf{H}_G = \mathbf{H}^T \mathbf{G}, \quad (3.97)$$

natomiast elementy wektora $\hat{\mathbf{x}}$ są obliczane według zależności

$$X_i = \sum_{j=1}^M h_{ij} y_j, \quad i = 1, 2, \dots, L, \quad (3.98)$$

$$\text{gdzie: } h_{ij} = \sum_{l=1}^L p_{il} h_{jl}^g, \quad (3.99)$$

$$p_{il} - \text{elementy macierzy: } \mathbf{P}_G = \{p_{il}\} = (\mathbf{H}_G^T \mathbf{H})^{-1} = \{q_{il}\}^{-1}, \quad (3.100)$$

$$h_{jl}^g - \text{elementy macierzy: } \mathbf{H}_G = \mathbf{H}^T \mathbf{G} = \{h_{jl}^g\}, \quad (3.101)$$

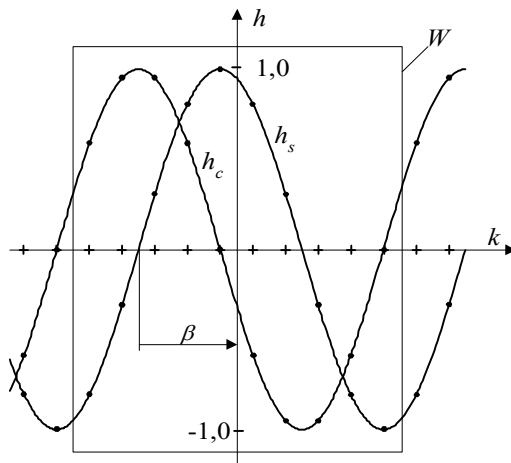
$$h_{jl}^g = \sum_{i=1}^M h_{ij} g_{il} \quad \text{oraz} \quad q_{il} = \sum_{i=1}^M h_{ji}^g h_{il}.$$

W praktycznych zastosowaniach należy obliczyć tylko wybrane składniki wektora $\hat{\mathbf{x}}$. Stąd też, w przypadku L -stanowego modelu sygnałowego, estymowanych jest tylko $K \leq L$ zmiennych.

Wyrażenie (3.96) przedstawia korelację sygnału wejściowego \mathbf{y} z ciągiem próbek, określonych odpowiednimi wierszami macierzy $\mathbf{P}_G \mathbf{H}_G$. Wielkości wyjściowe są uzyskiwane w wyniku jednoczesnego przetwarzania M ostatnich próbek sygnału wejściowego (M - długość stałego lub zmiennego okna pomiarowego), co jest charakterystyczne dla algorytmu nierekursywnego.

Nierekursywny algorytm MNK ma podobne właściwości dynamiczne, jak filtr lub korelator: możliwość uzyskania liniowej charakterystyki fazowej, stały okres stanu przejściowego, a ponadto, stosowane kryterium pozwala łatwo projektować algorytmy o zadanych

właściwościach. Charakterystyki algorytmu zależą od długości okna pomiarowego M , modelu sygnałowego reprezentowanego przez macierz \mathbf{H} oraz macierzy wagowej \mathbf{G} . Ta ostatnia odzwierciedla warunki pomiaru i razem z macierzą \mathbf{H} określają macierz \mathbf{H}_G (3.97). Macierz \mathbf{H}_G może być także uzyskana przez odpowiednią modyfikację modelu pomiarowego w celu osiągnięcia żądanych właściwości algorytmu. Stąd też rozróżnia się pojęcia *modelu sygnałowego* odzwierciedlonego przez macierz \mathbf{H} oraz *modelu pomiarowego* stosowanego do określenia macierzy \mathbf{H}_G . Warto zauważyć, że modele te mogą być takie same lub mogą się różnić między sobą. Będzie to wyjaśnione poniżej na przykładzie 3-stanowego modelu sygnałowego.



Rys. 3.14. Dwustanowy model sygnałowy

$$\mathbf{h}(j) = [h_c(j) \quad h_s(j)] = [\cos(aj + \beta - a(M-1)) \quad \sin(aj + \beta - a(M-1))], \quad (3.102)$$

$\mathbf{H} = [\mathbf{h}(0) \quad \mathbf{h}(1) \dots \mathbf{h}(M-1)]^T$ oraz $\mathbf{G} = \mathbf{1}$ (model deterministyczny).

Estymowany jest następujący wektor

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{X}_c \\ \hat{X}_s \end{bmatrix}. \quad (3.103)$$

Macierz \mathbf{P} przyjmuje następującą formę

$$\mathbf{P} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{bmatrix}^{-1} = p_0 \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}. \quad (3.104)$$

Podstawiając (3.102) do (3.104) otrzymuje się elementy macierzy $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$:

Dwustanowy algorytm Fouriera

Rozpatrywany poprzednio algorytm Fouriera wywodzi się z założenia, że model sygnałowy ma postać funkcji sinusoidalnej. Taki właśnie model przyjmuje się do estymacji składowych ortogonalnych sygnału metodą NK. Niech, dla ogólności, odpowiednie funkcje będą przesunięte o kąt β względem początku okna pomiarowego (rys. 3.14):

$$q_{11} = \sum_{i=0}^{M-1} \cos^2(aj + \beta - a(M-1)) = \frac{M}{2} + \frac{\sin(aM)\cos(2\beta - aM)}{2\sin a}, \quad (3.105)$$

$$q_{12} = \sum_{i=0}^{M-1} \sin(aj + \beta - a(M-1))\cos(aj + \beta - a(M-1)) = \frac{\sin(aM)\sin(2\beta - aM)}{2\sin a},$$

$$q_{22} = \sum_{i=0}^{M-1} \sin^2(aj + \beta - a(M-1)) = \frac{M}{2} - \frac{\sin(aM)\cos(2\beta - aM)}{2\sin a}$$

oraz, po wykonaniu prostych przekształceń:

$$p_0 = \frac{2\sin a}{(M\sin a)^2 - \sin^2(aM)}, \quad p_{12} = \sin(aM)\sin(a(M-1)), \quad (3.106)$$

$$p_{11} = M\sin a - \sin(aM)\cos(a(M-1)), \quad p_{22} = M\sin a + \sin(aM)\cos(a(M-1)).$$

Można łatwo sprawdzić, że dla okna pomiarowego o długości równej wielokrotności połowy okresu: $M = l \cdot N/2$, l - całkowite, macierz \mathbf{P} ma postać diagonalną:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_c & 0 \\ 0 & p_s \end{bmatrix} = \frac{2}{M} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.107)$$

Wynik estymacji na podstawie jednego zbioru danych jest określony zgodnie z (3.98)

W kolejnych krokach pomiarowych formuła (3.98) jest stosowana w odniesieniu do zgromadzonych M próbek sygnału y . Gdy funkcje h_c oraz h_s o długości $M = N$ próbek przemieszczają się wraz z oknem pomiarowym to algorytm przedstawia dobrze znaną pełnookresową procedurę korelacyjną

$$\begin{aligned} \hat{X}_c(k) &= \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} h_c(j)y(k+j-N+1), \\ \hat{X}_s(k) &= \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} h_s(j)y(k+j-N+1), \end{aligned} \quad k=0, 1, \dots \quad (3.108)$$

gdzie dla $\beta = 0$ (3.102):

$$\begin{aligned} h_c(j) &= \cos(aj + a/2), \\ h_s(j) &= \sin(aj + a/2), \end{aligned} \quad j = 0 \dots N-1. \quad (3.109)$$

W celu rozpoczęcia obliczeń (3.108) ($k=0$), powinny być określone dane w początkowym oknie pomiarowym ($y(-N+1)\dots y(0)$).

Powyższy algorytm może być także zapisany w formie ze stacjonarnym wyjściem. Wówczas współczynniki h_c oraz h_s są określone przez funkcje, które nie przesuwają się wraz z oknem pomiarowym

$$\begin{aligned}\hat{X}_c(k) &= \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} h_c(k+j-N+1)y(k+j-N+1), \\ \hat{X}_s(k) &= \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} h_s(k+j-N+1)y(k+j-N+1),\end{aligned}\quad k=0,1,\dots, \quad (3.110)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}h_c(j) &= \cos(aj + a/2), \\ h_s(j) &= \sin(aj + a/2),\end{aligned}\quad j=0,1,\dots. \quad (3.111)$$

Można zauważyć, że powyższe relacje są identyczne jak w przypadku wcześniej rozważanych algorytmów Fouriera. W ten sam sposób można uzyskać również algorytm półokresowy ($M=N/2$). W ogólnym przypadku, przy dowolnej długości M okna pomiarowego, algorytm ze stacjonarnymi sygnałami wyjściowymi ma następującą postać

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_c(k) \\ \hat{X}_s(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11}(k) & p_{12}(k) \\ p_{21}(k) & p_{22}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X'_c(k) \\ X'_s(k) \end{bmatrix}, \quad k=0,1,\dots, \quad (3.112)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}X'_c(k) &= \sum_{j=0}^{M-1} h_c(k+j-M+1)y(k+j-M+1), \\ X'_s(k) &= \sum_{j=0}^{M-1} h_s(k+j-M+1)y(k+j-M+1),\end{aligned}$$

$h_c(j)$, $h_s(j)$ - jak w (3.111),

natomiast współczynniki $p_{ij}(k)$ są obliczane na podstawie (3.104)-(3.105) po podstawieniu: $\beta = ak$. Funkcje określające współczynniki $p_{ij}(k)$ są periodyczne z okresem równym $N/2$ próbek.

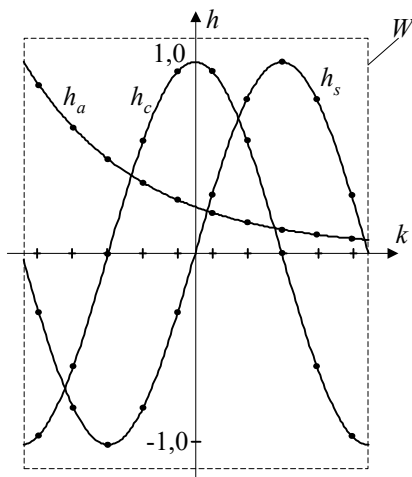
Średnia wartość współczynników nediagonalnych w okresie jest równa zero, natomiast funkcje tworzące współczynniki diagonalne są przesunięte o wielkość $2/M$. Jest to jednocześnie wariancja estymatora składowych ortogonalnych. Widać, że wartość błędu estymacji maleje wraz z poszerzeniem okna pomiarowego.

Trójstanowy algorytm Fouriera

Zakłada się, że obserwowany sygnał jest utworzony ze składowej podstawowej oraz zanikającej aperiodycznie składowej stałej (składowej aperiodycznej). Postępując podobnie jak w przypadku modelu dwustanowego (3.102), model rozpatrywanego sygnału można zapisać w następującej formie (w odróżnieniu od (3.102) przyjęto tu $\beta = aN - a/2$ - rys. 3.15):

$$\mathbf{h}(j) = [h_c(j) \ h_s(j) \ h_a(j)] = [\cos(aj) \ \sin(aj) \ \exp(bj)], \quad (3.113)$$

gdzie: $b = -\frac{T_1}{NT_a}$, T_1 - okres składowej podstawowej, T_a - stała czasowa zanikania składowej aperiodycznej.



Rys. 3.15. Trójstanowy model sygnałowy

W modelu (3.113) występują trzy składowe, a zatem odpowiedni wektor estymowanych wielkości przyjmie następującą postać

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{X}_c \\ \hat{X}_s \\ \hat{X}_a \end{bmatrix}. \quad (3.114)$$

Celem estymacji jest określenie składowych ortogonalnych, a więc tylko dwie wielkości: \hat{X}_c oraz \hat{X}_s są przedmiotem zainteresowania.

Poszukiwany jest algorytm w ogólnej formie (3.98), czyli w postaci ważonej procedury MNK. Zmodyfikowana macierz modelu pomiarowego ma następującą strukturę

$$\mathbf{H}_G = [\mathbf{h}_G(0) \quad \mathbf{h}_G(1) \quad \dots \quad \mathbf{h}_G(M-1)]^T, \quad (3.115)$$

$$\text{gdzie: } \mathbf{h}_G(j) = [\cos(aj) - d_c \quad \sin(aj) - d_s \quad \exp(bj)], \quad (3.116)$$

d_c, d_s - współczynniki, które zależą od stałej czasowej zanikania składowej aperiodycznej.

Macierz \mathbf{P}_G jest określona zgodnie z (3.100), co po uwzględnieniu (3.113) oraz (3.116) prowadzi do następujących związków:

$$\mathbf{P}_G^{-1} = \{q_{ij}\}, \quad i, j = 1..3, \quad (3.117)$$

gdzie dla dwóch pierwszych wierszy

$$q_{11} = \sum_{i=0}^{M-1} (\cos(ai) - d_c) \cos(ai), \quad q_{22} = \sum_{i=0}^{M-1} (\sin(ai) - d_s) \sin(ai),$$

$$q_{12} = \sum_{i=0}^{M-1} (\cos(ai) - d_c) \sin(ai), \quad q_{21} = \sum_{i=0}^{M-1} (\sin(ai) - d_s) \cos(ai),$$

$$q_{13} = \sum_{i=0}^{M-1} (\cos(ai) - d_c) \exp(bi), \quad q_{23} = \sum_{i=0}^{M-1} (\sin(ai) - d_s) \exp(bi).$$

Nieznane parametry d_c oraz d_s mogą być wyznaczone na podstawie warunków diagonalizacji macierzy \mathbf{P}_G^{-1} (jej dwóch pierwszych wierszy): $q_{12} = q_{21} = 0$ oraz $q_{13} = q_{23} = 0$. Te warunki pozwalają uprościć algorytm. Pierwszy z nich jest spełniony dla $M = lN$, l - całkowite, natomiast z drugiego wynikają następujące zależności [35]:

$$\begin{aligned} d_c &= D \cos \delta, \\ d_s &= D \sin \delta, \end{aligned} \quad (3.118)$$

gdzie:

$$\delta = \arctg \left(\frac{\sin a}{\cos a - \exp(b)} \right), \quad (3.119)$$

$$D = \frac{1 - \exp(b)}{\sqrt{(\cos a - \exp(b))^2 + \sin^2 a}}. \quad (3.120)$$

Dla okna pomiarowego o długości równej wielokrotności okresu zachodzi związek: $q_{11} = q_{22} = M/2$.

Można łatwo sprawdzić, że diagonalizacja dwóch pierwszych wierszy macierzy \mathbf{P}_G^{-1} jest równoważna diagonalizacji tych samych wierszy macierzy \mathbf{P}_G (w przypadku macierzy 3×3). Estymator przyjmuje zatem postać jak w (3.108), gdzie:

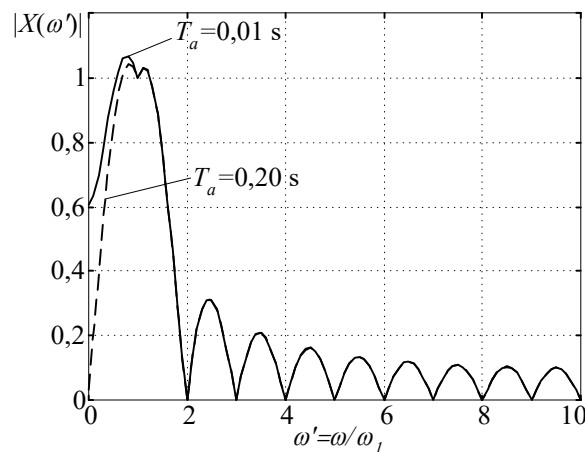
$$\begin{aligned} h_c(j) &= \cos(aj) - d_c, \\ h_s(j) &= \sin(aj) - d_s. \end{aligned} \quad (3.121)$$

Charakterystyka częstotliwościowa tego algorytmu dla dwóch różnych stałych czasowych zanikania składowych aperiodycznych jest pokazana na rys. 3.16. Ponieważ modele obu rozważanych estymatorów (2- i 3-stanowego) różnią się jedynie składnikiem wykładniczym (który charakteryzuje się przewagą dolnego pasma częstotliwościowego), to również obie charakterystyki różnią się jedynie w zakresie niskich częstotliwości.

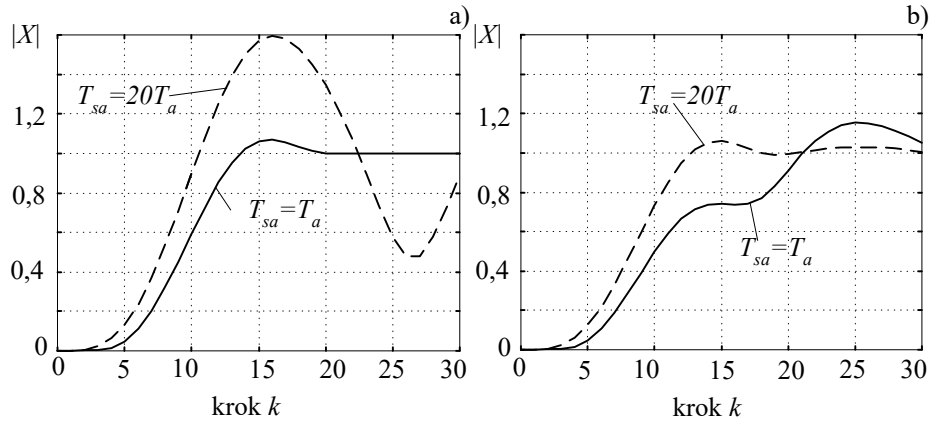
Rysunek 3.17 przedstawia odpowiedź czasową 3-stanowego algorytmu, w którym przyjęto $T_a = 0,01$ s, na wymuszenie w postaci następującego sygnału

$$y(k) = \cos(ak) - \exp(bk),$$

gdzie: a oraz b są takie jak w (3.113) natomiast $T_a = T_{sa} = 0,01$ s, oraz $T_a = T_{sa} = 0,20$ s.



Rys. 3.16. Charakterystyka częstotliwościowa 3-stanowego estymatora dla dwóch różnych stałych czasowych zanikania składowej aperiodycznej; $N = 20$



Rys. 3.17. Odpowiedź 3-stanowego estymatora na sygnał z różnymi parametrami składowej aperiodycznej: $T_a=0,01$ s (a) oraz $T_a=\infty$ (b); $N=20$

Na podstawie rys. 3.17a widać, że algorytm jest czuły na zmianę stałej czasowej zanikania składowej aperiodycznej: zakłócenie to jest całkowicie eliminowane gdy model jest zgodny z mierzonym sygnałem; w przeciwnym przypadku powstają duże błędy estymacji. Mniejsze błędy są obserwowane gdy zastosuje się tu estymator dwustanowy (rys. 3.17b).

W ogólnym przypadku, gdy stała czasowa zanikania jest nieznaną, lepszym rozwiązaniem jest przyjęcie tej składowej jako wartości stałej. Odpowiada to założeniu $T_a = \infty$. Model sygnałowy ma wówczas następującą formę (funkcje bazowe są symetryczne względem środka okna pomiarowego)

$$\mathbf{h}_G(j) = [\cos(aj - a(M-1)/2) - d_c \quad \sin(aj - a(M-1)/2) - d_s \quad 1]. \quad (3.122)$$

Powtarzając procedurę syntezy estymatora otrzymuje się następujący algorytm określania składowych ortogonalnych sygnału

$$\begin{aligned} X_c(k) &= p_c \sum_{j=0}^{M-1} h_c(j) y(k+j-M+1), \\ X_s(k) &= p_s \sum_{j=0}^{M-1} h_s(j) y(k+j-M+1), \end{aligned} \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.123)$$

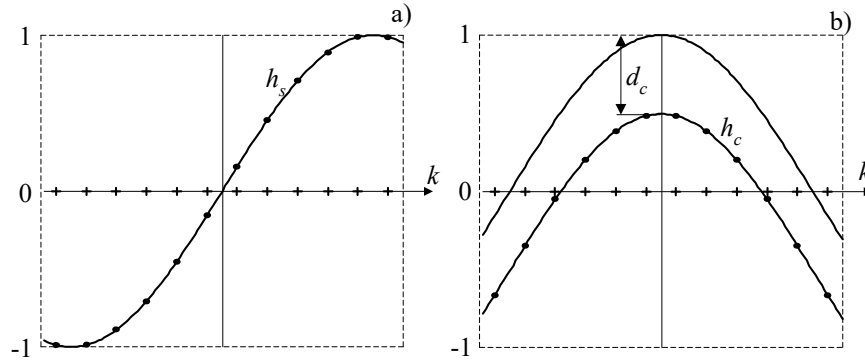
gdzie:

$$\begin{aligned} h_c(j) &= \cos(aj - a(M-1)/2) - \frac{\sin \frac{aM}{2}}{M \sin \frac{a}{2}}, \\ h_s(j) &= \sin(aj - a(M-1)/2), \end{aligned} \quad (3.124)$$

$$p_c = \frac{1}{q_{11}} = \frac{2M \sin a}{M^2 \sin a + M \sin(aM) - 4 \operatorname{ctg} \frac{a}{2} \sin^2 \frac{aM}{2}}, \quad (3.125)$$

$$p_s = \frac{1}{q_{22}} = \frac{2}{M - \frac{\sin(aM)}{\sin a}}.$$

Można zauważyć, że współczynnik $d_s = 0$ (3.124) co wynika stąd, że funkcja korelacyjna $h_s(j)$ jest w tym przypadku nieparzysta względem początku układu współrzędnych i ma zerową wartość średnią w oknie (rys. 3.18). Można ponadto zauważyć, że dla okna pełnookresowego algorytm (3.123)-(3.125) sprowadza się do estymatora dwustanowego.



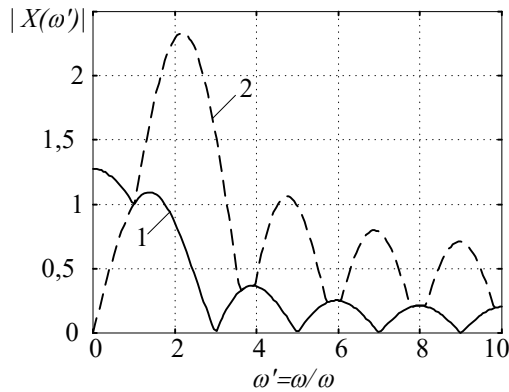
Rys. 3.18. Okno pomiarowe 2-stanowego estymatora z przesuniętą funkcją bazową dla składowej kosinusowej (b)

Dla ważnego przypadku półokresowego okna pomiarowego ($M = N/2$), estymator (3.123) ma następujące parametry:

$$h_c(j) = \cos\left(aj - \frac{a(N-2)}{4}\right) - \frac{2}{N \sin \frac{a}{2}}, \quad h_s(j) = \sin\left(aj - \frac{a(N-2)}{4}\right), \quad (3.126)$$

$$p_c = \frac{4N \sin^2 \frac{a}{2}}{N^2 \sin^2 \frac{a}{2} - 8}, \quad p_s = \frac{4}{N}. \quad (3.127)$$

W porównaniu z 2-stanowym estymatorem półokresowym, etymata składowej X_c ma w tym przypadku większą wariancję ($p_c > 4/N$), jednak teraz składowa stała jest w pełni eliminowana. Charakterystyki częstotliwościowe obu algorytmów są pokazane na rys. 3.19. Można



Rys. 3.19. Charakterystyka częstotliwościowa półokresowego estymatora bez korekcji (1) oraz z korekcją składowej stałej (2)

zauważyć, że poprawa charakterystyki w zakresie niskich częstotliwości okupiona jest jej pogorszeniem w pozostałym zakresie.

Powyższe przykłady ilustrują sposób projektowania algorytmów nierekursywnych na bazie metody najmniejszych kwadratów. Metoda ta znalazła szerokie zastosowanie w projektowaniu algorytmów zabezpieczeń cyfrowych.

3.4.3 Rekursywna metoda najmniejszych kwadratów

Nierekursywny algorytm MNK jest optymalny (przy założonych warunkach) dla stałego okna pomiarowego. To oznacza, że optymalna estymata sygnału wyjściowego $\hat{\mathbf{x}}$ jest określana na podstawie M wartości sygnału wejściowego przy określonym modelu pomiarowym wyrażonym przez macierz \mathbf{H}_G . Jest to klasyczny algorytm z przesuwającym się oknem pomiarowym. W rzeczywistości, w miarę przebiegu obserwowanego procesu ilość informacji o nim zwiększa się, co mogłoby uzasadniać zwiększanie okna pomiarowego M . Jednak tego typu algorytm miałby ewidentne niedostatki z powodu przetwarzania dużej liczby danych. Ponadto, zakłada się w nim stałą wartość estymowanego wektora $\hat{\mathbf{x}}$, co uniemożliwia śledzenie dynamiki procesu. W takim przypadku może być stosowana rekursywna wersja algorytmu MNK.

Rekursywny algorytm metody najmniejszych kwadratów (w literaturze używa się określenia algorytm RLS od ang. *Recursive Least Square*) pozwala uzyskać dobrą dokładność estymacji z zachowaniem krótkiego okna pomiarowego. Algorytm ten wywodzi się z omawianej powyżej nierekursywnej wersji MNK.

Zakłada się, że estymacja jest prowadzona według algorytmu (3.90) przez kolejnych k kroków. Ponadto, w tym czasie wektor estymowanych wielkości $\hat{\mathbf{x}}(i) = \hat{\mathbf{x}}(k)$, $i = 1, \dots, k$, okno pomiarowe z M próbkami oraz macierz wagowa \mathbf{G} pozostają niezmiennie. Jeśli w odniesieniu do

rozpatrywanego zbioru k kolejnych estymat zastosować kryterium MNK (3.87), to zależność (3.89) przyjmie następującą postać [47]

$$\sum_{i=1}^k \mathbf{H}^T(i) \mathbf{G} \mathbf{H}(i) \hat{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^k \mathbf{H}^T(i) \mathbf{G} \mathbf{y}(i). \quad (3.128)$$

Na podstawie (3.128) wektor $\hat{\mathbf{x}}(k)$ można określić jako:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{P}(k) \mathbf{b}(k), \quad (3.129)$$

gdzie:

$$\mathbf{P}^{-1}(k) = \sum_{i=1}^k \mathbf{H}^T(i) \mathbf{G} \mathbf{H}(i), \quad (3.130)$$

$$\mathbf{b}(k) = \sum_{i=1}^k \mathbf{H}^T(i) \mathbf{G} \mathbf{y}(i). \quad (3.131)$$

Dwa ostatnie równania można zapisać w postaci rekursywnej

$$\mathbf{P}^{-1}(k) = \mathbf{P}^{-1}(k-1) + \mathbf{H}^T(k) \mathbf{G} \mathbf{H}(k), \quad (3.132)$$

$$\mathbf{b}(k) = \mathbf{b}(k-1) + \mathbf{H}^T(k) \mathbf{G} \mathbf{y}(k). \quad (3.133)$$

Zapisując (3.129) dla dwóch kolejnych kroków $k-1$ oraz k , po uwzględnieniu (3.132) i (3.133) uzyskuje się

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \hat{\mathbf{x}}(k-1) + \mathbf{P}(k) \mathbf{H}^T(k) \mathbf{G} [\mathbf{y}(k) - \mathbf{H}(k) \hat{\mathbf{x}}(k-1)], \quad (3.134)$$

gdzie macierz $\mathbf{P}(k)$ może być określona na podstawie (3.132)

$$\mathbf{P}(k) = [\mathbf{P}^{-1}(k-1) + \mathbf{H}^T(k) \mathbf{G} \mathbf{H}(k)]^{-1}. \quad (3.135)$$

Bardziej dogodna forma (3.135) może być wyprowadzona na podstawie lematu o odwrotności macierzy, który jest formułowany następująco [21], [38]. Jeśli nieosobliwe macierze \mathbf{A} i \mathbf{B} ($L \times L$) oraz \mathbf{D} ($M \times M$) tworzą następujący związek

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1} + \mathbf{C} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C}^T, \quad (3.136)$$

gdzie: \mathbf{C} jest macierzą ($L \times M$), to zachodzi równość

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{C} [\mathbf{D} + \mathbf{C}^T \mathbf{B} \mathbf{C}]^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{B}. \quad (3.137)$$

Zastosowanie tej zależności do (3.135) daje

$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{P}(k-1) - \mathbf{K}(k) \mathbf{H}(k) \mathbf{P}(k-1), \quad (3.138)$$

gdzie:

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}(k-1) \mathbf{H}^T(k) [\mathbf{G}^{-1} + \mathbf{H}(k) \mathbf{P}(k-1) \mathbf{H}^T(k)]^{-1}. \quad (3.139)$$

Z powyższego łatwo uzyskać następujący związek:

$$\mathbf{P}(k)\mathbf{H}^T(k)\mathbf{G} = \mathbf{K}(k). \quad (3.140)$$

Ostatecznie metoda RLS sprowadza się do następującego algorytmu.

Algorytm 3.1. *Rekursywna metoda najmniejszych kwadratów (RLS)*

- Określić wartość początkową macierzy kowariancji $\mathbf{P}(0)$ oraz estymowanego wektora $\hat{\mathbf{x}}(0)$.

W kolejnych krokach obliczeniowych wykonać następujące działania:

- Określić macierz wzmocnienia

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}(k-1)\mathbf{H}^T(k)\left[\mathbf{G}^{-1} + \mathbf{H}(k)\mathbf{P}(k-1)\mathbf{H}^T(k)\right]^{-1}.$$
- Obliczyć nową wartość estymowanego wektora

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \hat{\mathbf{x}}(k-1) + \mathbf{K}(k)[\mathbf{y}(k) - \mathbf{H}(k)\hat{\mathbf{x}}(k-1)].$$
- Obliczyć nową wartość macierzy kowariancji błędów

$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{P}(k-1) - \mathbf{K}(k)\mathbf{H}(k)\mathbf{P}(k-1). \quad \square$$

Można zauważyć, że macierz wzmocnienia $\mathbf{K}(k)$ nie zależy od pomiarów i może być określona przed rozpoczęciem obliczeń. Ponadto, długość okna pomiarowego nie wpływa na sposób obliczeń i może być przyjęta $M=1$.

Wartość początkowa macierzy kowariancji $\mathbf{P}(0)$ może być określona na podstawie (3.91):

$$\mathbf{P}(0) = \left[\mathbf{H}^T(0)\mathbf{G}\mathbf{H}(0)\right]^{-1},$$

co wymaga odwołania się do początkowego 'okna pomiarowego'. Jeśli nie jest dostępna żadna informacja *a priori*, to przyjmuje się:

$\mathbf{P}(0) = \delta\mathbf{I}$, gdzie $\delta \gg 0$ (jest to odpowiednio 'duża' liczba - patrz przykład poniżej).

Podobnie, wartość początkową wektora $\hat{\mathbf{x}}(0)$ można przyjąć za (3.90):

$$\hat{\mathbf{X}}(0) = \mathbf{P}(0)\mathbf{H}^T(0)\mathbf{G}\mathbf{y}(0)$$

lub założyć $\hat{\mathbf{x}}(0) = 0$.

W zastosowaniach do zabezpieczeń elektroenergetycznych wektor mierzonych wartości $\mathbf{y}(k)$ zazwyczaj reprezentuje jedną tylko wielkość napięcia lub prądu $y(k)$. W tym przypadku, macierz $\mathbf{H}(k)$ sprowadza się do jednego tylko wiersza $\mathbf{h}(k)$ [4], [37]. Wówczas rozważany algorytm RLS przyjmuje następującą postać.

Algorytm 3.2. *Rekursywna metoda najmniejszych kwadratów dla układów jednoweściowych*

- Określić wartość początkową macierzy kowariancji $\mathbf{P}(0)$ oraz estymowanego wektora $\hat{\mathbf{x}}(0)$.

W kolejnych krokach obliczeniowych wykonać następujące działania:

- Określić wektor wzmocnienia

$$\mathbf{k}(k) = \frac{\mathbf{P}(k-1)\mathbf{h}^T(k)}{r + \mathbf{h}(k)\mathbf{P}(k-1)\mathbf{h}^T(k)}.$$

- Obliczyć nową wartość estymowanego wektora $\hat{\mathbf{x}}(k) = \hat{\mathbf{x}}(k-1) + \mathbf{k}(k)[y(k) - \mathbf{h}(k)\hat{\mathbf{x}}(k-1)]$.
- Obliczyć nową wartość macierzy kowariancji błędów
- $\mathbf{P}(k) = \mathbf{P}(k-1) - \mathbf{k}(k)\mathbf{h}(k)\mathbf{P}(k-1)$,

gdzie r jest zdeformowaną do jednego elementu macierzą \mathbf{R} (3.92); w przypadku modelu deterministycznego $r=1$. □

Powyższy algorytm dla $r=1$ ma 'nieskończoną pamięć', co zgodnie z założeniami oznacza, że rezultat estymacji w k -tym kroku zależy od wszystkich poprzednich wartości sygnału wejściowego. Taka właściwość algorytmu może się okazać bardzo niekorzystna, gdyż poprzednie zakłócenia przenoszą się na bieżący pomiar. Cecha ta może być ograniczona przez wprowadzenie *współczynnika zapominania* [47]. W tym celu, kryterium MNK (3.87) jest modyfikowane do następującej postaci (zapisane tutaj tylko dla jednej zmiennej)

$$S_2(k) = \sum_{i=1}^k \lambda^{k-i} [y(i) - \mathbf{h}(i)\hat{\mathbf{x}}(i)]^2, \quad 0 < \lambda \leq 1. \quad (3.141)$$

Można zauważyć, że współczynnik zapominania λ odgrywa tu tę samą rolę, co współczynnik wagowy w poprzednim algorytmie, tyle że jest to tym razem wykładnicza funkcja czasu (malejąca lub co najwyżej niezmienna). Stąd też, końcowy algorytm ma podobną formę.

Algorytm 3.3. *Rekursywna metoda najmniejszych kwadratów z zapominaniem*

- Określić wartość początkową macierzy kowariancji $\mathbf{P}(0)$ oraz estymowanego wektora $\hat{\mathbf{x}}(0)$.

W kolejnych krokach obliczeniowych wykonać następujące działania:

- Określić wektor wzmocnienia

$$\mathbf{k}(k) = \frac{\mathbf{P}(k-1)\mathbf{h}^T(k)}{\lambda + \mathbf{h}(k)\mathbf{P}(k-1)\mathbf{h}^T(k)}.$$

- Obliczyć nową wartość estymowanego wektora

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \hat{\mathbf{x}}(k-1) + \mathbf{k}(k)[y(k) - \mathbf{h}(k)\hat{\mathbf{x}}(k-1)].$$

- Obliczyć nową wartość macierzy kowariancji błędów

$$\mathbf{P}(k) = \frac{1}{\lambda} [\mathbf{P}(k-1) - \mathbf{k}(k)\mathbf{h}(k)\mathbf{P}(k-1)],$$

gdzie λ jest współczynnikiem zapominania. □

Widać, że różnica występuje tylko w sposobie obliczania macierzy $\mathbf{P}(k)$. Współczynnik zapominania λ wymusza wykładnicze zapominanie poprzednich danych pomiarowych i dlatego dane bliższe momentu estymacji mają większy wpływ na jej wynik [36], [47].

Przykład 3.1. Przeprowadzić analizę 3-stanowego algorytmu RLS ze współczynnikiem zapominania i porównać go z algorytmem nierekursywnym MNK. W charakterze wymuszenie przyjąć następujący sygnał

$$y(t) = \cos(\omega_1 t - \varphi) - e^{-\frac{t}{T}} \cos \varphi, \text{ gdzie } \omega_1 = 100\pi, T = 0,02 \text{ s}, \\ \varphi = 0, \text{ który jest próbkowany z częstotliwością } f_T = 1000 \text{ Hz.}$$

Liczba próbek w okresie wynosi $N = 20$.

Przyjmuje się 3-stanowy model sygnałowy o postaci

$$\mathbf{h}(k) = [\cos(ak) \quad \sin(ak) \quad 1]$$

z wektorem estymowanych wielkości

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = [\hat{X}_c \quad \hat{X}_s \quad \hat{X}_a]^T.$$

Algorytm nierekursywny można zaprojektować według schematu podanego w poprzednim punkcie. W celu analizy dynamiki algorytmu można przyjąć, że pomiar zaczyna się w trzeciej próbce (pierwsze okno pomiarowe ma trzy próbki) i z każdą następną próbką okno zwiększa się aż do osiągnięcia N próbek. Odpowiedni algorytm jest określony następującym równaniem

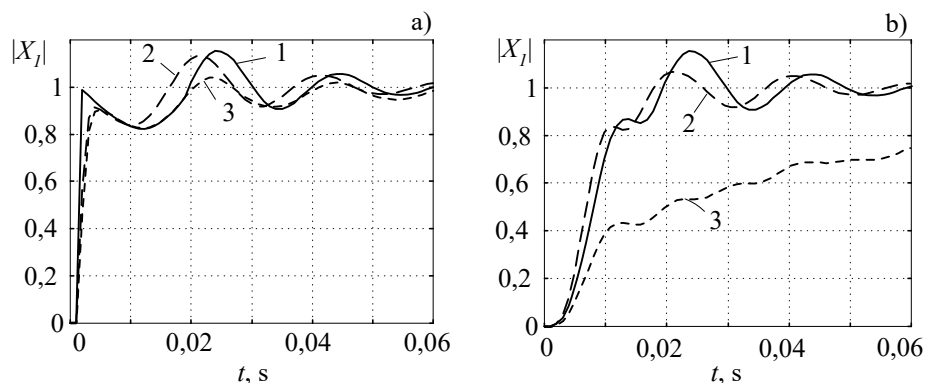
$$\hat{\mathbf{x}}(k) = (\mathbf{H}^T(k)\mathbf{H}(k))^{-1} \mathbf{H}^T(k)\mathbf{y}(k),$$

gdzie w kolejnych krokach macierze pomiarowe $\mathbf{H}(k)$ przyjmują następującą formę

$$\mathbf{H}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \cos a & -\sin a & 1 \\ \cos 2a & -\sin 2a & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \cos a & -\sin a & 1 \\ \cos 2a & -\sin 2a & 1 \\ \cos 4a & -\sin 4a & 1 \end{bmatrix}, \dots$$

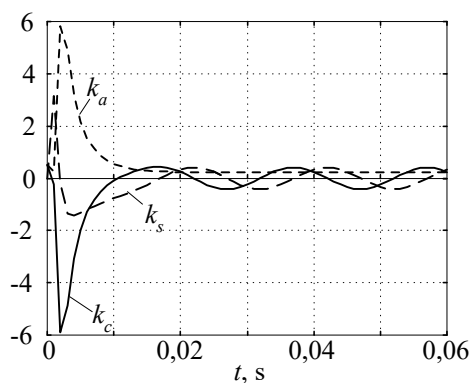
aż do $\mathbf{H}(N-1)$, która to macierz ma rozmiar $N \times 3$ (dla algorytmu pełnokresowego). Podobnie rozszerza się również wektor $\mathbf{y}(k)$.

Odpowiedź estymatora amplitudy jest pokazana na rys. 3.20 (krzywa 1).



Rys. 3.20. Odpowiedź 3-stanowego algorytmu MNK z wyzerowaną pamięcią (a) oraz z pamięcią zapelnioną (b): 1 - algorytm nierekursywny ze zmiennym oknem, 2- metoda RLS przy $\lambda=0,8$, 3 - metoda RLS przy $\lambda=1,0$

Stosując estymator RLS można rozpocząć obliczenia od pierwszej próbki ($k=1$). Przyjmując $\mathbf{P}(0)=1000\mathbf{I}$ (3×3) otrzymuje się odpowiedź estymatora amplitudy jak na rys. 3.20a (krzywe 2, 3 przy współczynniku zapominania, odpowiednio $\lambda=0.8$ oraz $\lambda=1$). Zmianę współczynników wzmocnienia $\mathbf{k}(k)=[k_c \ k_s \ k_a]$ przedstawia rys. 3.21.



Rys. 3.21. Przebieg zmian współczynników wzmocnienia 3-stanowego algorytmu RLS przy zerowych warunkach początkowych, $\lambda=0,8$

początkowa wartość macierzy \mathbf{P} jest także określana na podstawie pełnego okna [37]

$$\mathbf{P}(0)=[\mathbf{H}^T(0)\mathbf{H}(0)]^{-1},$$

gdzie w rozpatrywanym przykładzie:

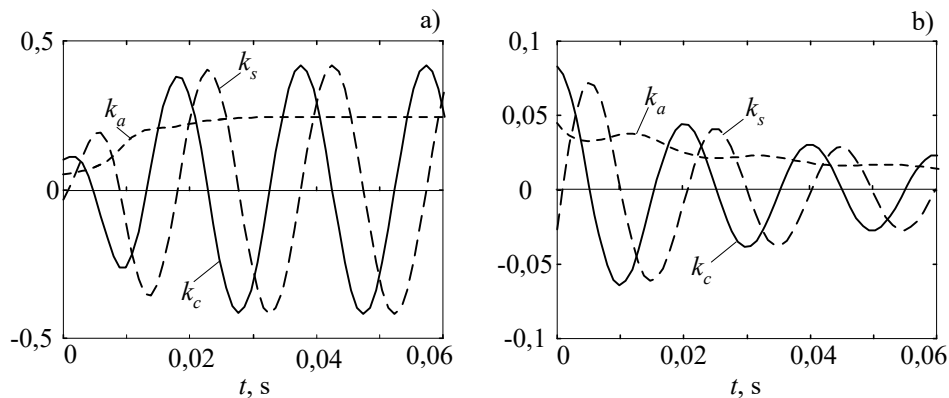
Analizując krzywe na rys. 3.20a można zauważyć, że oba estymatory szybko przybliżają się do właściwych odpowiedzi. Widoczne oscylacje są wynikiem niedostosowania modelu do obserwowanego przebiegu (składowa aperiodyczna jest reprezentowana przez stały czynnik w modelu). Błąd tego niedopasowania jest szczególnie duży przy krótkim oknie pomiarowym.

W większości zastosowań rozpatrywane algorytmy są uruchamiane z 'zapelnioną pamięcią', co oznacza, że w przypadku metody nierekursywnej okno jest stałe (N próbek), a w algorytmie RLS po-

$$\mathbf{H}^T(0) = \begin{bmatrix} \cos((1-N)a) & \cos((2-N)a) & \dots & 1 \\ -\sin((1-N)a) & -\sin((2-N)a) & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Estymaty amplitudy dla tych przypadków są pokazane na rys. 3.20b. Można zauważyć charakterystyczny stan przejściowy wynikający z 'zapelniania pamięci' algorytmów. W metodzie RLS długość tego stanu zależy od wartości współczynnika λ . Dla $\lambda=1$ odpowiedź jest obliczana na podstawie całej 'zapamiętanej' informacji i reakcja algorytmu jest wolna. W tym przypadku wektor wzmocnienia zmienia się nieznacznie (rys. 3.22), przyjmując po pewnym czasie wartość ustaloną. Współczynniki wzmocnienia składowych podstawowych (k_c oraz k_s) przyjmują w stanie ustalonym postać przebiegów sinusoidalnych, natomiast współczynnik składowej stałej - wartość stałą. Te właściwości można wykorzystać do określenia wektora wzmocnienia przed rozpoczęciem obliczeń [15], [37].

□



Rys. 3.22. Zmiana współczynników wzmocnienia 3-stanowego algorytmu RLS z zapełnioną pamięcią przy $\lambda=0,8$ (a) oraz $\lambda=1,0$ (b)

3.4.4 Nieliniowa metoda najmniejszych kwadratów

W powyższych rozważaniach zakładano, że model sygnałowy jest liniowy względem estymowanych parametrów. Uzyskane rekursywne lub nierekursywne algorytmy są łatwe do implementacji w mikroprocesorowych układach automatyki. Rozwój techniki mikroprocesorowej oraz metod numerycznych pozwala obecnie realizować również bardziej skomplikowane algorytmy estymacji nieliniowej, które mają zastosowanie w automatyce elektroenergetycznej. Dzięki temu można stosować bardziej realistyczne modele sygnałowe, które prowadzą do

dokładniejszych pomiarów bez potrzeby stosowania oddzielnej korekcji błędów, wynikających z uproszczenia opisu obserwowanego zjawiska.

Podstawowe uproszczenie, które przyjmuje się w liniowej estymacji parametrów sygnałów elektrycznych polega na założeniu, że częstotliwość obserwowanego sygnału jest stała i równa wartości znamionowej. Każda zatem zmiana częstotliwości sygnału (stała lub zmienna w czasie) jest zakłóceniem i prowadzi do błędów pomiaru. Dla ilustracji rozpatruje się ciągły przebieg sinusoidalny, w którym w charakterze nieznanych parametrów, oprócz amplitudy i fazy, występuje również częstotliwość

$$y(t) = X(t) \cos(\omega(t)t + \varphi(t)). \quad (3.142)$$

Dyskretna forma (3.142) ma następującą postać

$$\begin{aligned} y(k) &= X(k) \cos(a(k) + \varphi(k)) \\ &= X_c(k) \cos(a(k)k) - X_s(k) \sin(a(k)k), \end{aligned} \quad (3.143)$$

gdzie nieznanne parametry: $a(k) = f_s \cdot \omega(k)$, f_s - częstotliwość próbkowania,

$$X_c(k) = X(k) \cos \varphi(k), \quad X_s(k) = X(k) \sin \varphi(k). \quad (3.144)$$

Podobnie jak przy wyprowadzaniu algorytmu MNK zakłada się, że estymowane parametry są ogólnie zależne od czasu, ale w kolejnych M próbkach pozostają niezmiennie. Model pomiarowy ma zatem postać jak w (3.82):

$$\begin{aligned} y(k-M+1) &= X_c(k) \cos((1-M)a(k)) - X_s(k) \sin((1-M)a(k)) + v(1-M), \\ y(k-M+2) &= X_c(k) \cos((2-M)a(k)) - X_s(k) \sin((2-M)a(k)) + v(2-M), \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ y(k) &= X_c(k) \qquad \qquad \qquad -0 \qquad \qquad \qquad +v(0), \end{aligned} \quad (3.145)$$

co można zapisać w postaci macierzowej

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}, \quad (3.146)$$

gdzie:

$\mathbf{y} = [y(k-M+1) \ y(k-M+2) \ \dots \ y(k)]^T$ - $M \times 1$ wektor pomiarów,

$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = [h_{1-M}(\mathbf{x}) \ h_{2-M}(\mathbf{x}) \ \dots \ h_0(\mathbf{x})]^T$ - $M \times 1$ wektor modelu sygnałowego, który w rozpatrywanym przykładzie ma następujące elementy:

$$h_i(\mathbf{x}) = h_i(\mathbf{x}(k)) = X_c(k) \cos(ia(k)) - X_s(k) \sin(ia(k)),$$

$\mathbf{v} = [v(1-M) \ v(2-M) \dots \ v(0)]^T$ - $M \times 1$ wektor błędów pomiaru,

$\mathbf{x} = \mathbf{x}(k) = [X_1(k) \ X_2(k) \dots \ X_L(k)]^T$ - $L \times 1$ wektor estymowanych parametrów, na przykład: $X_1(k) = X_c(k)$, $X_2(k) = X_s(k)$, $X_3(k) = a(k)$.

Podobnie jak w (3.86), funkcja błędów $\mathbf{e}(\hat{\mathbf{x}})$ jest określona jako różnica między wektorem pomiarów i modelem sygnałowym odpowiadającym estymowanemu wektorowi $\hat{\mathbf{x}}$

$$\mathbf{e}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{y} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}). \quad (3.147)$$

W przypadku, gdy liczba obserwacji M jest równa liczbie nieznanymi parametrów modelu L , problem minimalizacji (3.147) sprowadza się do znalezienia zer układu równań nieliniowych, co można osiągnąć za pomocą metody Newtona-Raphsona [7]. Do minimalizacji błędów, w przypadku gdy $M > L$, można zastosować kryterium MNK

$$\min_{\hat{\mathbf{x}}} S_2(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{e}^T(\hat{\mathbf{x}})\mathbf{e}(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{i=0}^{M-1} e_i^2(\hat{\mathbf{x}}), \quad (3.148)$$

gdzie: e_i - i -ty element wektora $\mathbf{e}(\hat{\mathbf{x}})$.

Warunek (3.148) jest znany jako *nieliniowe kryterium metody najmniejszych kwadratów*. W odróżnieniu od podobnej zależności definiowanej w odniesieniu do MNK, tym razem funkcja kryterialna $\mathbf{e}(\hat{\mathbf{x}})$ jest nieliniowa względem poszukiwanych parametrów wektora $\hat{\mathbf{x}}$. W celu określenia odpowiedniej procedury minimalizacji (3.148) można odwołać się do liniowej aproksymacji funkcji $\mathbf{e}(\hat{\mathbf{x}})$ - co sprowadza się do określenia dwóch pierwszych wyrazów rozkładu tej funkcji w szereg Taylora. Rozkład funkcji $\mathbf{e}(\hat{\mathbf{x}})$ w pobliżu danego punktu $\hat{\mathbf{x}}_p$ prowadzi do

$$\mathbf{e}(\hat{\mathbf{x}}) \approx \mathbf{m}_p(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{e}(\hat{\mathbf{x}}_p) - \mathbf{J}(\hat{\mathbf{x}}_p)(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}_p), \quad (3.149)$$

gdzie: $\mathbf{J}(\hat{\mathbf{x}}_p)$ jest macierzą Jacobiego (Jacobianem)

$$\mathbf{J}(\hat{\mathbf{x}}_p) = \{j_{ij}(\hat{\mathbf{x}}_p)\}, \quad (3.150)$$

z elementami $j_{ij}(\hat{\mathbf{x}}_p) = -\left. \frac{\partial e_i(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{X}_j} \right|_{\hat{\mathbf{x}}=\hat{\mathbf{x}}_p} = -\left. \frac{\partial (y_i - h_i(\hat{\mathbf{x}}))}{\partial \hat{X}_j} \right|_{\hat{\mathbf{x}}=\hat{\mathbf{x}}_p}$,

\hat{X}_j - j -ty wyraz wektora estymat $\hat{\mathbf{x}} = [\hat{X}_c \ \hat{X}_s \ \hat{a}]$.

Przy założeniu, że wektor pomiarów \mathbf{y} nie zależy od poszukiwanych wartości $\hat{\mathbf{x}}$, ostatecznie, otrzymuje się elementy Jacobianu $\mathbf{J}(\hat{\mathbf{x}}_p)$

$$j_{ij}(\hat{\mathbf{x}}_p) = \left. \frac{\partial h_i(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{X}_j} \right|_{\hat{\mathbf{x}}=\hat{\mathbf{x}}_p}. \quad (3.151)$$

Ponieważ wektor modelu $\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})$ jest zazwyczaj określony w postaci analitycznej, zatem również macierz $\mathbf{J}(\hat{\mathbf{x}})$ jest łatwa do określenia. Dla rozpatrywanego przykładu j -ty wiersz macierzy Jacobiego jest następująca ($j = 1, 2, \dots, M$, $i = j - M$)

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_j(\hat{\mathbf{x}}) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial h_i(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{X}_c} & \frac{\partial h_i(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{X}_s} & \frac{\partial h_i(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{a}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(i\hat{a}) & -\sin(i\hat{a}) & -i(\hat{X}_c \sin(i\hat{a}) + \hat{X}_s \cos(i\hat{a})) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.152)$$

Liniowa postać równania (3.149) może być wykorzystana do iteracyjnego obliczania zer funkcji błędu $\mathbf{e}(\hat{\mathbf{x}})$. Jeśli przyjąć, że punkt $\hat{\mathbf{x}}_p$ jest rezultatem poprzedniej iteracji: $\hat{\mathbf{x}}_p = \hat{\mathbf{x}}_{n-1}$, to $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_n$ w (3.149) minimalizuje $\mathbf{m}_p(\hat{\mathbf{x}})$ ($\mathbf{m}_p(\hat{\mathbf{x}}) = 0$), tj.

$$\mathbf{J}(\hat{\mathbf{x}}_{n-1})(\hat{\mathbf{x}}_n - \hat{\mathbf{x}}_{n-1}) = \mathbf{e}(\hat{\mathbf{x}}_{n-1}). \quad (3.153)$$

Wyrażenie (3.153) przedstawia nadokreślony układ M równań liniowych z L niewiadomymi, który może być rozwiązany za pomocą algorytmu MNK

$$\hat{\mathbf{x}}_n = \hat{\mathbf{x}}_{n-1} + [\mathbf{J}^T(\hat{\mathbf{x}}_{n-1})\mathbf{J}(\hat{\mathbf{x}}_{n-1})]^{-1} \mathbf{J}^T(\hat{\mathbf{x}}_{n-1})\mathbf{e}(\hat{\mathbf{x}}_{n-1}), \quad (3.154)$$

gdzie: n jest indeksem iteracji.

Uwzględniając również numer próbki k jako zmienną dyskretnego czasu i podstawiając (3.147) w miejsce $\mathbf{e}(\hat{\mathbf{x}})$ otrzymuje się końcową postać algorytmu nieliniowej MNK:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_n(k) &= \\ \hat{\mathbf{x}}_{n-1}(k) &+ [\mathbf{J}^T(\hat{\mathbf{x}}_{n-1}(k))\mathbf{J}(\hat{\mathbf{x}}_{n-1}(k))]^{-1} \mathbf{J}^T(\hat{\mathbf{x}}_{n-1}(k))(\mathbf{y}(k) - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{n-1}(k))). \end{aligned} \quad (3.155)$$

Iteracyjna formuła (3.155) jest znana jako algorytm Gaussa-Newtona rozwiązywania nieliniowych zagadnień MNK [7]. Warunek szybkiej zbieżności algorytmu zależy od błędu liniowego przybliżenia funkcji $\mathbf{e}(\hat{\mathbf{x}})$. W wielu zastosowaniach już jeden krok iteracji (3.155) daje zadowalające przybliżenie [43]. Uzyskany algorytm nosi nazwę nieliniowej metody najmniejszych kwadratów (ang. *Nonlinear Least Squares*).

Algorytm 3.4. *Nieliniowy algorytm najmniejszych kwadratów (NLS)*

- 1. Przyjąć warunki początkowe: $\hat{\mathbf{x}}(0)$, a także $k = 0$ (numer kroku czasowego).
- 2. Określić warunki początkowe dla danego kroku: $k = k + 1$, $n = 1$ (numer iteracji), a także: $\hat{\mathbf{x}}_0(k) = \hat{\mathbf{x}}(k - 1)$.
- 3. Na podstawie modelu procesu określić macierz Jacobiego $\mathbf{J}(\hat{\mathbf{x}}_{n-1}(k))$.
- 4. Skorygować wartość wektora estymat

$$\hat{\mathbf{x}}_n(k) = \hat{\mathbf{x}}_{n-1}(k) + \left[\mathbf{J}^T(\hat{\mathbf{x}}_{n-1}(k)) \mathbf{J}(\hat{\mathbf{x}}_{n-1}(k)) \right]^{-1} \mathbf{J}^T(\hat{\mathbf{x}}_{n-1}(k)) (\mathbf{y}(k) - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{n-1}(k))).$$
- 5. Jeśli $\max(\text{abs}(\hat{\mathbf{x}}_n(k) - \hat{\mathbf{x}}_{n-1}(k))) > \varepsilon$ - przejść do 3, inaczej - przejść do 2, gdzie: ε - maksymalna odchyłka do kontroli zbieżności procesu iteracyjnego. □

W pomiarach realizowanych na bieżąco, Jacobian $\mathbf{J}(\hat{\mathbf{x}}_{n-1})$ powinien być obliczany w każdej iteracji; należy jednak wystrzegać się bezpośredniego stosowania formuły (3.155) z odwracaniem macierzy, gdyż jest to niezwykle uciążliwa operacja numeryczna. W zamian można stosować znacznie oszczędniejszy algorytm QR przeznaczony do rozwiązywania tego typu zagadnień liniowych [39]. Wartość początkowa poszukiwanego wektora w kolejnych krokach czasowych może być przyjęta jako rezultat estymacji w kroku poprzednim: $\hat{\mathbf{x}}_0(k) = \hat{\mathbf{x}}(k - 1)$.

Przykład 3.2. Zaprojektować 3-stanowy algorytm NLS i porównać jego właściwości z 2-stanowym algorytmem MNK.

Model sygnałowy rozpatrywanego algorytmu NLS jest określony przez (3.143)-(3.146). Wiersze macierzy Jacobiego określone są równaniem (3.152), a zatem w k -tym kroku otrzymuje się

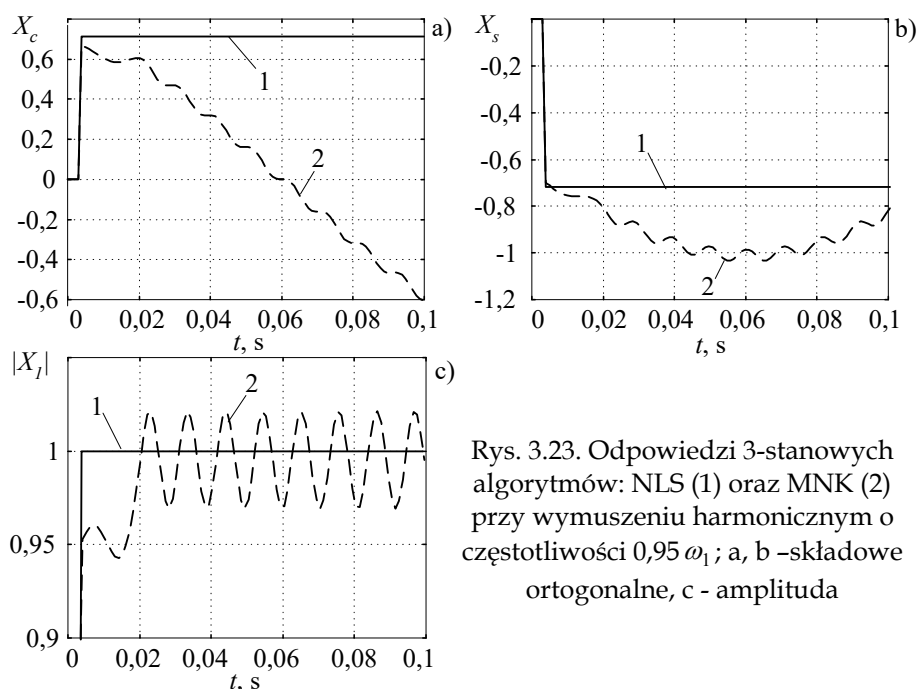
$\mathbf{J}(\hat{\mathbf{x}}_n(k)) = \{\mathbf{j}_j(\hat{\mathbf{x}}_n(k))\}_{j=1,2..M}$, przy czym:

$$\mathbf{j}_1(\hat{\mathbf{x}}_n(k)) = \begin{bmatrix} \cos((1-M)a_n(k)) \\ -\sin((1-M)a_n(k)) \\ (M-1)(x_{cn} \sin((1-M)a_n(k)) + x_{sn} \cos((1-M)a_n(k))) \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{j}_2(\hat{\mathbf{x}}_n(k)) = \begin{bmatrix} \cos((2-M)a_n(k)) \\ -\sin((2-M)a_n(k)) \\ (M-2)(x_{cn} \sin((2-M)a_n(k)) + x_{sn} \cos((2-M)a_n(k))) \end{bmatrix}^T, \dots$$

$$\mathbf{j}_0(\hat{\mathbf{x}}_n(k)) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T, \text{ gdzie: } n - \text{ krok iteracji.}$$

Algorytm startuje z oknem pomiarowym o długości trzech próbek ($k = 2$, wektor $y(2)$) i w każdym kolejnym kroku czasowym wykonuje procedurę iteracyjną (3.155). Długość okna ustala się na liczbie próbek $M = N = 20$. Określone są trzy wielkości: X_c, X_s oraz a . Przebieg estymaty amplitudy przy wymuszeniu sinusoidalnym o częstotliwości równej 0,95 wartości znamionowej jest pokazany na rys. 3.23. Linie przerywane odnoszą się do tych samych wielkości uzyskanych za pomocą 2-stanowego estymatora MNK. Widać, że w przeciwieństwie do algorytmu klasycznego, estymator NLS jest odporny na zmianę częstotliwości. Jest to jednak osiągnięcie nieco bardziej złożonym algorytmem, który wymaga zastosowania bardziej wydajnej jednostki obliczeniowej. □



Rys. 3.23. Odpowiedzi 3-stanowych algorytmów: NLS (1) oraz MNK (2) przy wymuszeniu harmonicznym o częstotliwości $0,95 \omega_1$; a, b –składowe ortogonalne, c - amplituda

Znanych jest wiele odmian algorytmu NLS, które różnią się sposobem reprezentacji nieliniowego modelu pomiarowego [7].

3.4.5 Rekursywny nieliniowy algorytm MNK

Omówiony powyżej algorytm NLS (3.155) można przedstawić w następującej formie

$$\hat{\mathbf{x}}_n(k) = \hat{\mathbf{x}}_{n-1}(k) + \Delta \hat{\mathbf{x}}_{n-1}(k), \quad (3.156)$$

gdzie:

$$\Delta \hat{\mathbf{x}}_{n-1}(k) = [\mathbf{J}^T(\hat{\mathbf{x}}_{n-1}(k))\mathbf{J}(\hat{\mathbf{x}}_{n-1}(k))]^{-1} \mathbf{J}^T(\hat{\mathbf{x}}_{n-1}(k))(\mathbf{y}(k) - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{n-1}(k))). \quad (3.157)$$

Należy zauważyć, że równanie (3.157) przedstawia algorytm MNK estymacji wektora $\Delta \hat{\mathbf{x}}_{n-1}(k)$, przy czym pomiar jest określony przez ostatni czynnik $\mathbf{e}(\hat{\mathbf{x}}_{n-1}(k)) = \mathbf{y}(k) - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{n-1}(k))$, a Jacobian $\mathbf{J}(\hat{\mathbf{x}}_{n-1}(k))$ przedstawia model pomiarowy. Do określenia $\Delta \hat{\mathbf{x}}_{n-1}(k)$ można zatem stosować algorytm RLS. W przypadku modelu jednowymiarowego otrzymuje się

$$\mathbf{k}_{n-1}(k) = \frac{\mathbf{P}(k-1)\mathbf{j}^T(\hat{\mathbf{x}}_{n-1}(k))}{1 + \mathbf{j}(\hat{\mathbf{x}}_{n-1}(k))\mathbf{P}(k-1)\mathbf{j}^T(\hat{\mathbf{x}}_{n-1}(k))}, \quad (3.158)$$

$$\Delta \hat{\mathbf{x}}_{n-1}(k) = \Delta \hat{\mathbf{x}}(k-1) + \mathbf{k}_{n-1}(k)[\mathbf{e}(\hat{\mathbf{x}}_{n-1}(k)) - \mathbf{j}(\hat{\mathbf{x}}_{n-1}(k))\Delta \hat{\mathbf{x}}(k-1)], \quad (3.159)$$

$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{P}(k-1) - \mathbf{k}(k)\mathbf{j}(\hat{\mathbf{x}}(k))\mathbf{P}(k-1), \quad (3.160)$$

gdzie: $\mathbf{j}(\hat{\mathbf{x}}_{n-1}(k))$ jest jednym wierszem macierzy Jacobiego $\mathbf{J}(\hat{\mathbf{x}}_{n-1}(k))$ z poprzedniego ($n-1$) kroku iteracji.

Widać, że tylko dwa pierwsze równania (3.158) i (3.159) uczestniczą w iteracyjnym procesie, podczas gdy w trzecim (3.160) obliczana jest nowa wartość macierzy $\mathbf{P}(k)$ po osiągnięciu zbieżności w danym kroku czasowym k . Można ponadto zauważyć na podstawie (3.159), że $\Delta \hat{\mathbf{x}}(k-1) = 0$, co wynika z rozwiązania w poprzednim kroku (3.156). Ostatecznie, łącząc (3.156) i (3.158) otrzymujemy następujący algorytm.

Algorytm 3.5. *Rekursywny algorytm nieliniowej metody najmniejszych kwadratów (RNLS)*

- 1. Przyjąć warunki początkowe: $\mathbf{P}(0)$ oraz $\hat{\mathbf{x}}(0)$, a także $k=0$ (numer kroku czasowego).
- 2. Określić warunki początkowe dla danego kroku: $k = k+1$, $n=1$ (numer iteracji), a także: $\hat{\mathbf{x}}_0(k) = \hat{\mathbf{x}}(k-1)$.
- 3. Obliczyć wektor wzmocnienia

$$\mathbf{k}_{n-1}(k) = \frac{\mathbf{P}(k-1)\mathbf{j}^T(\hat{\mathbf{x}}_{n-1}(k))}{\lambda + \mathbf{j}(\hat{\mathbf{x}}_{n-1}(k))\mathbf{P}(k-1)\mathbf{j}^T(\hat{\mathbf{x}}_{n-1}(k))}.$$

- 4. Skorygować wartość wektora estymat $\hat{\mathbf{x}}_n(k) = \hat{\mathbf{x}}_{n-1}(k) + \mathbf{k}_{n-1}(k)[y(k) - h(\hat{\mathbf{x}}_{n-1}(k))]$.
- 3. Skorygować macierz korelacji błędów

$$\mathbf{P}(k) = \frac{1}{\lambda} [\mathbf{P}(k-1) - \mathbf{k}(k)\mathbf{j}(\hat{\mathbf{x}}(k))\mathbf{P}(k-1)].$$

- 6. Jeśli $\max(\text{abs}(\hat{\mathbf{x}}_n(k) - \hat{\mathbf{x}}_{n-1}(k))) > \varepsilon$ - przejść do 3, inaczej - przejść do 2,

gdzie ε - maksymalna odchyłka do kontroli zbieżności procesu iteracyjnego; $h(\hat{\mathbf{x}}_{n-1}(k))$ przedstawia model pomiarowy odniesiony do poprzedniego kroku iteracji. \square

Wartość początkowa $\mathbf{P}(0)$ w powyższym algorytmie może być przyjęta jak w algorytmie liniowym. Niekiedy algorytm może być słabo zbieżny przy źle dobranych wartościach początkowych i wówczas zaleca się stosować procedurę nierekursywną NLS do rozpoczęcia obliczeń [43].

3.5 Obserwatory stanu

3.5.1 Stacjonarne obserwatory stanu

Powyżej było pokazane, że wynik rekursywnego algorytmu zależy od wielkości wejściowych w danym kroku oraz od wyników wcześniejszych iteracji. Ogólny schemat takiego procesu jest określony przez równania zmiennych stanu (3.27), które w przypadku systemu wielowjściowego mają następującą formę

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k), \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k),\end{aligned}\tag{3.161}$$

gdzie: $\mathbf{x}(k)$ - wektor zmiennych stanu, $\mathbf{A}(k)$ - $n \times n$ macierz stanu, n - liczba zmiennych stanu, $\mathbf{C}(k)$ - $m \times n$ macierz pomiarów, m - liczba wyjść, $\mathbf{y}(k)$ - wektor wejść.

Identyfikacja procesu (3.161) sprowadza się do określenia wektora stanu $\mathbf{x}(k)$. Układ, który pozwala odtworzyć wektor stanu (dokładnie - uzyskać estymatę $\hat{\mathbf{x}}(k)$ wektora $\mathbf{x}(k)$) na podstawie pomiaru wielkości wyjściowych określonych przez wektor $\mathbf{y}(k)$ nazywa się *obserwatorem stanu* systemu (3.161) [20].

Problem projektowania obserwatora stanu, który śledzi rzeczywiste stany systemu w sposób asymptotyczny jest podstawowym zagadnieniem w teorii systemów sterowania. Zainteresowanie obserwatorami stanu w dziedzinie cyfrowego przetwarzania sygnałów wynika stąd, że zmienne stanu (3.161) mogą reprezentować poszukiwane składowe sygnału, w szczególności składowe ortogonalne poszczególnych harmonicznych. Tego typu obserwatory tworzą rekursywne algorytmy DPF i są nazywane *obserwatorami widmowymi* (ang. *spectral observers*) [14].

W zależności od charakteru parametrów równania stanu (3.161), można wyróżnić obserwatory stacjonarne (z parametrami niezależnymi

od czasu) oraz niestacjonarne (parametry obserwatora są funkcją czasu). Szczególnie interesujące są obserwatory stacjonarne, gdyż w odniesieniu do nich znane są proste procedury projektowe. W tym przypadku $\mathbf{A}(k) = \mathbf{A}$, $\mathbf{C}(k) = \mathbf{C}$ oraz:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k), \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k),\end{aligned}\tag{3.162}$$

a obserwator systemu (3.162) ma następującą formę [22]:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{K}[\mathbf{y}(k) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k)],\tag{3.163}$$

gdzie: \mathbf{K} - macierz wzmocnienia.

Można zauważyć, że stabilny obserwator (3.163) w kolejnych krokach redukuje różnicę pomiędzy obserwowanymi wielkościami rzeczywistymi $\mathbf{y}(k)$ oraz wielkościami określonymi przez model pomiarowy $\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k)$. Struktura modelu systemu (reprezentowanego przez obserwowany sygnał) oraz jego obserwator stanowy jest pokazana na rys. 3.24 (z dodanymi również zakłóceniami).

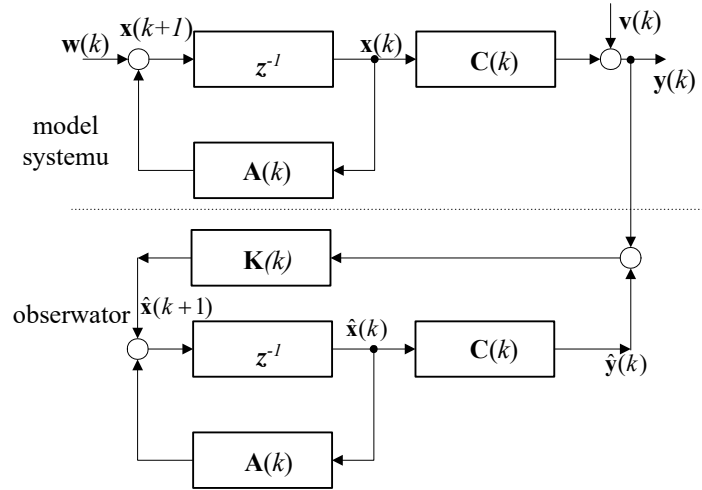
W celu lepszej analizy dynamiki obserwatora (3.163) można go przedstawić w następującej postaci:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{K}\mathbf{y}(k).\tag{3.164}$$

Macierz $\mathbf{\Psi} = \mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C}$ w (3.164) określa właściwości obserwatora. Dyskretny obserwator stanu jest stabilny, gdy wartości własne macierzy $\mathbf{\Psi}$ leżą wewnątrz okręgu jednostkowego. W szczególności, położenie wartości własnych na płaszczyźnie zespolonej \mathcal{Z} determinuje stan przejściowy obserwatora. Jeśli wszystkie wartości własne macierzy $\mathbf{\Psi}$ są równe zero, to taki układ jest nazywany obserwatorem *dead-beat*. Wówczas obserwator osiąga stan ustalony w najmniejszej liczbie kroków [22]. Jednakże taki obserwator jest bardzo czuły na błędy pomiarowe (zakłócenia). Stąd też, położenie biegunów obserwatora powinno być wynikiem kompromisu pomiędzy szybkością ustalania się odpowiedzi oraz odpornością na zakłócenia.

W celu określenia procedury projektowania obserwatora rozpatruje się prosty lecz niezmiernie istotny z punktu widzenia rozważanych tu problemów przypadek systemu jednowyjściowego, gdy mierzony jest pojedynczy sygnał prądu lub napięcia. W tym przypadku, proces jest opisany następującymi równaniami:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k), \\ y(k) &= \mathbf{c}\mathbf{x}(k),\end{aligned}\tag{3.165}$$



Rys. 3.24. Struktura systemu wraz z obserwatorem

a jego obserwator przybiera postać

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{kc})\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{ky}(k), \quad (3.166)$$

gdzie: \mathbf{k} jest wektorem wzmocnienia.

Macierze modelu sygnałowego (3.165) stosowanego w charakterze DPF mają następującą strukturę (porównaj (3.26)-(3.32)):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & & & & \\ & \mathbf{A}_2 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & \mathbf{A}_p & \\ & & & & \mathbf{A}_a \end{bmatrix}, \mathbf{c} = [\mathbf{c}_1 \ \mathbf{c}_2 \ \dots \ \mathbf{c}_p \ \mathbf{c}_a], \quad (3.167)$$

gdzie, w przypadku jednostajnego próbkowania:

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \cos(ai) & -\sin(ai) \\ \sin(ai) & \cos(ai) \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, p \text{ - macierz stanu reprezentująca } i\text{-tą}$$

harmoniczną, $a = 2\pi/N$, $\mathbf{c}_i = [1 \ 0]$, $i = 1, 2, \dots, p$ - wektor pomiarów związany z i -tą harmoniczną, $\mathbf{A}_a, \mathbf{c}_a$ - wielkości związane z odwzorowaniem składowej aperiodycznej. Konkretna ich postać zależy od sposobu reprezentacji (modelowania) składowej aperiodycznej, na przykład:

$$\mathbf{A}_a = [1], \mathbf{c}_a = [1] \text{ - dla najprostszego przypadku oraz:}$$

$$\mathbf{A}_a = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_a = [1 \ 0 \ 0],$$

gdy zanikająca składowa stała jest przedstawiana funkcją określoną przez pierwsze trzy wyrazy rozwinięcia funkcji wykładniczej w szereg Taylora (3.23)

$$\begin{aligned} A_a e^{-bk} &\approx X_{c1} + X_{c2}ak + X_{c3}(ak)^2 \\ &= X_{a1}(k) + X_{a2}(k)a + X_{a3}(k)(a)^2. \end{aligned} \quad (3.168)$$

Wektor stanu $\mathbf{x}(k)$ przybiera wówczas adekwatną strukturę

$$\mathbf{x}(k) = [\mathbf{x}_1(k) \ \mathbf{x}_2(k) \ \dots \ \mathbf{x}_p(k) \ \mathbf{x}_a(k)]^T, \quad (3.169)$$

gdzie: $\mathbf{x}_i(k) = [X_{ic}(k) \ X_{is}(k)]$, $i = 1, 2, \dots, p$ - wektor stanu reprezentujący i -tą harmoniczną, $\mathbf{x}_a(k) = [X_{a1}(k) \ X_{a2}(k) \ \dots]$, - wektor współczynników modelu składowej aperiodycznej.

Projektowanie obserwatora stanu systemu (3.165) polega na określeniu takiego wektora wzmocnienia \mathbf{k} , który zapewnia określone wartości własne macierzy Ψ . Powszechnie stosowane metody korzystają z przekształcenia macierzy równań (3.165) do kanonicznej postaci Frobeniusa [20], [22] lub dwudiagonalnej [33]. To ostateczne przekształcenie jest osiągnięte przez wykonanie następującego algorytmu.

Algorytm 3.6. *Projektowanie obserwatora stanu systemu stacjonarnego przez określenie wartości własnych macierzy Ψ .*

- 1. Określić żądane wartości własne macierzy Ψ (s_1, s_2, \dots, s_n), n - rząd rozpatrywanego modelu. Należy pamiętać, że w zbiorze biegunów macierzy (wartości własnych) bieguny zespolone występują w parach wzajemnie sprzężonych wartości.
- 2. Określić następującą macierz transformacji \mathbf{T} :

$$\mathbf{T} = [\mathbf{t}_1 \ \mathbf{t}_2 \ \dots \ \mathbf{t}_n]^T$$
 przez zastosowanie formuły rekurencyjnej:

$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{c},$$

$$\mathbf{t}_{k+1} = \mathbf{t}_k [\mathbf{A} - s_k \mathbf{I}], \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$
- 3. Obliczyć wektor \mathbf{b} o następującej formie:

$$\mathbf{b} = \mathbf{t}_n \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1} = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{n-1} \ b_n].$$

- 4. Wektor wzmocnienia \mathbf{k}_1 postaci dwudiagonalnej, której macierz przejść $\Psi_1 = \mathbf{A}_1 - \mathbf{k}_1 \mathbf{c}_1$ ma żądane wartości własne jest określony następująco:

$$\mathbf{k}_1 = [\kappa_1 \quad \kappa_2 \quad \dots \quad \kappa_n]^T,$$

gdzie

$$\kappa_i = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$\kappa_n = b_n - s_n.$$

- 5. Określić drugą macierz transformacji \mathbf{T}_1 o postaci:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & q_{2,n} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & q_{3,n-1} & q_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & q_{n,2} & \dots & \dots & q_{n,n-1} & q_{n,n} \end{bmatrix},$$

gdzie:

$$q_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{for } j < n - i + 1, \\ 1 & \text{for } j = n - i + 1, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = n, n-1, \dots, 1 \\ q_{i-1,j}(s_j - s_{i-1}) + d & \text{for } j > n - i + 1, \end{cases}$$

oraz

$$d = \begin{cases} q_{i-1,j+1} & \text{for } j < n, \\ \sum_{k=n-i+2}^n q_{i-1,k} \kappa_k & \text{for } j = n. \end{cases}$$

Dowodzi się, że macierze \mathbf{T} oraz \mathbf{T}_1 są nieosobliwe, a para (\mathbf{A}, \mathbf{c}) jest obserwowalna [33]. Są one następnie użyte do przekształcenia oryginalnego systemu (3.165) oraz obserwatora (3.166) do dwudiagonalnej obserwatorowej formy $(\mathbf{A}_1, \mathbf{c}_1)$.

- 6. Przekształcić otrzymany wektor \mathbf{k}_1 do formy pierwotnego systemu:
- $\mathbf{k} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{T}_1 \mathbf{k}_1$. \square

Należy podkreślić, że powyższa procedura jest wykonywana na etapie projektowania obserwatora, przed rozpoczęciem pomiarów. Algorytm 3.6 może być łatwo rozszerzony na przypadek układu wielowymiarowego [34].

Charakterystyki częstotliwościowe obserwatorów stanu mogą być analizowane w oparciu o ich funkcje przejścia. Funkcja przejścia układu (3.164) może być uzyskana przez zastosowanie transformaty \mathcal{Z}

$$z\hat{\mathbf{x}}(z) = [\mathbf{A} - \mathbf{k}\mathbf{c}]\hat{\mathbf{x}}(z) + \mathbf{k}y(z) \quad (3.170)$$

oraz

$$\hat{\mathbf{x}}(z) = \mathbf{h}(z)y(z), \quad (3.171)$$

gdzie:

$$\mathbf{h}(j\omega') = \mathbf{h}(z) \Big|_{z=e^{j\omega'a}} = \left[\mathbf{1}e^{j\omega'a} - (\mathbf{A} - \mathbf{k}\mathbf{c}) \right]^{-1} \mathbf{k}, \quad (3.172)$$

$\mathbf{1}$ - $n \times n$ macierz jednostkowa, n - rząd systemu, $\omega' = \omega / \omega_1$.

Wektor $\mathbf{h}(j\omega')$ zawiera funkcje przejścia poszczególnych estymowanych parametrów

$$\mathbf{h}(j\omega') = [H_{1c}(j\omega') \quad H_{1s}(j\omega') \quad \dots \quad H_a(j\omega')]^T, \quad (3.173)$$

zgodnie z modelem sygnałowym.

Przykład 3.3. Zaprojektować i zbadać obserwator stanu systemu reprezentowanego przez model sygnałowy w postaci sumy pierwszej i trzeciej harmonicznej oraz składowej stałej. Sygnał jest próbkowany z częstotliwością 1000 Hz ($N=20$ próbek w okresie podstawowej harmonicznej).

Model sygnałowy jest określony równaniami (3.165), gdzie

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(a) & -\sin(a) & & & \\ \sin(a) & \cos(a) & & & \\ & & \cos(3a) & -\sin(3a) & \\ & & \sin(3a) & \cos(3a) & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1]$$

oraz $\mathbf{x}(k) = [x_{1c}(k) \quad x_{1s}(k) \quad x_{3c}(k) \quad x_{3s}(k) \quad x_a(k)]^T$.

Zakłada się, że poszukiwany jest obserwator z następującymi wartościami własnymi macierzy $\Psi = \mathbf{A} - \mathbf{k}\mathbf{c}$: $s_{1,2} = 0,5$, $s_{3,4} = 0,5 \pm j0,05$, $s_5 = 0,7$.

Postępując zgodnie z przytoczonym algorytmem otrzymuje się

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0,451 & -0,309 & 0,088 & -0,809 & 0,5 \\ 0,108 & -0,279 & -0,647 & -0,142 & 0,25 \\ -0,037 - j0,005 & -0,159 + j0,014 & -0,172 + j0,032 & 0,511 + j0,007 & 0,125 - j0,013 \\ -0,066 & -0,061 & 0,397 & 0,183 & 0,063 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{b} = [0,099 \quad -0,523 \quad 1,206 - j0,083 \quad -1,656 \quad 2,078]$,

$\mathbf{k}_1 = [0,099 \quad -0,523 \quad 1,206 - j0,083 \quad -1,656 \quad 1,378]^T$,

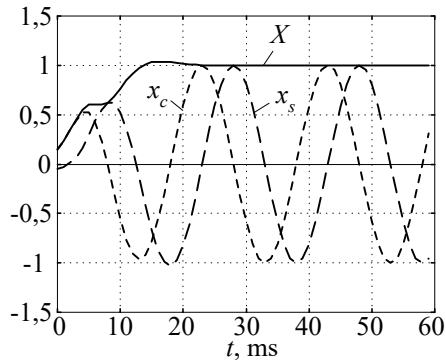
a następnie,

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1,578 \\ 0 & 0 & 1 & 1,578 - j0,05 & 0,833 \\ 0 & 1 & 1,578 - j0,05 & 0,828 - j0,158 & -0,092 - j0,042 \\ 1 & 1,578 & 0,833 & -0,092 - j0,042 & -0,14 \end{bmatrix}.$$

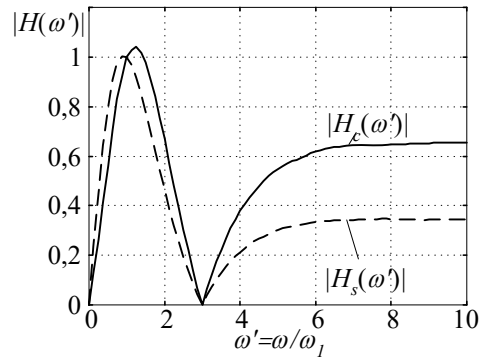
Ostatecznie, wyrazy wektora wzmocnienia przyjmują następujące wartości

$$\mathbf{k} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{T}_1 \mathbf{k}_1 = [0,481 \quad -0,164 \quad 0,662 \quad -0,092 \quad 0,235]^T.$$

Odpowiedź czasowa na harmoniczne wymuszenie $y(k) = \sin(ak)$ jest pokazana na rys. 3.25. Można zauważyć, że stan przejściowy trwa około połowy okresu podstawowej harmonicznej. Charakterystyki częstotliwościowe estymatorów składowych ortogonalnych są pokazane na rys. 3.26.



Rys. 3.25. Odpowiedź obserwatora stacjonarnego

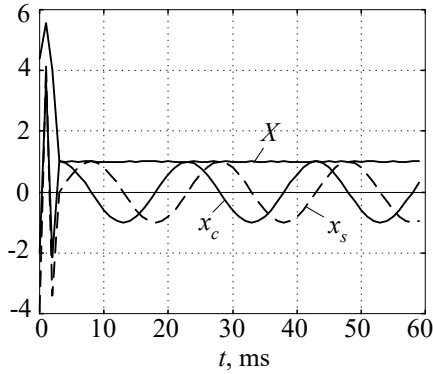


Rys. 3.26. Charakterystyka częstotliwościowa obserwatora

Obserwator *dead-beat* tego systemu ($s_{1-5} = 0$) ma następujący wektor wzmocnienia $\mathbf{k} = [-6,463 \quad -12,685 \quad -1,851 \quad -0,293 \quad 12,391]^T$.

Jego odpowiedź czasowa jest prezentowana na rys. 3.27. Estymator ma bardzo szybką odpowiedź lecz jest niezmiernie czuły na szumy i składowe sygnału, które nie są reprezentowane w modelu. □

Przedstawiona procedura pozwala uzyskać stabilny obserwator, ale nie ma w niej możliwości uwzględnienia postulowanych właściwości obserwatora, jako układu przetwarzania sygnałów. W tym stosunkowo prostym algorytmie nie są odzwierciedlone relacje pomiędzy właściwościami dynamicznymi i widmowymi obserwatora, a położeniem jego biegunów. W ogólnym przypadku, lokalizacja biegunów obserwatora w pobliżu zera układu współrzędnych płaszczyzny z daje w efekcie skrócenie stanu przejściowego, co z kolei pogarsza właściwości częstotliwościowe obserwatora. I odwrotnie: większy moduł wartości własnych prowadzi



Rys. 3.27. Odpowiedź obserwatora *dead-beat*

do wydłużenia stanu dynamicznego i zmniejszenia wrażliwości na szumy. Projektowanie obserwatorów stanu do rozpatrywanego tu zastosowania wymaga przyjęcia pewnego kompromisu pomiędzy dwoma przeciwstawnymi żądaniami. Właściwy wybór może być dokonany na drodze kolejnych przybliżeń lub przez zastosowanie bardziej zaawansowanych procedur.

Jedno z takich podejść polega na wprowadzeniu współczynników wagowych, których wartości odzwierciedlają posiadaną wiedzę o wiarygodności zakładanego modelu sygnałowego oraz modelu obserwowanego procesu [25]. Warunek optymalności projektowanego obserwatora jest tu osiągnięty w minimalnym punkcie następującej funkcji kryterialnej

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} (\hat{\mathbf{x}}^T(k) \mathbf{Q} \hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{y}^T(k) \mathbf{R} \mathbf{y}(k)) \quad (3.174)$$

względem wektora wzmocnienia \mathbf{k} ,

gdzie: \mathbf{Q} , \mathbf{R} są odpowiednimi symetrycznymi macierzami wagowymi określającymi właściwości modelu systemu (\mathbf{Q}) oraz modelu pomiarowego (\mathbf{R}).

Wektor wzmocnienia \mathbf{k} , który minimalizuje funkcję (3.174) jest określony następująco [25]:

$$\mathbf{k} = \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{c}^T [\mathbf{R} + \mathbf{c} \mathbf{P} \mathbf{c}^T]^{-1}, \quad (3.175)$$

gdzie: \mathbf{P} jest stabilnym ustalonym rozwiązaniem równania Riccati

$$\mathbf{P}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{P}(k) \mathbf{A}^T + \mathbf{Q} - \mathbf{A} \mathbf{P}(k) \mathbf{c}^T [\mathbf{R} + \mathbf{c} \mathbf{P}(k) \mathbf{c}^T]^{-1} \mathbf{c} \mathbf{P}(k) \mathbf{A}^T. \quad (3.176)$$

Równanie (3.176) może być rozwiązane metodą prostej iteracji (w charakterze $\mathbf{P}(0)$ można założyć diagonalną macierz z małymi wartościami na przekątnej) lub za pomocą standardowej metody numerycznej [22]. Należy zauważyć, że \mathbf{R} jest skalarą w przypadku systemu jednowyjściowego. Macierze \mathbf{Q} oraz \mathbf{R} mają bezpośrednie analogie w macierzach kowariancji zakłóceń stanu i pomiarów w probabilistycznych modelach zmiennych stanu, gdzie estymator przyjmuje postać filtru Kalmana.

Macierze \mathbf{Q} oraz \mathbf{R} w rozpatrywanym algorytmie projektowania obserwatora stanu są formułowane na podstawie następujących ogólnych zasad projektowych:

- im większe są wyrazy macierzy \mathbf{Q} w porównaniu z elementami macierzy \mathbf{R} , tym szybsza będzie odpowiedź algorytmu – i odwrotnie;
- \mathbf{Q} oraz \mathbf{R} są zazwyczaj macierzami diagonalnymi;
- wartość współczynników wagowych w macierzy \mathbf{Q} powinna być proporcjonalna do ważności odpowiadających im składowych sygnału (w modelu sygnałowym najważniejsze są estymowane wielkości).

Przykład 3.4. Stosując metodę macierzy wagowych zaprojektować obserwator stanu systemu określonego przez model sygnałowy złożony z pierwszej, drugiej i piątej harmonicznej oraz składowej stałej. Założyć, że sygnał wyjściowy jest próbkowany z częstotliwością 1000 Hz ($N=20$).

Przyjmuje się, że macierze wagowe mają następujące wartości:

$$\mathbf{Q} = \text{diag}[5 \ 5 \ 2 \ 2 \ 1 \ 1 \ 2], \quad \mathbf{R} = 100.$$

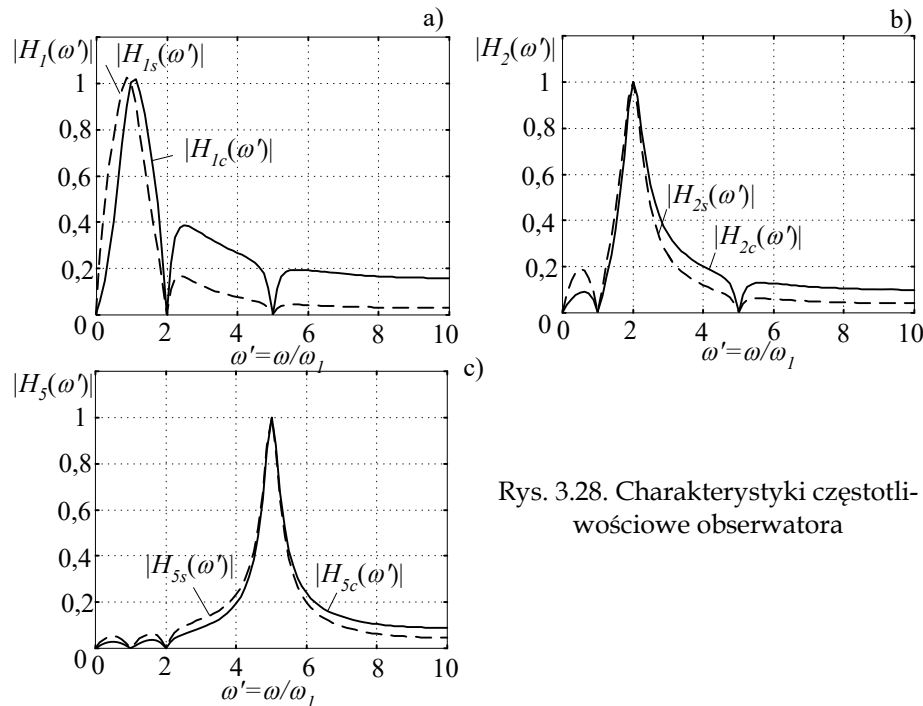
Macierz \mathbf{P} jest określona zgodnie z (3.176), co przy $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$ daje

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 47,51 & -7,62 & -3,83 & -12,88 & 1,55 & -2,84 & -2,48 \\ -7,62 & 52,94 & 6,92 & -0,22 & 0,20 & 0,73 & -14,08 \\ -3,83 & 6,92 & 26,35 & -1,25 & 1,25 & -1,82 & -1,67 \\ -12,88 & -0,22 & -1,25 & 28,66 & 0,24 & 1,09 & -4,26 \\ 1,55 & 0,20 & 1,25 & 0,24 & 15,79 & -0,29 & 0,64 \\ -2,84 & 0,73 & -1,82 & 1,09 & -0,29 & 14,98 & -1,26 \\ -2,48 & -14,08 & -1,67 & -4,26 & 0,64 & -1,26 & 23,68 \end{bmatrix}.$$

Wektor wzmocnienia przyjmuje zatem następującą wartość:

$$\mathbf{k} = [0,221 \ -0,003 \ 0,140 \ -0,008 \ 0,030 \ 0,094 \ 0,100]^T.$$

Charakterystyki częstotliwościowe estymatorów pierwszej, drugiej i piątej harmonicznej są prezentowane na rys. 3.28. □



Rys. 3.28. Charakterystyki częstotliwościowe obserwatora

3.5.2 Niestacjonarne obserwatory stanu

Można zauważyć, że sygnał wyjściowy widmowego niestacjonarnego obserwatora stanu (rys. 3.25) jest utworzony przez parę sygnałów ortogonalnych o odpowiedniej częstotliwości. Sygnały te mają podobną formę jak odpowiedzi algorytmów nierekursywnych z niestacjonarnym oknem pomiarowym. Jest to wynik przyjętej zmiennej w czasie macierzy stanu \mathbf{A} (3.167).

W przypadku niestacjonarnego modelu sygnałowego (3.27), macierz stanu \mathbf{A} jest macierzą jednostkową, a zmienne stanu (które odwzorowują odpowiednie składowe sygnału) osiągają stałe wartości, gdy model sygnałowy jest zgodny z wymuszeniem.

W ogólnym przypadku, model takiego jednowyjściowego systemu ma następującą formę

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k), \\ y(k) &= \mathbf{c}(k)\mathbf{x}(k), \end{aligned} \quad (3.177)$$

przy czym:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{c}(k) = [\mathbf{c}_1(k) \quad \mathbf{c}_2(k) \quad \dots \quad \mathbf{c}_p(k) \quad \mathbf{c}_a(k)], \quad (3.178)$$

a macierz pomiarów $\mathbf{c}(k)$ jest utworzona z następujących elementów:

$\mathbf{c}_i(k) = [\cos(iak) \quad -\sin(iak)]$, $i = 1, 2, \dots, p$ - wektor pomiarów odpowiadający i -tej harmoniczej,

$\mathbf{c}_a(k)$ - wektor odpowiadający modelowi składowej stałej lub składowej aperiodycznej. Jego postać zależy od przyjętego modelu tej komponenty, na przykład,

$\mathbf{c}_a(k) = \mathbf{c}_a = [1]$ - dla najprostszego przypadku oraz

$\mathbf{c}_a(k) = [1 \quad ak \quad (ak)^2]$,

gdy składowa zanikająca jest reprezentowana trzema wyrazami rozkładu funkcji wykładniczej w szereg Taylora (3.16).

Obserwator stanu systemu (3.177) jest określony równaniem:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{k}(k)[y(k) - \mathbf{c}(k)\hat{\mathbf{x}}(k)]. \quad (3.179)$$

Wektor wzmocnienia $\mathbf{k}(k)$ obserwatora (3.179) jest zmienny w czasie i w ogólnym przypadku wartości własne macierzy $\mathbf{\Psi}(k) = \mathbf{A} - \mathbf{k}(k)\mathbf{c}(k)$ nie określają warunków zbieżności obserwatora. Można jednak zauważyć, że dla $\mathbf{A} = \mathbf{1}$ obserwator (3.179) ma taką samą strukturę jak estymator RLS, a macierz $\mathbf{k}(k)$ można określić na podstawie Algorytmu 3.3. Jego nieznaczna modyfikacja pozwala programować właściwości projektowanego obserwatora [4].

Inny sposób syntezy widmowego niestacjonarnego obserwatora stanu polega na transformacji systemu (3.177) do postaci układu niezmiennego w czasie. Macierz wzmocnienia postulowanego obserwatora jest najpierw definiowana w odniesieniu do obserwatora stacjonarnego, a postać ostateczna jest otrzymywana w wyniku odwrotnej transformacji do systemu niestacjonarnego. Model inwariantnego systemu (3.165) może być przetransformowany do równoważnego modelu z zależnością od czasu (3.177) za pomocą takiej macierzy przekształceń $\mathbf{M}(k)$, że:

$$\mathbf{c}_{ns}(k) = \mathbf{c}_s \mathbf{M}(k), \quad (3.180)$$

gdzie: $\mathbf{c}_{ns}(k) = \mathbf{c}(k)$ - wektor pomiarów systemu niestacjonarnego (3.177), $\mathbf{c}_s = \mathbf{c}$ - wektor pomiarów systemu inwariantnego względem czasu (3.165).

Macierz transformacyjna $\mathbf{M}(k)$ powinna spełniać zależność (3.180) w każdym kroku $k = 0, 1, \dots$. Podstawienie (3.177) do równania pomiarowego niestacjonarnego systemu (3.170) prowadzi do

$$y(k) = \mathbf{c} \mathbf{M}(k) \mathbf{x}_{ns}(k) = \mathbf{c} \mathbf{x}_s(k), \quad (3.181)$$

gdzie:

$$\mathbf{M}(k) \mathbf{x}_{ns}(k) = \mathbf{x}_s(k) \quad (3.182)$$

jest relacją pomiędzy zmiennymi stanu systemu niestacjonarnego ($\mathbf{x}_{ns}(k)$) i stacjonarnego ($\mathbf{x}_s(k)$).

Przez podstawienie zależności (3.182) do pierwszego równania w (3.177) otrzymuje się następujące związki (zakłada się, że macierz $\mathbf{M}(k)$ jest nieosobliwa dla każdego k)

$$\mathbf{A}_{ns} = \mathbf{M}^{-1}(k+1) \mathbf{A}_s \mathbf{M}(k), \quad (3.183)$$

$$\mathbf{A}_s = \mathbf{M}(k+1) \mathbf{A}_{ns} \mathbf{M}^{-1}(k), \quad (3.184)$$

gdzie: \mathbf{A}_{ns} - macierz stanu systemu niestacjonarnego (3.177), \mathbf{A}_s - macie stanu systemu stacjonarnego (3.165).

Stosując powyższe zależności w odniesieniu do obserwatora stanu (3.166) otrzymuje się

$$\mathbf{k}_{ns}(k) = \mathbf{M}^{-1}(k+1) \mathbf{k}_s = \mathbf{M}^{-1}(k+1) \mathbf{k}, \quad (3.185)$$

gdzie $\mathbf{k}_{ns}(k)$ jest wektorem wzmocnienia obserwatora niestacjonarnego.

Macierz transformacji $\mathbf{M}(k)$ można otrzymać bezpośrednio z (3.183)

$$\mathbf{M}(k+1) = \mathbf{A}_s \mathbf{M}(k) \mathbf{A}_{ns}^{-1}. \quad (3.186)$$

W rozpatrywanym przypadku $\mathbf{A}_{ns} = \mathbf{1}$, a więc:

$$\mathbf{M}(k+1) = \mathbf{A}_s \mathbf{M}(k), \quad (3.187)$$

z $\mathbf{M}(0) = \mathbf{1}$.

Ostatecznie można sformułować następujący algorytm.

Algorytm 3.7. *Synteza wektora wzmocnienia niestacjonarnego obserwatora stanu.*

- 1. Dla danego niestacjonarnego modelu systemu określić model stacjonarny i macierz $\mathbf{M}(k)$ transformacji do systemu stacjonarnego.
- 2. Określić wektor wzmocnienia obserwatora systemu stacjonarnego (Algorytm 3.6).
- 3. Obliczyć wektor wzmocnienia obserwatora niestacjonarnego zgodnie z procedurą (3.185). □

Należy zauważyć, że powyższy algorytm nie jest tak prosty w zastosowaniu do obserwatora dowolnego systemu niestacjonarnego. W rozpatrywanym zastosowaniu korzysta się z oczywistej symetrii pomiędzy systemem stacjonarnym a niestacjonarnym.

Przykład 3.5. Zaprojektować i zbadać obserwator widmowy 5-stanowego systemu z modelem pierwszej i trzeciej harmonicznej oraz składowej stałej.

Jest to zadanie podobne jak w Przykładzie 3.4, z tym, że wektor pomiarów jest tym razem zmienny w czasie: $\mathbf{c} = \mathbf{c}(k)$. Model systemu jest opisany zależnościami (3.177) gdzie:

$$\mathbf{A}_{ns} = \mathbf{1} \quad (5 \times 5), \quad \mathbf{c}(k) = [\cos(ak) \quad -\sin(ak) \quad \cos(3ak) \quad -\sin(3ak) \quad 1]$$

Odpowiedni model systemu stacjonarnego jest taki jak w Przykładzie 3.4.

Macierz transformacji $\mathbf{M}(k)$ pomiędzy oboma systemami jest określona przez (3.187)

$$\mathbf{M}(k+1) = \mathbf{A}_s \mathbf{M}(k)$$

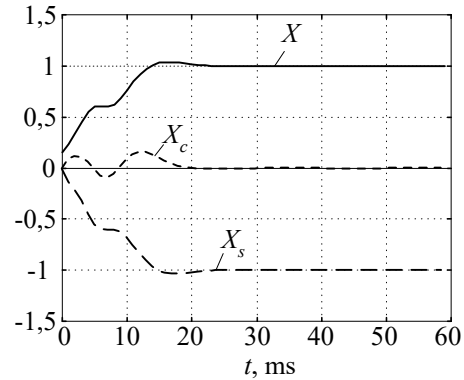
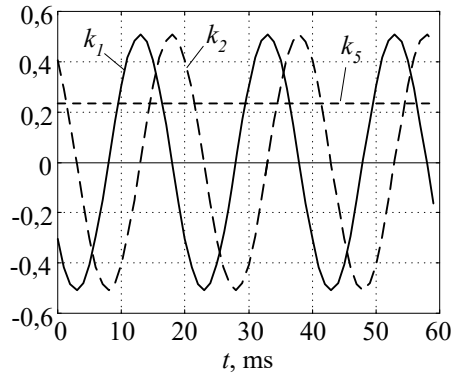
i łatwo można sprawdzić, że przybiera ona następującą postać

$$\mathbf{M}(k) = \begin{bmatrix} \cos(ak) & -\sin(ak) & & & \\ \sin(ak) & \cos(ak) & & & \\ & & \cos(3ak) & -\sin(3ak) & \\ & & \sin(3ak) & \cos(3ak) & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}^{-1}(k) = \mathbf{M}^T(k) = \begin{bmatrix} \cos(ak) & \sin(ak) & & & \\ -\sin(ak) & \cos(ak) & & & \\ & & \cos(3ak) & \sin(3ak) & \\ & & -\sin(3ak) & \cos(3ak) & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

oraz

Dla lepszego porównania obu rozpatrywanych obserwatorów: stacjonarnego i niestacjonarnego przyjmuje się, że macierz Ψ modelu niestacjonarnego jest taka sama jak w Przykładzie 3.4. Wektor wzmocnienia obserwatora systemu niestacjonarnego można otrzymać przez użycie transformacji (3.185) z wektorem



Rys. 3.29. Współczynniki wzmocnienia obserwatora niestacjonarnego

Rys. 3.30. Odpowiedź obserwatora niestacjonarnego

wzmocnienia \mathbf{k} jak w Przykładzie 3.4. Uzyskany wektor $\mathbf{k}_{ns}(k) = \mathbf{k}(k)$ ma zmienne w czasie wyrazy, co pokazuje rys 3.29.

Pary współczynników wzmocnienia dla odpowiednich harmonicznych mają formę ortogonalnych funkcji sinusoidalnych o częstotliwości przyjętej w modelu sygnałowym. Współczynnik wzmocnienia składowej stałej ma wartość stałą. W tym przypadku jest to ta sama wartość co w obserwatorze stacjonarnym. Różnice wystąpią gdy model składowej zanikającej zostanie odpowiednio rozbudowany. Odpowiedź czasowa obserwatora na wymuszenie harmoniczne jak w Przykładzie 3.4 jest pokazana na rys. 3.30. W stanie ustalonym estymaty składowych ortogonalnych (dwa pierwsze elementy wektora stanu) mają stałą wartość. Porównując przebiegi na rys. 3.25 i rys. 3.30 widać, że uzyskane estymaty różnią się tylko sposobem ich reprezentacji. □

3.6 Filtracja Kalmana

Analizowane powyżej algorytmy wywodzą się z kryterium najmniejszych kwadratów (3.88). Przedmiotem minimalizacji jest tam suma kwadratów różnic pomiędzy przyjętym modelem i rzeczywistymi próbkami sygnału. W przypadku, gdy obserwowany proces można przedstawić modelem stochastycznym, rozsądnie jest formułować kryterium najmniejszych kwadratów w odniesieniu do wartości oczekiwanej błęd estymacji. Wartość oczekiwana kwadratu błęd estymacji jest wariancją i stąd nazwa tego typu algorytmu: *estymator minimalnowariancyjny* (ang. *mean-square error* – MSE). Rozpatrywane kryterium odnosi się do sygnałów obserwowanych na wyjściu procesu stochastycznego, a zatem, powinny być znane odpowiednie charakterystyki tego procesu.

3.6.1 Liniowy filtr Kalmana

Model sygnałowy jest tu przedstawiany w postaci równań:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k), \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k), \end{aligned} \quad (3.188)$$

gdzie: $\mathbf{y}(k)$ - wektor próbek sygnałów wejściowych, $\mathbf{w}(k)$ - losowy wektor zakłóceń stanu $\mathbf{x}(k)$ - losowy wektor zakłóceń pomiarowych.

Zakłada się, że (3.188) przedstawia proces losowy z losowym wektorem stanu $\mathbf{x}(k)$ oraz nielosowymi macierzami $\mathbf{A}(k)$ i $\mathbf{C}(k)$ o odpowiednich rozmiarach. Celem estymacji jest określenie wektora estymat $\hat{\mathbf{x}}(k)$, który jest przybliżeniem wektora stanu $\mathbf{x}(k)$. Kryterium minimalnej wariancji błędów estymacji jest określone jako minimum następującej funkcji [1], [2]:

$$\mathbf{P}(k) = E\left\{[\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)][\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)]^T\right\}, \quad (3.189)$$

gdzie: E jest operatorem wartości oczekiwanej (średniej).

Warto zauważyć, że $\mathbf{P}(k)$ jest macierzą kowariancji błędów estymacji.

Probabilistyczne charakterystyki modelu (3.188) są wyznaczone przez macierze kowariancji zakłóceń stanu i pomiarów, które są określone następująco:

- macierz kowariancji zakłóceń stanu:

$$E(\mathbf{w}(k)\mathbf{w}^T(i)) = \begin{cases} \mathbf{Q}(k), & i = k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases} \quad (3.190)$$

- macierz kowariancji zakłóceń pomiarowych:

$$E(\mathbf{v}(k)\mathbf{v}^T(i)) = \begin{cases} \mathbf{R}(k), & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases} \quad (3.191)$$

Do wyprowadzenia odpowiedniego estymatora zgodnie z kryterium (3.189) przyjmuje się następujące założenia odnośnie do systemu (3.188):

- poszukiwany estymator jest nieobciążony

$$E(\hat{\mathbf{x}}(k)) = \mathbf{x}(k), \quad (3.192)$$

- błędy stanu i pomiarów są nieskorelowane

$$E(\mathbf{v}(k)\mathbf{w}^T(k)) = 0, \quad (3.193)$$

- błędy estymacji są niezależne od pomiarów

$$E\left[\left(\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)\right)\mathbf{v}^T(k)\right] = 0, \quad (3.194)$$

co oznacza, że wektor $\hat{\mathbf{x}}(k)$ zależy w sposób losowy od obserwacji do kroku $k - 1$.

Szczegółowe wyprowadzenie estymatora można znaleźć w literaturze specjalistycznej [1], [2]. Uzyskany algorytm nosi nazwę filtru Kalmana i w ogólnej strukturze jest podobny do algorytmu RLS. Szkic wyprowadzenia jest następujący.

- Zakładając, że znana jest estymata $\hat{\mathbf{x}}(k - 1)$ w kroku $k - 1$, dokonywana jest jej ocena (ekstrapolacja) w bieżącym kroku k :

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{A}(k - 1)\hat{\mathbf{x}}(k - 1). \quad (3.195)$$

- Znając pomiary w bieżącym kroku można w odniesieniu do (3.188) zastosować Algorytm 3.1, przy czym, w miejsce rozwiązania z poprzedniego kroku ($\hat{\mathbf{x}}(k - 1)$) korzysta się z oszacowania ekstrapolacyjnego (3.195):

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{K}(k)[\mathbf{y}(k) - \mathbf{C}(k)\mathbf{A}(k)\tilde{\mathbf{x}}(k)], \quad (3.196)$$

gdzie macierz wzmocnienia $\mathbf{K}(k)$ jest określona następującym równaniem

$$\mathbf{K}(k) = \tilde{\mathbf{P}}(k)\mathbf{C}^T(k)[\mathbf{C}(k)\tilde{\mathbf{P}}(k)\mathbf{C}^T(k) + \mathbf{R}(k)]^{-1}, \quad (3.197)$$

przy czym:

$$\tilde{\mathbf{P}}(k) = \mathbf{A}(k - 1)\mathbf{P}(k - 1)\mathbf{A}^T(k - 1) + \mathbf{Q}(k - 1) \quad (3.198)$$

oraz

$$\mathbf{P}(k) = \tilde{\mathbf{P}}(k) - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}(k)\tilde{\mathbf{P}}(k). \quad (3.199)$$

Macierz $\tilde{\mathbf{P}}(k + 1)$ w (3.198) może być interpretowana jako macierz kowariancji błędów ekstrapolatora (3.195).

Zależności (3.195), (3.196) można połączyć, co prowadzi do równania o postaci, w której zazwyczaj jest stosowany filtr Kalmana (Kalmana-Bucy'ego)

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{A}(k - 1)\hat{\mathbf{x}}(k - 1) + \mathbf{K}(k)[\mathbf{y}(k) - \mathbf{C}(k)\mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{x}}(k - 1)], \quad (3.200)$$

gdzie macierz wzmocnienia jest określona przez (3.197)- (3.199).

Do rozpoczęcia obliczeń należy określić wartości początkowe $\hat{\mathbf{x}}(0)$ oraz $\mathbf{P}(0)$. Ponieważ $\mathbf{P}(k)$ jest macierzą kowariancji estymatora $\hat{\mathbf{x}}(k)$,

więc uzasadnione jest przyjęcie określonej wartości $\hat{\mathbf{x}}(0)$ i wówczas $\mathbf{P}(0)$ jest miarą zaufania co do przyjętej wartości $\hat{\mathbf{x}}(0)$ [38]. Jeśli brak jest jakiegokolwiek informacji *a priori* o śledzonym procesie, wówczas na ogół przyjmuje się

$$\hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P}(0) = \rho \mathbf{1}, \quad (3.201)$$

gdzie: ρ jest „dużą” liczbą.

Należy przy tym zauważyć, że jeśli macierz $\mathbf{P}(0)$ jest określona przez małe liczby, to macierz wzmocnienia $\mathbf{K}(k)$ będzie mała w kolejnych krokach i estymaty $\hat{\mathbf{x}}(k)$ będą niewiele odbiegać od $\hat{\mathbf{x}}(0)$. Z drugiej strony, jeśli $\mathbf{P}(0)$ ma duże wartości, to $\hat{\mathbf{x}}(k)$ szybko się zmienia w odniesieniu do $\hat{\mathbf{x}}(0)$, co zwykle objawia się w postaci dużego przeregulowania na początku estymacji.

Istotną cechą zastosowania filtru Kalmana do estymacji sygnałów na bieżąco jest fakt, że wzmocnienie filtru $\mathbf{K}(k)$ nie zależy od pomiarów, co sprawia, że wektor ten może być określony przed rozpoczęciem obliczeń. Ostatecznie można więc podać następujący algorytm projektowania filtru Kalmana i zastosowania go do estymacji sygnału.

Algorytm 3.8. *Synteza filtru Kalmana do estymacji sygnału.*

- 1. Określić model sygnałowy procesu (3.188) oraz jego charakterystyki probabilistyczne: $\mathbf{Q}(k)$ oraz $\mathbf{R}(k)$. Macierze $\mathbf{A}(k)$ i $\mathbf{C}(k)$ są określane według tych samych zasad co w przypadku obserwatorów systemów deterministycznych.
- 2. Określić macierz wzmocnienia $\mathbf{K}(k)$ estymatora. W tym celu należy przyjąć wartość początkową macierzy kowariancji $\mathbf{P}(0)$, a następnie wykonać obliczenia korzystając kolejno z równań: (3.198) – (3.197) – (3.199) dla następujących po sobie kroków k . Należy przy tym przestrzegać zasad „poprawności” numerycznej, co oznacza, że w miejsce odwracania macierzy w (3.197) trzeba raczej stosować jedną z metod rozwiązywania równania

$$\left[\mathbf{C}(k) \tilde{\mathbf{P}}(k) \mathbf{C}^T(k) + \mathbf{R}(k) \right] \mathbf{K}(k) = \tilde{\mathbf{P}}(k) \mathbf{C}^T(k)$$

względem $\mathbf{K}(k)$. Z uwagi na problemy numeryczne konieczna może być również kontrola symetrii macierzy $\mathbf{P}(k)$ oraz $\tilde{\mathbf{P}}(k)$ i ich ewentualna korekcja.

- 3. Przyjąć wartość początkową $\hat{\mathbf{x}}(0)$ i prowadzić estymację obserwowanych mierzonych wielkości na podstawie pomiarów $\mathbf{y}(k)$ i obliczonej wcześniej macierzy $\mathbf{K}(k)$ zgodnie z (3.200). □

W przypadku zabezpieczeń cyfrowych, filtr Kalmana jest stosowany do estymacji parametrów sygnałów, którymi najczęściej są składowe ortogonalne prądu lub napięcia. Właściwe projektowanie filtru wymaga znajomości charakterystyk zakłóceń procesu i pomiaru, które gwałtownie zmieniają się w chwili wystąpienia zwarcia. Stąd też, wzmocnienie filtru jest zasadniczo różne dla stanu normalnej pracy systemu i dla stanu zwarcia. Dlatego, do rozważanych zastosowań filtr Kalmana jest projektowany z myślą o estymacji sygnałów po wystąpieniu zwarcia w nadzorowanym systemie [10], [25]. Filtr jest uruchamiany przez człon detekcji wystąpienia zakłócenia, które może być rozpatrywane jako zwarcie, a okres jego pracy jest stosunkowo krótki – do podjęcia decyzji przez zabezpieczenie.

Struktura modelu sygnałowego, który jest podstawą algorytmu filtru Kalmana jest bardzo podobna do modelu stosowanego w obserwatorze stanu. Różnica dotyczy sposobu rozumienia zmiennych modelu. W przypadku modelu dwustanowego

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1(k) \\ w_2(k) \end{bmatrix}, \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + [v(k)], \end{aligned} \quad (3.202)$$

zmienne $x_1(k)$ oraz $x_2(k)$ są rozpatrywane jako parametry procesu stochastycznego, które są powiązane z mierzonym sygnałem losowym $y(k)$ zgodnie z następującą zależnością deterministyczną (3.25):

$$y(k) = x_1(k) \cos \varphi + x_2(k) \sin \varphi, \quad (3.203)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} x_1(k) &= X \cos(ak), \\ x_2(k) &= X \sin(ak) \end{aligned} \quad (3.204)$$

oraz

$$X = \sqrt{x_1^2(k) + x_2^2(k)}, \quad \varphi = \arctan \frac{x_2(k)}{x_1(k)}. \quad (3.205)$$

Można pokazać [8], że jeśli amplituda X jest zmienną losową o rozkładzie Rayleigha*, a faza φ jest także zmienną losową o rozkładzie

* Zależność tę zwykle definiuje się odwrotnie: jeśli x_1 oraz x_2 są niezależnymi zmiennymi o rozkładzie Gaussa i zerowej wartości średniej, to funkcja

jednostajnym, to składowe $x_1(k)$ oraz $x_2(k)$ w (3.202) są niezależnymi zmiennymi o rozkładzie Gaussa z zerową wartością oczekiwaną i jednostkową wariancją. Ponadto, jeśli można przyjąć, że zakłócenia procesu i pomiaru mają charakter białego szumu (jednakowa gęstość prawdopodobieństwa dla dowolnej częstotliwości.), to estymator Kalmana jest optymalny [9]. W praktyce, obserwowany proces nie spełnia tych idealnych założeń. Na przykład, w rzeczywistym procesie zakłócenia mają ograniczone widmo i nie mogą być rozpatrywane jako szum biały [11], [44]. Pomimo tego filtr Kalmana jest z powodzeniem stosowany, chociaż nie zawsze jest estymatorem optymalnym [10], [19].

Projektując filtr Kalmana należy pamiętać, że składowe nie ujęte w modelu sygnału użytecznego trzeba rozpatrywać jako zakłócenia. Pozwala to zredukować model sygnałowy do niezbędnych składowych, traktując pozostałe składniki jako zakłócenia. W ten sposób, w przeciwieństwie do liniowych filtrów deterministycznych, estymator Kalmana jest przetwornikiem o zmiennym w czasie wzmocnieniu, a jego celem jest separacja zakłóceń w możliwie najkrótszym czasie od jego zainicjowania [13]. W niektórych zastosowaniach (na przykład, w zabezpieczeniu transformatora) estymacji podlega kilka harmonicznym sygnału, które nie mogą być wówczas traktowane jako szum. Wówczas model sygnałowy jest odpowiednio rozbudowany, jak w przypadku deterministycznego obserwatora stanu [25].

Poprawny projekt filtru Kalmana powinien być poprzedzony dokładną analizą charakterystyk probabilistycznych nadzorowanego procesu oraz określeniem najlepszych parametrów początkowych estymacji. W tych badaniach należy także uwzględnić stosowaną częstotliwość próbkowania sygnału oraz właściwości analogowego filtru odcinającego [11], [29]. Użycie przypadkowych, uogólnionych charakterystyk procesu zazwyczaj nie prowadzi do uzyskania bardzo dobrych, optymalnych cech estymatora. Taki ogólny filtr będzie po prostu obserwatorem stanu z charakterystyką zależną od czasu.

Przykład 3.6. Zaprojektować i zbadać filtr Kalmana do celów zabezpieczenia odległościowego linii. Założyć, że sygnały ciągle są próbkowane $N = 20$ razy w okresie składowej podstawowej.

$y = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ma rozkład Rayleigha, którego gęstość jest określona równaniem:

$$f(y) = \frac{y}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right).$$

Sygnały prądu i napięcia są zazwyczaj przedstawiane różnymi modelami: napięcie modelem dwustanowym, który reprezentuje składowe ortogonalne podstawowej harmonicznej, a prąd - modelem trójstanowym, w którym jest także uwzględniona składowa aperiodyczna. To odzwierciedla fakt, że w stanie przejściowym zakłócenia w przebiegu napięcia można uważać za szum biały, natomiast w przebiegu prądu istotnym zakłóceniem może być zanikająca składowa stała, której charakter zależy od parametrów obwodu i momentu wystąpienia zwarcia.

Zakłada się, że sygnał napięcia jest reprezentowany modelem o strukturze, jak w (3.202). Macierz kowariancji błędów procesu $\mathbf{Q}(k)$ można przyjąć równą zero, co jest uzasadnione jeśli pominiemy w rozważaniach problem zmiany częstotliwości sygnału. Macierz kowariancji błędów pomiaru $\mathbf{R}(k)$ (w tym przypadku jest to pojedyncza wartość skalarna) może być określona na podstawie następującego oszacowania [12]

$$\mathbf{R}(k) = R(k) = \sigma_v^2 e^{\frac{-kT}{T_F}} = \sigma_v^2 e^{\frac{-ka}{\omega T_F}},$$

gdzie: σ_v - odchylenie standardowe napięcia, $a = \omega_1 T = 2\pi / T$, T - okres próbkowania,

$$T_F = \frac{L_1 d}{2(R_1 d + R_F)},$$

d - długość zabezpieczanej linii, L_1 , R_1 - odpowiednio indukcyjność i rezystancja jednostkowa linii dla składowej zgodnej, R_F - przewidywana rezystancja zwarcia.

W modelu sygnału prądowego uwzględniona jest także składowa aperiodyczna

$$\begin{bmatrix} i_c(k+1) \\ i_s(k+1) \\ i_a(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(a) & -\sin(a) & 0 \\ \sin(a) & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{-T}{T_F}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_c(k) \\ i_s(k) \\ i_a(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_c(k) \\ w_s(k) \\ w_a(k) \end{bmatrix},$$

$$i(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_c(k) \\ i_s(k) \\ i_a(k) \end{bmatrix} + [v(k)]$$

Macierze kowariancji błędów są określone następująco

$$\mathbf{Q}(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_a(k) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}(k) = R(k) = \sigma_i^2 e^{\frac{-kT}{T_F}} = \sigma_i^2 e^{\frac{-ka}{\omega T_F}},$$

gdzie: $q_a(k)$ - wariancja błędu odwzorowania składowej aperiodycznej, σ_i - standardowe odchylenie prądu.

W rozpatrywanym przypadku można przyjąć następujące parametry modelu: $\sigma_v = 0,1$, $\sigma_i = 0,2$, $N = 20$, $T/T_F = 0,03$ oraz

$$q_a(k) = 0,01e^{\frac{-kT}{T_F}}$$

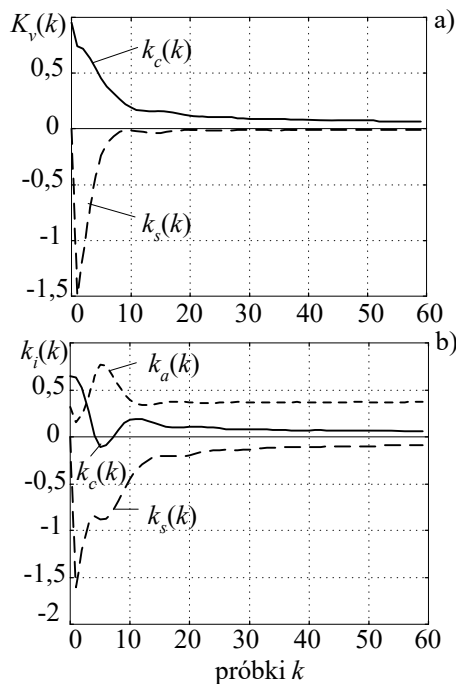
dla podstawowej harmonicznej prądu i napięcia przy częstotliwości $f_1 = 50$ Hz.

Wektor wzmocnienia jest obliczany zgodnie z (3.197), gdzie macierze kowariancji błędów przyjmują następujące wartości

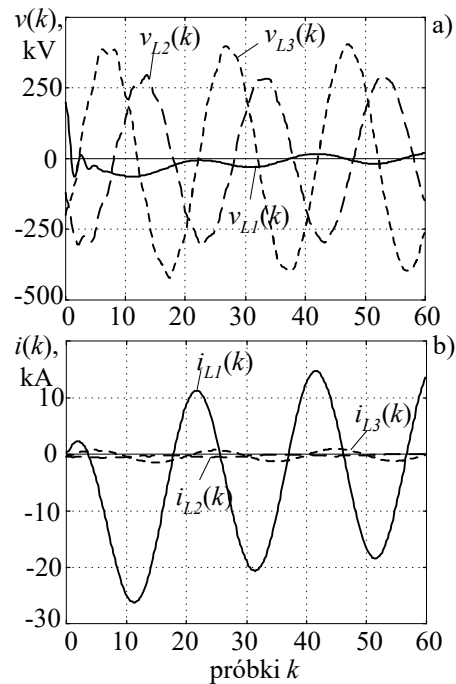
$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix} \text{ - dla napięcia oraz } \tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} \text{ - dla prądu.}$$

Przebiegi otrzymanych współczynników wzmocnienia są pokazane na rys. 3.31. Można zauważyć, że współczynniki wzmocnienia estymatorów składowych ortogonalnych z czasem dążą do zera. Jest to zgodne z założeniem, że zaburzenie ma charakter przejściowy, a kształt przebiegów prądów i napięć zmierza z czasem do formy sinusoidalnej o częstotliwości podstawowej.

Do badania właściwości uzyskanych estymatorów wykorzystano model z Przykładu 1.1 (rys. 1.3). W modelu uwzględnione zostały elementy toru pomiarowego, takie jak: przekładniki prądu i napięcia oraz dolnoprzepustowy filtr



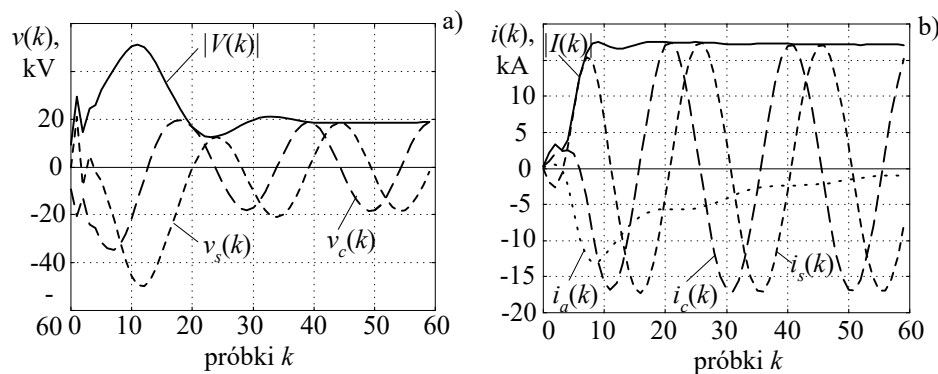
Rys. 3.31. Przebieg współczynników wzmocnienia filtra Kalmana do estymacji napięcia (a) oraz prądu (b)



Rys. 3.32. Przebieg napięcia (a) oraz prądu (b) podczas zwarcia L1-E

analogowy o częstotliwości odcięcia 400 Hz. Sygnały prądu i napięcia są próbkowane z częstotliwością 1000 Hz ($N = 20$ próbek w okresie). Przebiegi prądu i napięcia dla zwarcia fazy $L1$ z ziemią przez rezystancję zwarcia $R_F = 1\Omega$ bezpośrednio za przekładnikami pomiarowymi w stacji A są pokazane na rys. 3.32.

Estymaty składowych ortogonalnych i amplitudy prądu oraz napięcia zwartej fazy są pokazane na rys. 3.33. Można zauważyć, że estymaty napięcia są znacznie odkształcone w przedziale mniej więcej jednego okresu po wystąpieniu zakłócenia. Jest to związane ze stanem przejściowym w pojemnościowym przekładniku bezpośrednio po gwałtownym obniżeniu się napięcia po zwarciu (rys. 3.32), co nie zostało odzwierciedlone w modelu napięcia. Błąd ten może być ograniczony przez odpowiednie uzupełnienie modelu procesu generacji napięcia lub przez zastosowanie korekcji dynamicznej pojemnościowego przekładnika napięciowego [16]. □



Rys. 3.33. Estymaty napięcia (a) oraz prądu (b)

3.6.2 Rozszerzony filtr Kalmana

Filtr Kalmana jest bardzo wygodnym i efektywnym niestacjonarnym estymatorem parametrów systemu liniowego i dlatego znalazł on szerokie zastosowanie w teorii regulacji, identyfikacji systemów oraz do przetwarzania sygnałów. Sprawia to, że odpowiednie modyfikacje tego algorytmu stosuje się także w odniesieniu do systemów nieliniowych [1]. W celu syntezy odpowiedniego algorytmu rozpatruje się system opisany następującym modelem nieliniowym:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(k)) + \mathbf{w}(k), \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}(k)) + \mathbf{v}(k), \end{aligned} \quad (3.206)$$

gdzie: $\mathbf{w}(k)$, $\mathbf{v}(k)$ są, podobnie jak w (3.188), nieskorelowanymi wektorami losowych szumów gaussowskich o zerowej wartości oczekiwanej o intensywności określonej przez macierze kowariancji, odpowiednio $\mathbf{Q}(k)$ oraz $\mathbf{R}(k)$.

Istnieje wiele sposobów linearyzacji równań (3.206), które dają możliwość estymacji wektora stanu $\mathbf{x}(k)$ za pomocą zmodyfikowanego algorytmu, który nosi nazwę *Rozszerzonego Filtru Kalmana* (RFK) (ang. *Extended Kalman Filter*) [23]. Ich różnorodność wynika stąd, że w ogólnym przypadku nie można zagwarantować stabilności procesu estymacji dla nieliniowego systemu. Prezentowane poniżej podejście jest najczęściej stosowane do przetwarzania sygnałów [26], [31], [40].

W tym przypadku obserwator systemu (3.206) ma następującą postać

$$\mathbf{P}_1(k) = \mathbf{F}(k)\mathbf{P}(k)\mathbf{F}^T(k) + \mathbf{Q}(k), \quad (3.207)$$

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}_1(k)\mathbf{H}^T(k) [\mathbf{H}(k)\mathbf{P}_1(k)\mathbf{H}^T(k) + \mathbf{R}(k)]^{-1}, \quad (3.208)$$

$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{P}_1(k) - \mathbf{K}(k)\mathbf{H}(k)\mathbf{P}_1(k), \quad (3.209)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_1(k+1) = \hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{K}(k)[\mathbf{y}(k) - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}(k))], \quad (3.210)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_1(k+1)), \quad (3.211)$$

gdzie:

$$\mathbf{F}(k) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))}{\partial \mathbf{x}(t)} \right|_{\mathbf{x}(t)=\hat{\mathbf{x}}(t_k)}, \quad \mathbf{H}(k) = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}(t))}{\partial \mathbf{x}(t)} \right|_{\mathbf{x}(t)=\hat{\mathbf{x}}_1(t_k)}. \quad (3.212)$$

Należy zauważyć, że estymator (3.210) może być również stosowany jako obserwator systemu deterministycznego [31]. Wówczas macierze $\mathbf{Q}(k)$ oraz $\mathbf{R}(k)$ charakteryzujące zakłócenia są nieznane, a w powyższym algorytmie można je przyjmować jako stałe parametry $\mathbf{Q}(k) = \mathbf{Q}$, $\mathbf{R}(k) = \mathbf{R}$ regulujące proces estymacji (powinny to być macierze symetryczne dodatnio określone, to znaczy takie, których współczynniki diagonalne są dodatnie [21]). Do rozpoczęcia estymacji zgodnie z (3.207)-(3.212) należy określić wartość początkową macierzy $\mathbf{P}(0)$ (powinna to być również macierz symetryczna określona dodatnio) oraz wektora estymat $\hat{\mathbf{x}}(0)$.

Problem nieliniowej estymacji parametrów sygnałów występuje najczęściej w przypadku, gdy należy określić amplitudę sygnału o nieznannej częstotliwości. Wygodnie jest wówczas korzystać z zespolonej reprezentacji sygnału [5]. Obserwowany sygnał może być przedstawiony następującym modelem:

$$\underline{y}(k) = Ae^{j\omega'ak} + \underline{v}(k), \quad (3.213)$$

gdzie: a - kąt między kolejnymi próbkami sygnału o częstotliwości znamionowej (3.8), $\underline{v}(k)$ - zakłócenie zespolone, którego obie składowe są od siebie niezależne i mają taką samą wariancję.

Aby przedstawić proces (3.213) w postaci modelu stanowego wprowadza się następujące zmienne stanu [26]:

$\underline{x}_1(k) = e^{j\omega'a}$ - zmienna reprezentująca przesunięcie wektorowe pomiędzy dwiema kolejnymi próbkami sygnału $\underline{y}(k)$,

$\underline{x}_2(k) = e^{j\omega'a} \underline{x}_2(k-1)$ - zmienna odpowiadająca estymacie sygnału $\underline{y}(k)$.

Proces (3.213) może być zatem przedstawiony następującym modelem stanowym

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{x}}(k+1) &= \mathbf{f}(\underline{\mathbf{x}}(k)), \\ \underline{y}(k) &= \mathbf{h}\underline{\mathbf{x}}(k) + \underline{v}(k), \end{aligned} \quad (3.214)$$

gdzie: $\underline{\mathbf{x}}(k) = [x_1(k) \ x_2(k)]^T$, $\mathbf{f}(\underline{\mathbf{x}}(k)) = [x_1(k) \ x_1(k)x_2(k)]^T$, $\mathbf{h} = [0 \ 1]$.

Można zauważyć, że wszystkie sygnały w (3.214) są zespolone, co ogranicza zastosowanie tego modelu do przypadku, gdy dostępny jest pomiarowo sygnał zespolony $\underline{y}(k)$. W przypadku systemu trójfazowego, sygnał taki można łatwo uzyskać dzięki przekształceniu $\alpha\beta$ (p. 4.6)

$$\begin{bmatrix} y_\alpha(k) \\ y_\beta(k) \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_a(k) \\ y_b(k) \\ y_c(k) \end{bmatrix}, \quad (3.215)$$

przy czym: $\underline{y}(k) = y_\alpha(k) + jy_\beta(k)$, $y_a(k)$, $y_b(k)$, $y_c(k)$ - wielkości fazowe (prąd lub napięcie).

Nieliniowy obserwator systemu (3.214) nosi nazwę *Rozszerzonego Zespolonego Filtru Kalmana* (RZFK). Jego postać jest podobna do filtru (3.210) z tym, że transpozycję zespolonych wektorów i macierzy ($\underline{\mathbf{B}}^T$) w (3.207)-(3.212) należy zastąpić operacją sprzężenia ($\underline{\mathbf{B}}^*$). W celu wyznaczenia macierzy sprzężonej $\underline{\mathbf{B}}^*$ z macierzą $\underline{\mathbf{B}}$ należy dokonać transpozycji macierzy

pierwotnej (obliczyć $\underline{\mathbf{B}}^T$), a następnie zastąpić każdy element macierzy $\underline{\mathbf{B}}^T$ elementem z nim sprzężonym (to samo odnosi się do wektorów) [21].

Algorytm 3.9. *Rozszerzony zespolony filtr Kalmana do estymacji sygnałów (system (3.214)).*

Realizacja filtru sprowadza się do wykonania następujących działań:

- $\underline{\mathbf{P}}_1(k) = \underline{\mathbf{F}}(k)\underline{\mathbf{P}}(k)\underline{\mathbf{F}}^*(k) + \underline{\mathbf{Q}}(k),$
- $\underline{\mathbf{k}}(k) = \frac{\underline{\mathbf{P}}_1(k)\underline{\mathbf{h}}^T}{\underline{\mathbf{h}}\underline{\mathbf{P}}_1(k)\underline{\mathbf{h}}^T + r(k)},$
- $\underline{\mathbf{P}}(k) = \underline{\mathbf{P}}_1(k) - \underline{\mathbf{k}}(k)\underline{\mathbf{h}}\underline{\mathbf{P}}_1(k),$
- $\underline{\hat{\mathbf{x}}}'(k+1) = \underline{\hat{\mathbf{x}}}(k) + \underline{\mathbf{k}}(k)[y(k) - \underline{\mathbf{h}}\underline{\hat{\mathbf{x}}}(k)],$
- $\underline{\hat{\mathbf{x}}}(k+1) = \underline{\mathbf{f}}(\underline{\hat{\mathbf{x}}}'(k+1)),$

$$\text{gdzie: } \underline{\mathbf{F}}(k) = \left. \frac{\partial \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{x}}(t))}{\partial \underline{\mathbf{x}}(t)} \right|_{\underline{\mathbf{x}}(t)=\underline{\hat{\mathbf{x}}}(t_k)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \hat{x}_2(k) & \hat{x}_1(k) \end{bmatrix}. \quad \square$$

Wielkości $\underline{\mathbf{Q}}(k)$ oraz $r(k)$ są odpowiednimi probabilistycznymi charakterystykami procesu (w przypadku modelu probabilistycznego) lub pewnymi założonymi parametrami estymatora (gdy zakłada się model deterministyczny). W ostatnim przypadku uzyskany algorytm jest po prostu nieliniowym zespolonym obserwatorem stanu.

Podobnie jak w przypadku obserwatora systemu liniowego, proces (3.214) można rozszerzać również na inne składowe. Ilustruje to poniższy przykład.

Przykład 3.7. Zaprojektować filtr Kalmana do estymacji częstotliwości i składowej podstawowej wektora systemu trójfazowego. Założyć, że w obserwowanym sygnale oprócz składowej podstawowej może występować wydatna trzecia harmoniczna.

Model obserwowanego sygnału jest określony następująco

$$\underline{y}(k) = y_\alpha(k) + jy_\beta(k) = A_1 e^{j\omega'ak} + A_3 e^{j3\omega'ak} + \underline{v}(k)$$

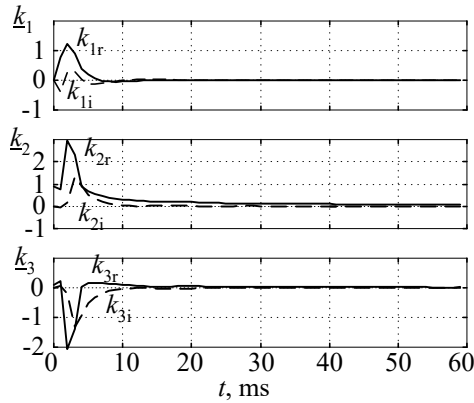
Jeśli wykonać następujące podstawienie:

$$\underline{x}_1(k) = e^{j\omega'a} \quad - \text{zmienna reprezentująca przesunięcie wektorowe pomiędzy dwiema kolejnymi próbkami sygnału } \underline{y}(k),$$

$$\underline{x}_2(k) = A_1 e^{j\omega'ak} \quad - \text{sygnał składowej podstawowej},$$

$$\underline{x}_3(k) = A_3 e^{j3\omega'ak} \quad - \text{sygnał trzeciej harmonicznej},$$

to obserwowany sygnał może być określony w postaci sumy dwóch składowych:



Rys. 3.36. Przebieg zmian współczynników wzmocnienia estymatora

sygnałów: $\underline{x}_1(k)$, $\underline{x}_2(k)$ oraz $\underline{x}_3(k)$.

Postać wektora obserwacji \mathbf{h} wynika bezpośrednio ze sposobu reprezentacji zmiennej wyjściowej $\underline{y}(k)$: $\mathbf{h} = [0 \ 1 \ 1]$.

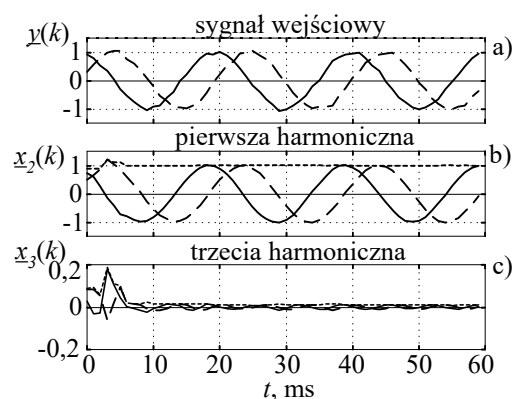
Poszukiwany filtr Kalmana jest określony przez Algorytm 3.9, gdzie

$$\underline{\mathbf{F}}(k) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\underline{\mathbf{x}}(t))}{\partial \underline{\mathbf{x}}(t)} \right|_{\underline{\mathbf{x}}(t) = \hat{\underline{\mathbf{x}}}(t_k)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \hat{x}_2(k) & \hat{x}_1(k) & 0 \\ 3\hat{x}_1^2(k)\hat{x}_3(k) & 0 & \hat{x}_1^3(k) \end{bmatrix},$$

a pozostałe parametry mają postać jak w (3.214).

Przyjęto następujące parametry projektowe filtru:

$$\underline{\mathbf{x}}(0) = [e^{ja} \ 0 \ 0]^T, \quad \mathbf{P}(0) = \text{diag}[1000 \ 1000 \ 100], \quad \underline{\mathbf{Q}}(k) = \mathbf{Q} = 0 \quad \text{oraz} \quad \underline{r}(k) = r = 1.$$



Rys. 3.34. Sygnał wejściowy (a) oraz estymaty pierwszej (b) i trzeciej (c) harmonicznych

$$\underline{y}(k) = \underline{x}_2(k) + \underline{x}_3(k).$$

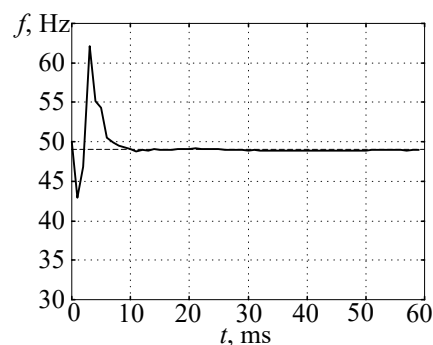
Ogólny model rozpatrywanego procesu jest określony przez (3.214), przy czym wektor stanu ma następującą postać:

$$\underline{\mathbf{x}}(k) = [x_1(k) \ x_2(k) \ x_3(k)]^T.$$

Funkcja $\mathbf{f}(\underline{\mathbf{x}}(k))$ zgodnie z (3.214) określa dynamikę modelu i przy przyjętych powyżej podstawieniach jest określona następującym wektorem:

$$\mathbf{f}(\underline{\mathbf{x}}(k)) = [x_1(k) \ x_1(k)x_2(k) \ x_1^3(k)x_3(k)]^T,$$

gdzie poszczególne elementy wektora odpowiadają estymatom sy-



Rys. 3.35. Estymata częstotliwości sygnału

Rezultaty estymacji są pokazane na rys. 3.34b,c (estymaty pierwszej i trzeciej harmonicznej) oraz 3.35 – estymata częstotliwości. Przebieg zmian współczynników wzmocnienia jest prezentowany na rys. 3.36. Widać, że odpowiedź estymatora ustala się mniej więcej po połowie okresu analizowanego sygnału. Po tym czasie estymator ‘nasyca się’ danymi i wszystkie współczynniki wzmocnienia zbliżają się do wartości zerowych.

W przebiegu częstotliwości widać duże przeregulowanie na początku estymacji, gdyż zmienna $x_1(k)$, w której ukryta jest częstotliwość, wpływa na pozostałe zmienne i cały proces estymacji. Może to być źródłem niestabilności estymatora. Dobrym środkiem zaradczym, który stabilizuje filtr jest skalowanie estymaty $\hat{x}_1(k)$ w każdym kroku obliczeniowym zgodnie z następującą zależnością [6]:

$$\hat{x}_1'(k) = \frac{\hat{x}_1(k)}{|\hat{x}_1(k)|}, \text{ gdzie } \hat{x}_1'(k) \text{ jest nową, unormowaną wartością.}$$

Korekcję należy przeprowadzać po czwartym kroku Algorytmu 3.9.

Widać, że zmienna $\hat{x}_1(k)$ bezpośrednio nie przedstawia częstotliwości; można ją obliczyć na podstawie następującego związku:

$f = \arg(\hat{x}_1(k))f_0 / a$, gdzie a przedstawia kąt między próbkami postulowanej podstawowej harmonicznej obserwowanego sygnału (o częstotliwości znamionowej f_0): $a = \frac{2\pi}{N} = 2\pi f_0 T$, T - okres próbkowania. □

3.7 Podsumowanie

W tym rozdziale przedstawione zostały podstawowe algorytmy estymacji sygnałów elektrycznych z punktu widzenia ich zastosowania w automatyce elektroenergetycznej. W tym przypadku prąd i napięcie są z reguły reprezentowane w postaci zespolonych modeli sygnałowych, zatem ich identyfikacja polega na określeniu składowych ortogonalnych. Pozwala to wyznaczyć amplitudę i fazę składowej podstawowej oraz harmonicznych obserwowanego sygnału.

Istotą takiego podejścia jest przejście z dziedziny czasu, w której sygnał jest postrzegany na wejściu procedury, do dziedziny częstotliwości, w której wyznaczane są jego parametry. Właściwości przytoczonych algorytmów są zatem oceniane za pomocą charakterystyk częstotliwościowych (z punktu widzenia ich dokładności i odporności na zakłócenia) oraz charakterystyk dynamicznych (z punktu widzenia czasu ustalania się odpowiedzi i błędów przejściowych). W ocenie algorytmu istotna jest także złożoność obliczeniowa i wymagana częstotliwość próbkowania sygnału wejściowego, chociaż rozumienie tej cechy istotnie zmieniło się po

upowszechnieniu procesorów sygnałowych w rozważanych zastosowaniach.

Przedstawione metody estymacji można charakteryzować na różny sposób. Oto podział z uwzględnieniem najistotniejszych cech.

- Sposób organizacji procesu obliczeniowego:
 - metody nierekursywne: algorytm Fouriera i Walsha, podstawowy algorytm liniowej i nieliniowej MNK;
 - metody rekursywne: RLS, NRLS, obserwator stanu, filtr Kalmana, a także niektóre metody nierekursywne, które mogą być zapisane w wersji rekursywnej (algorytm Fouriera i Walsha).
- Forma reprezentacji modelu sygnałowego:
 - zbiór kolejnych danych zawartych w oknie pomiarowym,
 - model procesu w postaci zmiennych stanu (modele procesu i pomiaru).
- Charakter zmian estymowanych składowych ortogonalnych (w ustalonych warunkach znamionowych):
 - w kolejnych krokach przetwarzania estymowany wektor obraca się na płaszczyźnie zespolonej o kąt, odpowiadający prędkości kątowej wyznaczonej harmonicznym,
 - estymowany wektor wyznacza niezmienną w czasie amplitudę zespoloną określonej harmonicznym sygnału.
- Założenia co do liniowości modelu sygnałowego:
 - metody liniowe (algorytm Fouriera i Walsha, liniowy algorytm MNK w wersji nierekursywnej i rekursywnej, obserwator stanu, filtr Kalmana);
 - metody nieliniowe (nieliniowy algorytm MNK, NRLS, rozszerzony filtr Kalmana).
- Charakter modelu sygnałowego:
 - model deterministyczny,
 - model stochastyczny (filtr Kalmana).

Klasyfikacja ta ma nie tylko znaczenie porządkujące. Wybór określonej metody powinien uwzględniać zarówno właściwości algorytmu, jak i charakter obserwowanego procesu. Nie do pominięcia jest także ocena możliwości jej realizacji w zakładanym systemie mikroprocesorowym.

Warto zauważyć, że forma estymatorów parametrów sygnałowych uzyskanych w wyniku stosowania nierekursywnej metody najmniejszych kwadratów jest podobna, a w niektórych przypadkach identyczna z odpowiednimi algorytmami korelacyjnymi. W praktycznych zastosowaniach zazwyczaj nie odróżnia się tych dwóch metod, gdyż sprawdzają się one do korelacyjnego algorytmu estymacyjnego. Funkcja

korelacyjna może być określona na podstawie DPF (algorytm Fouriera) lub przekształcenia Walsh'a (algorytm Walsh'a), a także zgodnie z procedurą MNK. Do zapisu tych algorytmów stosuje się zazwyczaj jednolite oznaczenia, przyjmując: $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$. Należy jednak pamiętać, że wektory te reprezentują odpowiednio postulowane (\mathbf{x}) oraz estymowane ($\hat{\mathbf{x}}$) parametry sygnału.

3.8 Literatura

- [1] Anderson B.D.O., Moore J.B.: *Filtracja optymalna*. WNT, Warszawa. 1984.
- [2] Bozic S.M.: *Digital and Kalman Filtering*. Edward Arnold Ltd. London 1979.
- [3] Cichocki A., Unbehauen R.: *Neural network for optimization and signal processing*. John Wiley & Sons Ltd. & B.G. Teubner, Stuttgart 1993.
- [4] Dash P.K., Panda D.K.: *Digital Impedance Protection of Power Transmission Lines Using a Spectral Observer*. IEEE Trans. on Power Delivery, 1988 Vol. 3, No 1, ss. 102-108.
- [5] Dash P.K., Pradhan A.K., Panda D.K.: *Frequency estimation of distorted power system signals using extended complex Kalman filter*. IEEE Trans. on Power Delivery, 1999 Vol. 14, No 3, ss. 761-766.
- [6] Dash P.K., Pradhan A.K., Panda G.: *Frequency estimation of distorted power system signals using extended complex Kalman filter*. IEEE Trans. on Power Delivery, 1999 Vol. 14, No 3, ss. 761-766.
- [7] Dennis J.E., Schnabel R.B.: *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations*. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J. 1983.
- [8] Dwight F.M.: *Random signal processing*. Prentice-Hall. Englewood Cliffs, N. J. 1993.
- [9] Gardner W.A.: *Introduction to random process with application to signals and systems*. Macmillan Publishing Company. New York 1986.
- [10] Girgis A.A., Brown R.G.: *Application of Kalman filtering in computer relaying*. IEEE Trans. on PAS, 1981 Vol. 100, No 7, ss. 3387-3397.
- [11] Girgis A.A., Brown R.G.: *Modelling of fault-induced noise signals for computer relaying applications*. IEEE Trans. on PAS, 1983 Vol. 102, No 9, ss. 2834-2841.
- [12] Girgis A.A., Hart D.G.: *Implementation of Kalman and Adaptive Kalman Filtering Algorithms for Digital Distance Protection on a Vector Signal Processor*. IEEE Trans. on Power Delivery, 1989 Vol. 4, No 1, ss. 141-149.
- [13] Girgis A.A., Hwang T.L.D.: *Optimal Estimation of Voltage Phasors and Frequency Deviation Using Linear and Non-Linear Kalman Filtering: Theory and Limitations*. IEEE Trans. on PAS, 1984 Vol. 103, No 10, ss. 2943-2949.

- [14] Hostetter G.H.: *Recursive Discrete Fourier Transformation*. IEEE Trans. on Accoustics, Speech, and Signal Processing, 1980 Vol. 28, No 2, ss. 184-190.
- [15] Isaksson A.: *Digital protective relaying through recursive least-squares identification*. IEE Proc. Pt. C, 1988 No 5, ss. 441-449.
- [16] Iżykowski J., Kasztenny B., Rosołowski E, Saha M.M., Hillstrom B.: *Dynamic Compensation of Capacitive Voltage Transformers*. IEEE Trans. on Power Delivery, 1998 Vol. 13, No 1, ss. 116-122.
- [17] Jeyasurya B., Rahman M.A.: *Application of Walsh Functions for Microprocessor-Based Transformer Protection*. IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility, 1985 Vol. 27, No 4, ss. 221-223.
- [18] Johnes A.T., Salman S.K.: *Digital Protection for Power Systems*. London: Peter Peregrinus Ltd, IEE Power Series 15, 1993.
- [19] Johnson N.G., Sachdev M.S., Wood H.C.: *Use of the Kalman filtering technique for power system protection - an insigh*. Third International Conference on DPSP, 1985, IEE Conference Publ. No. 249, ss. 160-164.
- [20] Kaczorek T.: *Teoria sterowania i systemów*. PWN. Warszawa 1993.
- [21] Kaczorek T.: *Wektory i macierze w automatyce i elektrotechnice*. WNT. Warszawa 1998.
- [22] Kailath T.: *Linear systems*. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J. 1980.
- [23] Misawa E.A., Hedrick J.K.: *Nonlinear observers - a state-of-the-art survey*. Transactions of ASME, part G, 1989 Vol. 111, ss. 344-352.
- [24] Mitra S.K., Kaiser J.F. (ed.): *Handbook for digital signal processing*. John Wiley & Sons, Inc. New York 1993.
- [25] Murty Y.V.V.S., Smolinski W.J., Sivakumar S.: *Design of a Digital Protection Scheme for Power Transformers Using Optimal State Observers*. IEE Proc., 1988 Vol. 135, Pt. C. No 3, ss. 224-230.
- [26] Nishiyama K.: *A Nonlinear Filter for Estimating a Sinusoidal Signal and Its Parameters in White Noise: On the Case of a Single Sinusoid*. IEEE Trans. Signal Processing, 1997 Vol. 45, No 4, ss. 970-981.
- [27] Phadke A.G., Thorp J.S.: *Computer Relaying for Power Systems*. Research Studies Press Ltd. Taunton, Somerset 1994.
- [28] Phadke A.G., Thorp J.S., Adamiak M.G.: *A New Measurement Technique for Tracking Voltage Phasors, Local System Frequency, and Rate of Change of Frequency*. IEEE Trans. on PAS, 1983 Vol. 102, No 5, ss. 1025-1033.
- [29] Pinto de Sa J.L.: *A new Kalman filter approach to digital relaying*. IEEE Trans. on Power Delivery, 1992 Vol. 7, No 3, ss. 1652-1658.
- [30] Rahman M.A., Jeyasuryya B.: *A state-of-the-art review of transformer protection algorithms*. IEEE Trans. on Power Delivery, 1988 Vol. 3, No 2, ss. 534-543.
- [31] Reif K, Unbehauen R.: *The Extended Kalman Filter as an Exponential Observer for Nonlinear Systems*. IEEE Trans. Signal Processing, 1999 Vol. 47, No 8, ss. 2324-2328.

- [32] Rosołowski E.: *Analiza algorytmów cyfrowych zabezpieczeń elektroenergetycznych*. Prace Naukowe Instytutu Energoelektryki Pol. Wr. Nr 88. Wydawnictwo Pol. Wr. Wrocław 1992.
- [33] Rosołowski E.: *The Method of State Observer Synthesis by the Use of the Bidiagonal Canonical Form*. Archives of Control Sciences, 1992 Vol. 1 (XXXVII), No 1-2, ss. 101-107.
- [34] Rosołowski E.: *The method of state observer synthesis for multivariable systems by use of the bidiagonal canonical form*. Archives of Control Science, 1994 Vol. 3 (XXXIX), No 3-4, ss. 211-223.
- [35] Rosołowski E., Iżykowski J., Kasztenny B.: *Adaptive measuring algorithm suppressing a decaying DC component for digital protective relay*. Electric Power System Research, 60 (2001), ss. 99-105.
- [36] Rutkowski L.: *Filtry adaptacyjne i adaptacyjne przetwarzanie sygnałów. Teoria i zastosowanie*. WNT. Warszawa 1994.
- [37] Sachdev M.S., Nagpal M.: *A Recursive Least Error Squares Algorithm for Power System Relaying and Measurement Applications*. IEEE Trans. on Power Delivery, 1991 Vol. 6, No 3, ss. 1008-1013.
- [38] Söderström T, Stoica P.: *Identyfikacja systemów*. WNT. Warszawa 1997.
- [39] Stoer J., Bulirsch R.: *Wstęp do analizy numerycznej*. PWN. Warszawa 1987.
- [40] Stoica P., Li H, Li J.: *Amplitude estimation of sinusoidal signals: survey, new results, and an application*. IEEE Trans. Signal Processing, 2000 Vol. 48, No 2, ss. 338-352.
- [41] Szabatin J.: *Podstawy teorii sygnałów*. WKiŁ. Warszawa 2000.
- [42] Szafran J.: *Rozpoznawanie sygnałów w cyfrowej automatyce zabezpieczeniowej*. Prace Naukowe Instytutu Energoelektryki Pol. Wr. Nr 83. Wydawnictwo Pol. Wr. Wrocław 1990.
- [43] Terzija V.V.: *Improved recursive Newton-type algorithm for power system relaying and measurement*. IEE Proc.-Gener. Transm. Distrib. 1998 Vol. 145, No 1, ss. 15-20.
- [44] Thorp J.S., Phadke A.G., Horowitz S.H., Beehler J.E.: *Limits to Impedance Relaying*. IEEE Trans. on PAS, 1979 Vol. 98, No 1, ss. 246-260.
- [45] Ungrad H., Winkler W., Wiszniewski A.: *Protection techniques in electrical energy systems*. Marcel Dekker, Inc. New York 1993.
- [46] Wiszniewski A.: *Algorytmy pomiarów cyfrowych w automatyce elektroenergetycznej*. WNT. Warszawa 1990.
- [47] Young P.: *Recursive estimation and time-series analysis*, Springer-Verlag. Berlin 1984.

Rozdział 4

ESTYMACJA WIELKOŚCI KRYTERIALNYCH

4.1 Wprowadzenie

W poprzednim rozdziale analizowane były niektóre ważniejsze techniki cyfrowego przetwarzania sygnałów i estymacji ich parametrów stosowane w automatyce elektroenergetycznej. W praktycznych zastosowaniach stosuje się również inne algorytmy, które nie zostały zakwalifikowane do rozważanych powyżej metod. Należą do nich m.in. algorytmy numerycznego różniczkowania, algorytmy korzystające z tych samych sygnałów przesuniętych w czasie lub metody wywodzące się z modeli chronionych obiektów.

W tym rozdziale analizowane są metody pomiaru podstawowych wielkości elektrycznych, które stosowane są w charakterze wielkości kryterialnych w przekaźnikach zabezpieczeniowych oraz innych układach automatyki elektroenergetycznej. Omówiono przede wszystkim algorytmy, które mają zastosowanie w systemach prądu przemiennego, w których sygnały są przedstawiane w postaci zespolonej. Podstawą określania złożonych wielkości elektrycznych, takich jak moc lub impedancja są w tym przypadku algorytmy estymacji sygnału zespolonego na podstawie cyfrowego pomiaru dostępnych wartości prądu lub napięcia. Zaprezentowano ogólne podejście do tego problemu, którego podstawą jest analiza relacji zachodzących pomiędzy wektorami przedstawiającymi sygnały zespolone. Odpowiednie użyteczne zależności można uzyskać korzystając z parametrów przynajmniej dwóch przesuniętych wektorów tego samego sygnału. Do przesuwania wektorów mogą być stosowane różne metody, które prowadzą do algorytmów estymacji sygnału zespolonego. Podano podstawowe charakterystyki tych algorytmów.

Znając zespoloną reprezentację sygnałów prądu i napięcia można łatwo określić złożone wielkości elektryczne, jak moc lub impedancja. Należy podkreślić, że rozważane tu algorytmy pomiaru mocy czynnej i biernej odnoszą się do określonych harmonicznym prądu i napięcia – zatem

ich zastosowanie do celów innych niż przedstawione w niniejszej pracy powinno być poprzedzone dodatkową analizą.

W analizie obwodów zwarciovych dużą rolę odgrywają przekształcenia układu współrzędnych systemu trójfazowego. Uzyskane w ten sposób wielkości w zmienionym (modalnym) układzie współrzędnych są również często stosowane w automatyce elektroenergetycznej. W tym rozdziale przedstawiono podstawowe algorytmy szybkiej estymacji składowych symetrycznych prądu lub napięcia oraz składowych 0 , α , β . W przytoczonych algorytmach wykorzystywane są składowe ortogonalne sygnałów, które można uzyskać różnymi metodami.

W ostatniej części rozdziału przedstawiono przegląd algorytmów stosowanych do szybkiego pomiaru częstotliwości w nadzorowanym systemie. Parametr ten jest wielkością kryterialna w wielu układach automatyki elektroenergetycznej, a jako wielkość pomocnicza może być użyty do korekcji algorytmów pomiarowych wrażliwych na zmiany częstotliwości. Problem ten może być bardzo ważny w przypadku dużych awarii systemowych, gdy w wydzielonych fragmentach systemu elektroenergetycznego dochodzi do przejściowych, nawet znacznych zmian częstotliwości. Wówczas szczególnie ważna jest poprawna praca układów automatyki.

Większość elektrycznych wielkości stosowanych jako kryteria działania zabezpieczeń odnosi się do podstawowej lub innej wybranej harmonicznej sygnału prądu lub napięcia. Z punktu widzenia cyfrowego przetwarzania sygnałów oznacza to, że w układach pomiarowych powinny być zastosowane filtry wąskopasmowe, które dokonują selekcji sygnału o zadanej częstotliwości. Odmienna sytuacja występuje w przypadku pomiaru wartości skutecznej prądu lub napięcia - tu należy uwzględnić całe pasmo sygnału wejściowego.

4.2 Pomiar wartości skutecznej sygnału

Pojęcie wartości skutecznej sygnału okresowego (ang. *Root Mean Square - RMS*) jest związane ze średnią mocą sygnału i w odniesieniu do sygnału elektrycznego ma znaną interpretację fizyczną: jest to moc wydzielana w oporniku gdyby przez niego płynął prąd stały o tej właśnie wartości. Nie rozróżnia się zatem kształtu sygnału, a wynik pomiaru odnosi się łącznie do wszystkich składowych zawartych w sygnale. W odniesieniu do sygnału ciągłego wartość skuteczna sygnału $x(t)$ jest definiowana następująco:

$$X_{sk} = \sqrt{\frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} x^2(t) dt}, \quad (4.1)$$

gdzie: T_1 jest okresem sygnału.

W przypadku sygnału dyskretnego $x(k)$ odpowiednia zależność może być określona przez dyskretną aproksymację (4.1). Na przykład, stosując metodę prostokątów otrzymuje się

$$X_{sk}(k) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x^2(k-i)}, \quad (4.2)$$

N – liczba próbek w okresie sygnału.

Powyższa procedura jest dosyć złożona numerycznie. Jeśli obserwowany przebieg jest w małym stopniu odkształcony, to jego wartość skuteczna może być oszacowana na podstawie znajomości amplitudy. Amplituda sygnału harmonicznego może być określona w znany sposób na podstawie jego składowych ortogonalnych. W tym jednak przypadku można zastosować prostą procedurę, która wywodzi się z obliczania wartości średniej wyprostowanego przebiegu [41]. Uwzględniając odpowiednie współczynniki skalujące uzyskuje się następującą formułę estymacji pełnookresowej

$$X_{sk}(k) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4N} \sum_{i=0}^{N-1} |x(k-i)|. \quad (4.3)$$

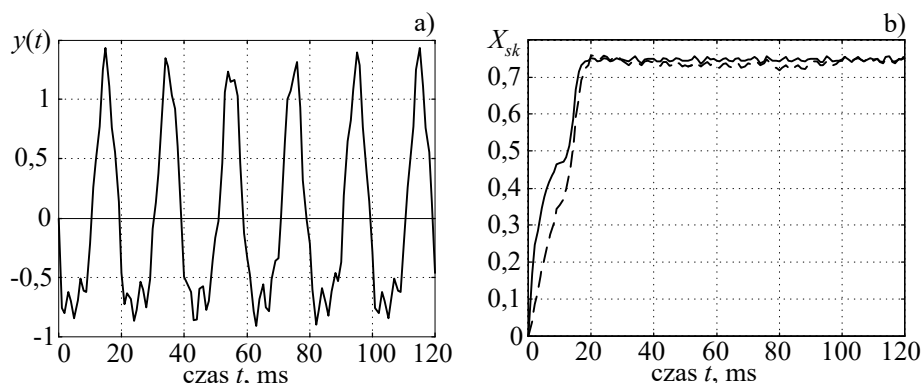
Wynik uzyskany z (4.3) może się różnić od wartości (4.2) jeśli kształt sygnału odbiega od przebiegu harmonicznego. W obwodach elektrycznych ma to zazwyczaj miejsce w stanie przejściowym, bezpośrednio po wystąpieniu zakłócenia. W wielu przypadkach nie ma to jednak dużego znaczenia, gdyż kryterium wartości skutecznej prądu jest zazwyczaj stosowane w zabezpieczeniach przeciążeniowych, które działają z dużą zwłoką czasową.

Obliczając wartość skuteczną sygnału zgodnie z (4.2) należy zapewnić możliwie jednakowe wzmocnienie toru pomiarowego w paśmie Nyquista. Wynika to z faktu, że wartość skuteczna zależy od wszystkich składowych harmonicznym sygnału. Określa to znana zależność odnosząca się do dziedziny częstotliwości:

$$X_{sk} = \sqrt{\sum_{i=0}^{N-1} X_i^2} = \sqrt{X_0^2 + X_{N/2}^2 + 2 \sum_{i=1}^{N/2-1} X_i^2}, \quad (4.4)$$

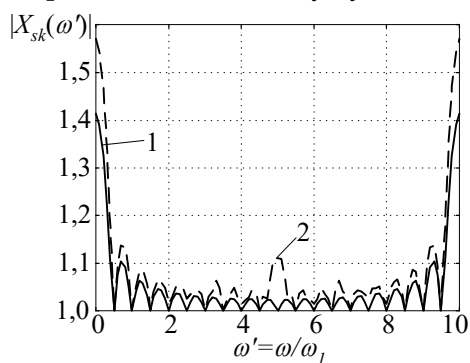
gdzie: X_i jest amplitudą i -tej harmonicznej analizowanego sygnału.

W tym ostatnim przypadku rezultaty stosowania procedur (4.2) oraz (4.3), w zależności od kształtu sygnału, mogą się różnić. Ilustrują to przebiegi pokazane na rys. 4.1, gdzie zamieszczono wyniki estymacji wartości skutecznej odkształconego przebiegu (rys. 4.1a) za pomocą obu tych metod (rys. 4.1b). Widać, że pomimo dużego odkształcenia sygnału, oba wy-



Rys. 4.1. Sygnał wejściowy (a) oraz jego wartość skuteczna (b) otrzymana według zależności (4.2) – linia ciągła oraz (4.3) – linia przerywana; $N = 20$

niki różnią się nieznacznie. Do porównania obu rozpatrywanych metod można także wykorzystać ich charakterystyki częstotliwościowe. Na rys. 4.2 pokazano charakterystyki częstotliwościowe algorytmów określonych przez zależności (4.2) oraz (4.3). W ogólnym przypadku odpowiedź ustalona jest funkcją fazy sygnału wejściowego. Pokazane krzywe określają górne obwiednie charakterystyk częstotliwościowych dla liczby próbek w okresie podstawowej harmonicznej $N = 20$. Można zauważyć, że



Rys. 4.2. Charakterystyki częstotliwościowe estymatorów wartości skutecznej: według metody prostokątów (1) oraz według metody sumowania wartości bezwzględnych (2); $N = 20$

częstotliwość oscylacji występujących w tych charakterystykach jest dwukrotnie większa niż w widmowych charakterystykach estymatorów amplitudy.

W przypadku układu trójfazowego zastępczą wartość skuteczną odniesioną do jednej fazy można określić następująco

$$X_{sk}(k) = \sqrt{\frac{1}{3N} \sum_{i=0}^{N-1} (x_{L1}^2(k-i) + x_{L2}^2(k-i) + x_{L3}^2(k-i))}, \quad (4.5)$$

gdzie: x_l , $l = L1, L2, L3$ są sygnałami fazowych prądów lub napięć.

W miejsce powyższej zależności można również stosować formułę uproszczoną, uzyskaną na bazie zależności (4.3). Korzystając z wzajemnego przesunięcia sygnałów w trzech fazach można wówczas skrócić okno pomiarowe nawet do $N/6$ próbek (jedna szósta okresu) [34], [41].

4.3 Estymacja sygnału zespolonego

4.3.1 Zależności podstawowe

Algorytmy estymacji sygnału zespolonego (ang. *phasor estimation*) są niezwykle istotne z punktu widzenia rozpatrywanych tu problemów, gdyż większość wielkości elektrycznych, które są podstawą oceny stanu systemu prądu przemiennego, jest odniesiona właśnie do składowej podstawowej lub innych harmonicznym sygnału prądu lub napięcia. Ogólną bazą stosowanych metod pomiarowych jest reprezentacja sygnału dyskretnego w formie szeregu Fouriera. Model mierzonego sygnału może być reprezentowany przez następującą funkcję zespoloną

$$\underline{y}(k) = y_c(k) + jy_s(k) + \underline{\delta}(k), \quad (4.6)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} y_c(k) &= Y \cos(\omega'ak + \beta), \\ y_s(k) &= Y \sin(\omega'ak + \beta), \end{aligned} \quad (4.7)$$

$\omega' = \omega / \omega_1$, $a = 2\pi / N$, N – liczba próbek sygnału w okresie o pulsacji składowej podstawowej ω_1 , $\underline{\delta}(k)$ – zakłócenie.

Wielkość mierzona przez układ automatyki odpowiada rzeczywistej składowej sygnału (4.6). W celu wykorzystania dogodnego aparatu funkcji zespolonych do pełnego opisu sygnału niezbędna jest znajomość także składowej urojonej. Do estymacji obu składowych na podstawie pomiaru cyfrowego można zastosować układ o ogólnej strukturze jak na rys. 4.3.

Charakterystyki częstotliwościowe użytych filtrów F_1 oraz F_2 mogą być przedstawione w następującej formie

$$H_l(j\omega') = |H_l(j\omega')| e^{j\gamma_l(\omega')}, \quad l = 1, 2, \quad (4.8)$$

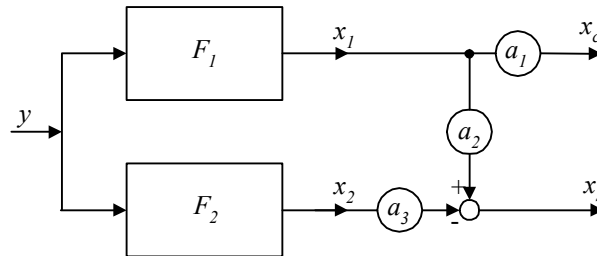
gdzie: $\gamma_l(\omega') = \arg(H(j\omega'))$.

Zakłada się, że estymowane są parametry sygnału o pulsacji ω_0 , która jest związana z pulsacją podstawową ω_1 następującą zależnością: $\omega_0' = \omega_0 / \omega_1$. Z rys. 4.3 widać, że w celu wyznaczenia odpowiedniej procedury należy określić współczynniki a_1, a_2, a_3 . Dla sygnału wejściowego o postaci:

$$y(k) = y_c(k) = Y \cos(\omega' ak + \beta) \quad (4.9)$$

oraz $\omega' = \omega_0'$ (sygnał wymuszający ma częstotliwość postulowaną), ustalone sygnały wyjściowe są następujące

$$\begin{aligned} x_1(k) &= Y |H_1(j\omega_0')| \cos(\omega_0' ak + \beta + \gamma_1(\omega_0')), \\ x_2(k) &= Y |H_2(j\omega_0')| \cos(\omega_0' ak + \beta + \gamma_2(\omega_0')). \end{aligned} \quad (4.10)$$

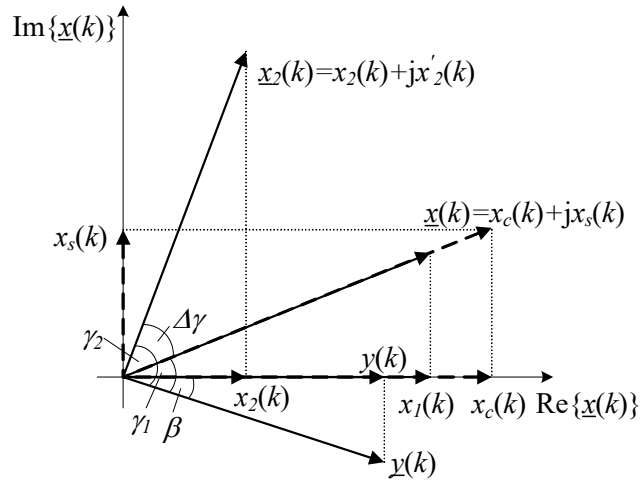


Rys. 4.3. Struktura algorytmu pomiaru składowych ortogonalnych sygnału

Jeśli $\gamma_1(\omega_0') \neq \gamma_2(\omega_0') \pm k\pi$, k - całkowite, to sygnały (4.10) utworzą sygnał zespolony:

$$\underline{x}(k) = x_c(k) + jx_s(k). \quad (4.11)$$

Graficzna reprezentacja wektorów odpowiadających sygnałom z rys. 4.3 jest pokazana na rys. 4.4, gdzie przyjęto, że sygnały $x_1(k)$, $x_2(k)$ są składowymi rzeczywistymi wektorów $\underline{x}_1(k)$, $\underline{x}_2(k)$, a estymowany sygnał $\underline{x}(k)$ pokrywa się z kierunkiem wektora $\underline{x}_1(k)$, którego składowa rzeczywista jest osiągalna na wyjściu filtru F_1 . Składowe ortogonalne sygnału (4.11) przyjmują wówczas następujące wartości [27]:



$$\begin{aligned} x_c(k) &= a_1 x_1(k), \\ x_s(k) &= a_2 x_1(k) - a_3 x_2(k), \end{aligned} \quad (4.12)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{|H_1(j\omega_0')|}, & a_2 &= \frac{\cos \Delta\gamma(\omega_0')}{|H_1(j\omega_0')| \sin \Delta\gamma(\omega_0')}, \\ a_3 &= \frac{1}{|H_2(j\omega_0')| \sin \Delta\gamma(\omega_0')}, & \Delta\gamma(\omega_0') &= \gamma_2(\omega_0') - \gamma_1(\omega_0'). \end{aligned}$$

Estymator sygnału (4.11) można zatem rozpatrywać jako filtr o następującej widmowej funkcji przejścia:

$$H(j\omega) = H_c(j\omega) + jH_s(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\gamma(\omega)}, \quad (4.13)$$

gdzie:

$$H_c(j\omega) = a_1 H_1(j\omega), \quad H_s(j\omega) = a_2 H_1(j\omega) - a_3 H_2(j\omega), \quad \gamma(\omega) = \arg(H(j\omega)).$$

Należy zauważyć, że $H_c(j\omega)$ oraz $H_s(j\omega)$ są funkcjami zespolonymi.

Jeśli funkcje przejścia $H_1(j\omega)$ oraz $H_2(j\omega)$ są tak dobrane, że $|H_1(j\omega_0')| = |H_2(j\omega_0')|$ oraz $\Delta\gamma(\omega_0') = \pm\pi/2$, to: $a_1 = \pm a_3$, $a_2 = 0$. Można dobieść, że w takim przypadku wariancja estymatora amplitudy i fazy jest najmniejsza [37].

Opisana zasada tworzenia estymatora sygnału zespolonego jest poprawna również w odniesieniu do innych niż filtry przetworników, jak na przykład, algorytmów korelacyjnych, algorytmów z opóźnieniem

sygnałów, czy obserwatorów stanu. W celu analizy uzyskanego estymatora rozpatrzony zostanie sygnał wejściowy o postaci jak w (4.9) i częstotliwości ω' ($\omega' = \omega / \omega_1$), który można przedstawić w formie sumy dwóch wektorów obracających się w przeciwnych kierunkach

$$y(k) = \frac{Y}{2} \left(e^{j(\omega' ak + \beta)} + e^{-j(\omega' ak + \beta)} \right). \quad (4.14)$$

W stanie ustalonym sygnał wyjściowy jest iloczynem harmonicznego sygnału wymuszającego oraz transmitancji filtra [35]. Zatem, dla wymuszenia (4.14) otrzymuje się

$$\underline{x}(k) = \frac{Y}{2} H(j\omega') e^{j(\omega' ak + \beta)} + \frac{Y}{2} H(-j\omega') e^{-j(\omega' ak + \beta)}. \quad (4.15)$$

Należy zauważyć, że w przeciwieństwie do transmitancji pojedynczych filtrów, w odniesieniu do funkcji (4.13) obowiązuje ogólna zasada

$$H(j\omega) \neq H^*(-j\omega), \quad (4.16)$$

gdzie * oznacza sprzężenie zespolone,

zatem, równanie (4.15) określa sygnał wyjściowy jako kombinację dwóch składowych sygnału wejściowego (o dwóch kierunkach wirowania), które są w różnym stopniu tłumione. Sygnał (4.15) może być przedstawiony w następującej postaci

$$\underline{x}(k) = Y(H_A(j\omega') \cos(\omega' ak + \beta) + jH_B(j\omega') \sin(\omega' ak + \beta)), \quad (4.17)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} H_A(j\omega') &= \frac{H(j\omega') + H(-j\omega')}{2}, \\ H_B(j\omega') &= \frac{H(j\omega') - H(-j\omega')}{2}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Transmitancje $H_A(j\omega')$ oraz $H_B(j\omega')$ są funkcjami zespolonymi, zatem w celu wydzielenia składowej rzeczywistej i urojonej sygnału wyjściowego można je przedstawić w postaci wykładniczej. Po odpowiednim uporządkowaniu otrzymuje się następujący sygnał na wyjściu estymatora składowych ortogonalnych dla wymuszenia w postaci sygnału rzeczywistego (4.9):

$$\underline{x}(k) = Y e^{j\theta(\omega')} \left[A(\omega') \cos(\omega' ak + \beta + \xi(\omega')) + jB(\omega') \sin(\omega' ak + \beta + \xi(\omega')) \right], \quad (4.19)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} A(\omega') &= \frac{|H(j\omega')| + |H(-j\omega')|}{2}, \\ B(\omega') &= \frac{\| |H(j\omega')| - |H(-j\omega')| \|}{2}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \vartheta(\omega') &= \frac{\gamma(\omega') + \gamma(-\omega')}{2}, \\ \xi(\omega') &= \frac{\gamma(\omega') - \gamma(-\omega')}{2} \end{aligned} \quad (4.21)$$

oraz
$$H(-j\omega') = |H(-j\omega')| e^{j\gamma(-\omega')}. \quad (4.22)$$

Równanie (4.19) przedstawia elipsę, której dłuższa oś jest nachylona pod kątem $\xi(\omega')$ do osi rzeczywistej układu współrzędnych. Wartość funkcji $A(\omega')$ określa połowę długości dłuższej osi, a $B(\omega')$ - krótszej osi elipsy. Położenie i kształt elipsy zależy od parametrów filtra zespolonego oraz częstotliwości sygnału. Można sprawdzić, że w przypadku filtrów nierekursywnych oraz algorytmów korelacyjnych zachodzą następujące zależności $\gamma(\omega) = \gamma(-\omega)$ oraz $\vartheta(\omega) = \gamma(\omega)$, $\xi(\omega) = 0$. Ponadto, dla wybranej częstotliwości postulowanej $\omega = \omega_0$ mają miejsce następujące zależności: $H(-j\omega_0) = 0$ oraz $A(j\omega_0) = B(j\omega_0)$.

Równanie (4.19) jest prawdziwe, gdy w charakterze przetworników sygnału wejściowego są użyte filtry cyfrowe lub elementy opóźniające. W przypadku zastosowania algorytmów korelacyjnych, jak choćby (3.38), zależność (4.19) powinna być skorygowana w celu uwzględnienia odpowiedniego przesunięcia częstotliwości

$$\begin{aligned} x(k) &= \\ Y e^{j\vartheta(\omega')} & \left[A(\omega') \cos(\omega' ak + \beta + \xi(\omega')) + jB(\omega') \sin(\omega' ak + \beta + \xi(\omega')) \right] e^{-j\lambda(k)}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

gdzie: kąt $\lambda(k)$ zależy od użytej funkcji korelacyjnej, na przykład, $\lambda(k) = ak$ dla funkcji jak w (3.38).

Równanie (4.23) przedstawia zatem najbardziej ogólną postać estymatora składowych ortogonalnych sygnału zespolonego. Forma części rzeczywistej i urojonej funkcji (4.23) zależy od zastosowanych przetworników F_1 oraz F_2 (rys. 4.3). W ogólnym przypadku zarówno amplituda, jak i faza estymaty sygnału są funkcjami czasu.

Estymatę amplitudy można także uzyskać przez odwołanie się do mocy S sygnału harmonicznego. W celu bardziej ogólnego zdefiniowania estymatora sygnału zespolonego wprowadzone zostanie przekształcenie, które uwzględnia również opóźnienie sygnału. Dla sygnału (4.11) otrzymuje się

$$\underline{S}_m(k) = \underline{x}(k)\underline{x}^*(k-m) = X^2 \cos(\omega_0' am) + jX^2 \sin(\omega_0' am), \quad (4.24)$$

gdzie $*$ oznacza sygnał zespolony sprzężony, m – liczba próbek opóźnienia.

Przez podstawienie do (4.24) reprezentacji sygnału zespolonego w postaci odpowiednich składowych ortogonalnych, otrzymuje się następujące zależności dla estymatorów amplitudy

$$X(k) = \sqrt{\frac{x_c(k)x_c(k-m) + x_s(k)x_s(k-m)}{\cos(\omega_0' am)}} \quad (4.25)$$

lub

$$X(k) = \sqrt{\frac{x_s(k)x_c(k-m) - x_c(k)x_s(k-m)}{\sin(\omega_0' am)}}. \quad (4.26)$$

W przypadku braku opóźnienia ($m=0$) rozwiązanie sprowadza się do pierwszej zależności.

Analizę częstotliwościową otrzymanych estymatorów można uzyskać przez odpowiednie podstawienie widmowych charakterystyk estymatorów składowych ortogonalnych. Amplituda i faza estymatora (4.25) dla $m=0$ są bezpośrednio określone przez (4.19)

$$|X(\omega')| = \sqrt{x_c^2 + x_s^2} = YG(\omega'), \quad (4.27)$$

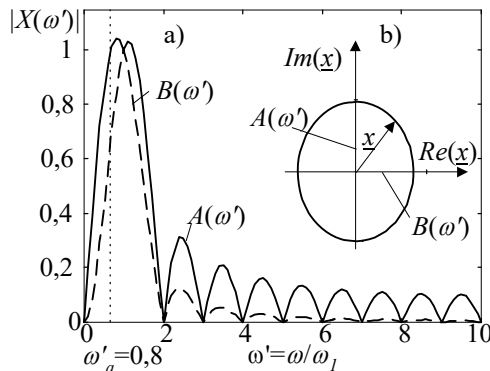
gdzie:

$$G(\omega') = \sqrt{A^2(\omega') \cos^2 \psi + B^2(\omega') \sin^2 \psi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{|H(j\omega')|^2 + |H(-j\omega')|^2 + 2|H(j\omega')||H(-j\omega')| \cos(2\psi)}, \quad (4.28)$$

$$\arg(\underline{x}) = \arctg\left(\frac{x_s}{x_c}\right) = \vartheta(\omega') + \arctg\left(\frac{B(\omega')}{A(\omega')} \operatorname{tg} \psi\right) \quad (4.29)$$

oraz $\psi = \omega' ak + \beta + \xi(\omega')$.

Z (4.27)-(4.29) widać, że w ogólnym przypadku estymator amplitudy sygnału jest funkcją nieliniową, zależną od aktualnej fazy. Przy harmonicznym wymuszeniu mierzona amplituda zmienia się z podwójną częstotliwością sygnału. Stała odpowiedź ma miejsce tylko dla wybranych częstotliwości, gdy $A(\omega) = B(\omega)$ (warunek ten jest spełniony również dla częstotliwości ω_0 , dla której estymator został zaprojektowany). Charakterystyka częstotliwościowa pełnookresowego estymatora Fouriera jest pokazana na rys. 4.5. W prawej części rysunku pokazana jest obwiednia



Rys. 4.5. Charakterystyka częstotliwościowa pełnookresowego algorytmu Fouriera (a) z zaznaczoną obwiednią dla częstotliwości $\omega = 0,8\omega_1$ (b); $N = 20$

sygnału wyjściowego w formie charakterystycznej elipsy dla częstotliwości $0,8\omega_1$ (ta część rysunku ma zredukowaną wielkość). Koniec wektora reprezentującego sygnał wyjściowy $\underline{x}(k)$ przesuwa się po tej elipsie zgodnie ze zmianą chwilowej fazy sygnału. W tym czasie jego amplituda zmienia się w granicach określonych przez obwiednie: górną - $A(\omega)$ oraz dolną - $B(\omega)$ częstotliwościowej charakterystyki estymatora.

Wracając do równania (4.25) można zauważyć, że w ogólnym przypadku, gdy opóźnienie $m > 0$, charakterystyka częstotliwościowa amplitudy jest określona w bardziej skomplikowany sposób. Podstawienie (4.12) do (4.25), z uwzględnieniem (4.10) oraz (4.13) prowadzi do następującego związku:

$$|X(\omega')| = YG(\omega') = Y \sqrt{\frac{(A^2(\omega') + B^2(\omega'))\cos(\omega'ma) + (A^2(\omega') - B^2(\omega'))\cos(2\psi - \omega'ma)}{2\cos(\omega_0'ma)}} \quad (4.30)$$

Można łatwo sprawdzić, że dla $m = 0$ (4.30) redukuje się do (4.27).

Interesującą postać estymatora można otrzymać dla równania (4.26), gdy opóźnienie $m > 0$. Podobne podstawienia jak powyżej prowadzą do

$$|X(\omega')| = YG(\omega') = Y \sqrt{\frac{A(\omega')B(\omega')\sin(\omega'ma)}{\sin(\omega_0'ma)}} \quad (4.31)$$

Równanie (4.31) przedstawia charakterystykę częstotliwościową bardzo interesującego estymatora, gdyż jest ona niezależna od chwilowej fazy sygnału.

Zależności (4.24)-(4.26) odnoszą się do sytuacji, gdy do estymacji sygnału zespolonego zastosowano odpowiednie filtry cyfrowe. W przypadku zastosowania algorytmu korelacyjnego w miejsce filtru nierekursywnego o identycznej charakterystyce impulsowej, otrzymuje się przetwornik o tej samej charakterystyce częstotliwościowej amplitudy. Należy jednak pamiętać, że charakter sygnałów na wyjściu filtru i układu korelacyjnego jest różny. Prowadzi to do zróżnicowania algorytmów, które korzystają z odpowiednich relacji czasowych odnoszących się do sygnałów na wyjściu obu rodzajów przetworników. W szczególności, aby wykorzystać relacje związane z obrotem wektora sygnału zespolonego należy utworzyć wektor wirujący $\underline{X}_d(k)$, który jest związany z wektorem $\underline{X}(k)$ (uzyskanym w rezultacie zastosowania algorytmu korelacyjnego) następującą zależnością

$$\underline{X}_d(k-m) = \underline{X}(k-m)e^{-j\nu m} = (X_c(k-m) - jX_s(k-m))e^{-j\nu m}, \quad (4.32)$$

gdzie: ν jest kątem przesunięcia rozpatrywanego wektora pomiędzy kolejnymi próbkami (dla wektora o częstotliwości znamionowej $\nu = a = 2\pi/N$), $X_c(k-m)$, $X_s(k-m)$ – próbki składowych ortogonalnych sygnałów z kroku $k-m$.

Po podstawieniu sygnału w formie (4.32) do zależności (4.24) otrzymuje się parę estymatorów analogicznych do (4.25)-(4.26)

$$X^2(k) = \frac{1}{\cos(\omega_0 am)} [(X_c(k)X_c(k-m) + X_s(k)X_s(k-m))\cos(am) - (X_c(k)X_s(k-m) - X_c(k-m)X_s(k))\sin(am)], \quad (4.33)$$

$$X^2(k) = \frac{1}{\sin(\omega_0 am)} [(X_c(k)X_c(k-m) + X_s(k)X_s(k-m))\sin(am) + (X_c(k)X_s(k-m) - X_c(k-m)X_s(k))\cos(am)], \quad (4.34)$$

Widać, że przy braku opóźnienia ($m=0$) również tylko pierwszy z powyższych estymatorów jest poprawny i przybiera wówczas formę (4.27).

Z powyższej analizy widać, że właściwości częstotliwościowe estymatora amplitudy są określone przez transmitancje użytych filtrów (przetworników sygnału). Funkcja przejścia i odpowiadająca mu para

obwiedni $A(\omega)$ oraz $B(\omega)$ mogą być określone w postaci analitycznej na podstawie znajomości algorytmu użytego w charakterze estymatora składowych ortogonalnych sygnału. Wyprowadzenie odpowiednich zależności nie zawsze jest proste. Poniżej pokazany jest sposób wyprowadzenia tych zależności dla bardziej znanych przypadków.

4.3.2 Zastosowanie filtrów cyfrowych

Na podstawie rozważań prowadzonych w poprzednim rozdziale widać, że procedury splotu i korelacji (także te, które zostały uzyskane w wyniku zastosowania algorytmu MNK) mają podobne właściwości częstotliwościowe jeśli zostaną w nich użyte takie same funkcje bazowe. Różnica dotyczy tylko charakteru sygnału wyjściowego (zmienny lub stały). Dlatego też w poniższej analizie nie robi się rozróżnienia pomiędzy tymi algorytmami.

Podstawiając wyrażenia (3.43) dla pełnookresowego algorytmu Fouriera ($H_c(j\omega)$ – dla parzystej i $H_s(j\omega)$ – dla nieparzystej funkcji impulsowej) do (4.13) otrzymuje się [25]

$$H(j\omega') = \frac{2 \sin(\omega' \pi)}{N \sin\left(\frac{a}{2}(\omega'-1)\right)} e^{-j \frac{N-1}{2} \omega' a} \quad (4.35)$$

Podobnie, stosując odpowiednio (3.43) z uwzględnieniem (3.77) w (4.13) otrzymuje się następującą postać transmitancji pełnookresowego estymatora Walsha

$$H(j\omega') = \frac{-2 \sin\left(\frac{a}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega' \pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega' \pi}{4}\right) \left(\sin\left(\frac{\omega' \pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\omega' \pi}{4}\right) \right)}{\sin\left(\frac{\omega' a}{2}\right)} e^{-j \frac{N-1}{2} \omega' a} \quad (4.36)$$

Przez kolejne podstawienie funkcji (4.35) oraz (4.36) do (4.20) można użyć relacje określające obwiednie charakterystyki częstotliwościowej:

– pełnookresowego estymatora Fouriera

$$A(\omega') = \frac{|\sin(\omega' \pi)|}{N} \left(\frac{1}{\left| \sin\left(\frac{a}{2}(\omega'-1)\right) \right|} + \frac{1}{\left| \sin\left(\frac{a}{2}(\omega'+1)\right) \right|} \right), \quad (4.37)$$

$$B(\omega') = \frac{|\sin(\omega' \pi)|}{N} \left| \frac{1}{\left| \sin\left(\frac{a}{2}(\omega'-1)\right) \right|} - \frac{1}{\left| \sin\left(\frac{a}{2}(\omega'+1)\right) \right|} \right|, \quad (4.38)$$

$$\mathcal{G}(\omega') = 0, \quad \xi(\omega') = \frac{\pi}{2} - \omega' \pi, \quad (4.39)$$

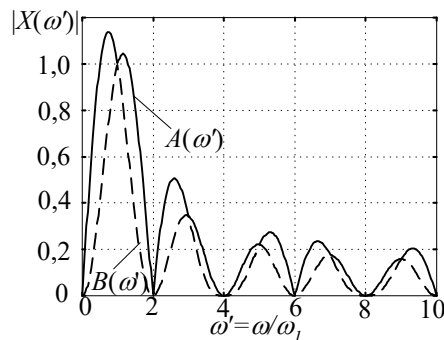
– pełnookresowego algorytmu Walsha

$$A(\omega') = \frac{\sqrt{2} \sin\left(\frac{a}{2}\right) \left| \sin\left(\frac{\pi}{2} \omega'\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} \omega'\right) \right|}{\sin\left(\frac{a}{2} \omega'\right)} \left(\left| \cos\left(\frac{\pi}{4}(\omega'-1)\right) \right| + \left| \sin\left(\frac{\pi}{4}(\omega'-1)\right) \right| \right), \quad (4.40)$$

$$B(\omega') = \frac{\sqrt{2} \sin\left(\frac{a}{2}\right) \left| \sin\left(\frac{\pi}{2} \omega'\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} \omega'\right) \right|}{\sin\left(\frac{a}{2} \omega'\right)} \left| \left| \cos\left(\frac{\pi}{4}(\omega'-1)\right) \right| - \left| \sin\left(\frac{\pi}{4}(\omega'-1)\right) \right| \right|, \quad (4.41)$$

$$\mathcal{G}(\omega') = 0, \quad \xi(\omega') = \frac{\pi}{2} - \omega' \pi. \quad (4.42)$$

Przebiegi funkcji $A(\omega')$ oraz $B(\omega')$ dla pełnookresowych algorytmów



Rys. 4.6. Charakterystyka częstotliwościowa pełnookresowego algorytmu Walsh; $N = 20$

Fouriera i Walsha są pokazane na rys. 4.5a oraz rys. 4.6, odpowiednio.

Porównując rys. 4.5a z rys. 2.20 można ocenić, jaka jest zależność pomiędzy charakterystykami częstotliwościowymi składowych filtrów estymatora i otrzymanymi powyżej charakterystykami. Kwestia ta będzie zbadana na przykładzie pełnookresowego algorytmu Fouriera.

W tym przypadku składowe ortogonalne (4.12) są bezpośrednio

określone przez użyte filtry ($|H_1(j\omega_0)|=|H_2(j\omega_0)|$, $\Delta\gamma(\omega_0)=\pm\pi/2$, $a_1=a_3=1$, oraz $a_2=0$). Amplituda sygnału wyjściowego (4.25) ma następującą postać ($x_c=x_1$ oraz $x_s=x_2$):

$$|X(\omega')|=\sqrt{x_c^2(\omega')+x_s^2(\omega')}= \\ Y\sqrt{|H_c(j\omega')|^2\cos^2(\omega'ak+\beta+\gamma_c(\omega'))+|H_s(j\omega')|^2\cos^2(\omega'ak+\beta+\gamma_s(\omega'))}, \quad (4.43)$$

co można zapisać w następującej formie

$$|X(\omega')|=YG(\omega'), \quad (4.44)$$

gdzie [39]:

$$G(\omega')=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{H_c^2(\omega')+H_s^2(\omega')+\cos(2\omega'ak+\theta)L(\omega')}, \quad (4.45)$$

$$L(\omega')=\sqrt{H_c^4(\omega')+H_s^4(\omega')+2H_c^2(\omega')H_s^2(\omega')\cos(2(\gamma_c(\omega')-\gamma_s(\omega')))} \quad (4.46)$$

oraz

$$\theta=\arctg\frac{H_c^2(\omega')\sin(2(\beta+\gamma_c(\omega')))+H_s^2(\omega')\sin(2(\beta+\gamma_s(\omega')))}{H_c^2(\omega')\cos(2(\beta+\gamma_c(\omega')))+H_s^2(\omega')\cos(2(\beta+\gamma_s(\omega')))}, \quad (4.47)$$

$H_c(\omega')$, $H_s(\omega')$ – zerowo-fazowe charakterystyki częstotliwościowe sinusowego i kosinusowego filtru Fouriera.

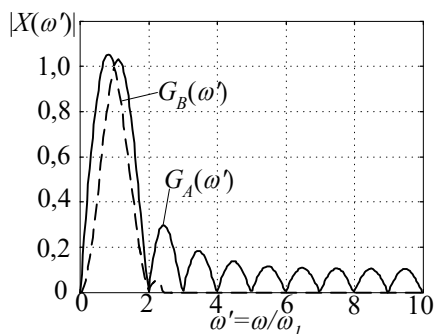
Można sprawdzić, że w rozpatrywanym przypadku (jak i w innych algorytmach nierekursywnych z parą funkcji parzystej/nieparzystej) mają miejsce następujące zależności: $\gamma_c(\omega)-\gamma_s(\omega)=\pm\pi/2$ oraz

$$L(\omega')=|H_c^2(\omega')-H_s^2(\omega')|. \quad (4.48)$$

Analizując (4.45) można zauważyć, że funkcja $G(\omega')$ przyjmuje ekstremalne wartości dla $\cos(2\omega'ak+\theta)=\pm 1$. Podstawienie (4.48) do (4.45) daje możliwość określenia górnej ($G_{\max}(\omega')$) i dolnej ($G_{\min}(\omega')$) obwiedni charakterystyki częstotliwościowej

$$G_{\max}(\omega')=A(\omega')=\max(|H_c(\omega')||H_s(\omega')|), \\ G_{\min}(\omega')=B(\omega')=\min(|H_c(\omega')||H_s(\omega')|). \quad (4.49)$$

Zatem, w przypadku estymatora o strukturze jak na rys. 4.3, dla którego $\gamma_1(\omega')-\gamma_2(\omega')=\pm\pi/2$ (dla każdej częstotliwości), oraz $a_1=a_3=1$; $a_2=0$, obwiednie górna i dolna są bezpośrednio określone przez charakterystyki częstotliwościowe składowych filtrów.



Rys. 4.7. Charakterystyka częstotliwościowa estymatora amplitudy uzyskanego w rezultacie filtracji i opóźnienia sygnału o $m = N/4$ próbek; $N = 20$

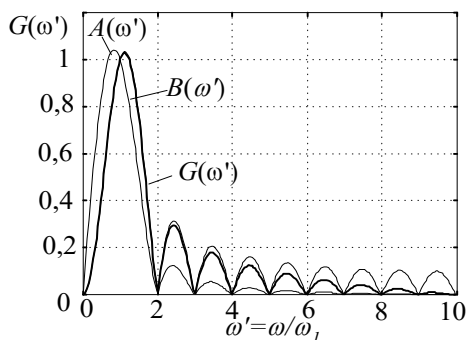
Podobne zależności mogą być ustanowione dla estymatorów (4.25) z dodatkowym opóźnieniem ($m > 0$). Charakterystyka częstotliwościowa algorytmu (4.25) z pełnookresowymi filtrami Fouriera (sinus/kosinus) dla opóźnienia $m = 1$ są pokazane na rys. 4.7. Obwiednie $G_A(\omega')$ oraz $G_B(\omega')$ są określone zgodnie z (4.30) po wprowadzeniu odpowiedniej wartości kąta ψ (4.29). Należy zauważyć, że w paśmie wysokich częstotliwości funkcja $G_B(\omega') = 0$, a sygnał wyjściowy zmienia się w granicach od zera do $G_A(\omega')$ w zależności od fazy

ψ .

W przypadku estymatora (4.26) charakterystyka widmowa (4.31) dla $m \neq kN/2$, k – liczba całkowita, jest niezależna od fazy. Dla pełnookresowych filtrów sinus/kosinus funkcja $G(\omega')$ (4.31) ma następującą postać:

$$G(\omega') = \frac{|\sin(\omega' \pi)|}{N \left| \sin\left(\frac{a}{2}(\omega'+1)\right) \sin\left(\frac{a}{2}(\omega'-1)\right) \right|} \sqrt{\left| \frac{\sin(\omega' a) \sin(\omega' am) \sin a}{\sin(am)} \right|}. \quad (4.50)$$

Przyjmując opóźnienie o jedną próbkę ($m=1$) otrzymuje się algorytm o następującej charakterystyce częstotliwościowej:



Rys. 4.8. Charakterystyka częstotliwościowa algorytmu Fouriera z opóźnieniem sygnału o $m=1$ próbkę; $N = 20$

$$|X(\omega')| = Y \sqrt{A(\omega')B(\omega')} \frac{\sin(\omega' a)}{\sin(\omega_0 a)}.$$

(4.51)

Przebieg funkcji (4.51) dla przypadku, gdy składowe ortogonalne są określane na podstawie pełnookresowego algorytmu Fouriera jest pokazany na rys. 4.8. Można zauważyć, że uzyskana charakterystyka $G(\omega')$ jest niezależna od fazy

i leży pomiędzy granicznymi obwiedniami filtrów.

4.3.3 Różniczkowanie sygnału

Filtry stosowane do estymacji składowych ortogonalnych (rys. 4.3) mogą być także projektowane w oparciu o różniczkowanie sygnału. W przypadku harmonicznego sygnału wejściowego otrzymuje się w ciągłej przestrzeni czasu następujące relacje:

$$\underline{y}(t) = y(t) - j \frac{1}{\omega} \frac{d}{dt} y(t) = X_c(t) + jX_s(t), \quad (4.52)$$

gdzie: $y(t)$ jest sygnałem harmonicznym o postaci

$$y(t) = Y \cos(\omega t + \beta). \quad (4.53)$$

Widać, że składowa urojona jest otrzymywana w wyniku różniczkowania sygnału wejściowego. W przypadku sygnału dyskretnego obie składowe można uzyskać w rezultacie odpowiedniego przetwarzania próbek sygnału wejściowego, co można zapisać następującą ogólną relacją

$$\underline{y}(k) = A\{y(k)\} - j \frac{1}{\omega} D\{y(k)\}, \quad (4.54)$$

gdzie: $A\{\cdot\}$ oznacza operację interpolacji, natomiast $D\{\cdot\}$ jest operacją dyskretnego różniczkowania.

Rozsądnie jest stosować w powyższym związku procedury interpolacji i różniczkowania o tym samym opóźnieniu grupowym, jednak mogą to być różne algorytmy [15]. Na przykład, stosując dwupunktowe różniczkowanie z przedziałem równym dwóm próbkom, otrzymuje się

$$\begin{aligned} X_c(k) &= A\{y(k)\} = b_c y(k-1), \\ X_s(k) &= D\{y(k)\} = b_s (y(k) - y(k-2)), \end{aligned} \quad (4.55)$$

gdzie: b_c, b_s – współczynniki skalujące.

W celu określenia współczynników b_c oraz b_s można porównać wartości otrzymane w (4.55) z tymi samymi wartościami uzyskanymi dla modelu ciągłego w tym samym punkcie $t = t_k - T$, T - okres próbkowania. W odniesieniu do różniczkowania otrzymuje się następującą zależność:

$$\begin{aligned} \left. \left\{ \frac{d}{dt} y(t) \right\} \right|_{t=t_k-T} &= -\omega Y \sin(\omega(t_k - T) + \beta) \\ &= -\omega Y \cos(\omega T) \sin(\omega t_k + \beta) + \omega Y \sin(\omega T) \cos(\omega t_k + \beta). \end{aligned} \quad (4.56)$$

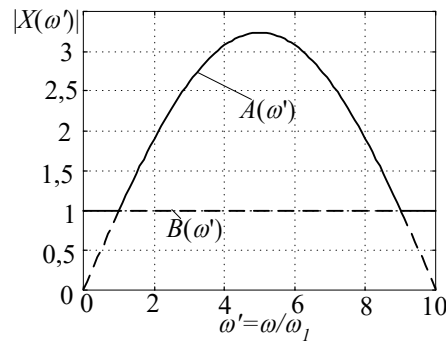
Operacja różniczkowania numerycznego powinna prowadzić do następującej wartości

$$D\{y(t_k - T)\} = -2b_{s1}Y \sin(\omega T) \cos(\omega T) \sin(\omega t_k + \beta) + 2b_{s1}Y \sin^2(\omega T) \cos(\omega t_k + \beta). \quad (4.57)$$

Porównanie (4.56) i (4.57) prowadzi do

$$b_s = \frac{\omega}{2 \sin(\omega T)}. \quad (4.58)$$

Podobnie, analiza operacji aproksymacji $A\{y(t_k - T)\}$ daje $b_c = 1$. Charakterystyka częstotliwościowa uzyskanego algorytmu jest pokazana na rys. 4.9.



Rys. 4.9. Charakterystyka częstotliwościowa estymatora amplitudy z algorytmem dwupunktowego różniczkowania; $N = 20$

Należy zauważyć, że zarówno do interpolacji, jak i różniczkowania można stosować wiele różnych formuł. Sposób projektowania takich algorytmów ilustruje poniższy przykład.

Przykład 4.1. Opracować metodę ortogonalizacji sygnału z zastosowaniem czteropunktowego różniczkowania numerycznego i czteropunktowej interpolacji.

Do przetwarzania dostępne są ostatnie cztery próbki sygnału $y(k-3)$, $y(k-2)$, $y(k-1)$, $y(k)$ z okresem próbkowania T . Zakłada się, że zarówno różniczkowanie, jak i interpolacja są określane względem środka okna pomiarowego, a więc opóźnienie grupowe obu operacji wynosi $\tau_g = 1,5T$.

W celu uzyskania numerycznych funkcji różniczkowania i interpolacji można przyjąć, że obserwowany przebieg jest reprezentowany sygnałem harmonicznym o pulsacji ω_1 . Może on być reprezentowany następującym wielomianem interpolacyjnym 3-go stopnia:

$$x(t_k) = a_0 + a_1 t_k + a_2 t_k^2 + a_3 t_k^3 = \mathbf{a} \boldsymbol{\tau}(t_k),$$

$$\text{gdzie: } \mathbf{a} = [a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3], \quad \boldsymbol{\tau}(t_k) = [1 \ t_k \ t_k^2 \ t_k^3]^T.$$

Nieznane współczynniki a_i , $i = 0..3$ powyższego modelu są liniowo zależne od wartości funkcji. Zmienną reprezentującą czas można wybrać dowolnie (model nie zależy od czasu), na przykład: $t_{k-3} = 0$, $t_{k-2} = T$, $t_{k-1} = 2T$ oraz $t_k = 3T$. W każdym z wymienionych punktów czasowych, które odpowiadają momentom próbkowania, dostępne są próbki sygnału: $y(k-3)$, $y(k-2)$, $y(k-1)$ oraz $y(k)$. Zapisując dla każdego z nich równanie przedstawiające model sygnałowy otrzymuje się układ równań, który ma następującą postać macierzową:

$$\begin{bmatrix} y(k-3) \\ y(k-2) \\ y(k-1) \\ y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & T & T^2 & T^3 \\ 1 & 2T & 4T^2 & 8T^3 \\ 1 & 3T & 9T^2 & 27T^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \mathbf{a}^T.$$

Łatwo sprawdzić, że macierz parametrów \mathbf{T} w powyższym równaniu jest nieo-
sobiłwa, zatem, nie ma problemów z uzyskaniem rozwiązania, które określa
wartości poszukiwanych współczynników modelu

$$\mathbf{a} = \mathbf{y}^T (\mathbf{T}^{-1})^T, \quad \text{gdzie: } \mathbf{y} = [y(k-3) \ y(k-2) \ y(k-1) \ y(k)]^T.$$

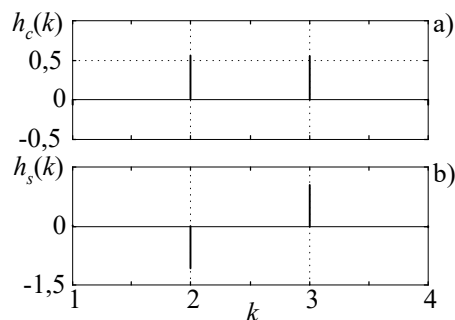
Jak widać, współczynniki te zależą od wartości próbek obserwowanego sygnału
w oknie pomiarowym. Wartość interpolacyjnej funkcji $x(t_k)$ w środku przed-
ziału, to jest dla $t_k = 1,5T$ można określić następująco:

$$x(t_k) = X_c(k) = \mathbf{a} \boldsymbol{\tau}(t_k) \Big|_{t_k=1,5T} = \mathbf{y}^T (\mathbf{T}^{-1})^T \boldsymbol{\tau}(1,5T),$$

$$\text{gdzie: } \boldsymbol{\tau}(1,5T) = [1 \ 1,5T \ (1,5T)^2 \ (1,5T)^3]^T.$$

Po wykonaniu stosowanych działań otrzymuje się:

$$x_c(k) = (-y(k-3) + 9y(k-2) + 9y(k-1) - y(k))/16.$$



Rys. 4.10. Charakterystyki impulsowe
algorytmu aproksymacji (a) oraz róż-
niczkowania (b) sygnału

Powyższe równanie przedstawia kore-
lację cyfrowego sygnału reprezentowa-
nego przez wektor \mathbf{y} z funkcją okre-
śloną w rezultacie wykonania pokaza-
nej operacji mnożenia macierzowego.
Graficzna reprezentacja współczynni-
ków tej funkcji jest pokazana na rys.
4.10a.

Algorytm różniczkowania można ła-
two uzyskać na podstawie przedsta-
wionej procedury po zróżniczkowaniu
interpolacyjnej funkcji:

$$\left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=t_k} = a_1 + 2a_2 t_k + 3a_3 t_k^2 = \mathbf{a}_r \boldsymbol{\tau}_r(t_k),$$

gdzie: $\mathbf{a}_r = [a_1 \ a_2 \ a_3]$, $\boldsymbol{\tau}_r(t_k) = [1 \ 2t_k \ 3t_k^2]^T$.

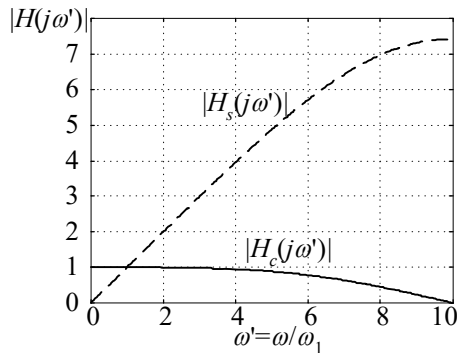
Widać, że można tu wykorzystać obliczone poprzednio współczynniki wektora \mathbf{a} . Postępując podobnie, jak w przypadku interpolacji, otrzymuje się:

$$D\{x(t_k)\} = \omega_1 X_s(k) = \mathbf{a}_r \boldsymbol{\tau}_r(t_k) \Big|_{t_k=1,5T} = \mathbf{y}^T \mathbf{T}_r^T \boldsymbol{\tau}_r(1,5T),$$

gdzie: macierz \mathbf{T}_r jest utworzona z macierzy \mathbf{T}^{-1} przez pominięcie pierwszego wiersza, natomiast $\boldsymbol{\tau}_r(1,5T) = [1 \ 3T \ 6,75T^2]^T$.

Prowadzi to do następującej formuły:
 $x_s(k) = (y(k-3) - 27y(k-2) + 27y(k-1) - y(k)) / 24\omega_1 T$.

Współczynniki stojące przy kolejnych próbkach sygnału wejściowego tworzą dyskretną funkcję korelacyjną, której wartości są pokazane na rys. 4.10b.



Rys. 4.11. Charakterystyka częstotliwościowa algorytmu

Charakterystyki widmowe uzyskanego algorytmu ortogonalizacji sygnału dla okresu próbkowania $T = 0,001s$ są pokazane na rys. 4.11. Widać, że numeryczne różniczkowanie ma w rozpatrywanym przedziale rosnącą charakterystykę częstotliwościową, co prowadzi do dużej wrażliwości algorytmu na zakłócenia. Niestety, zwiększenie dokładności różniczkowania (przez poszerzenie okna pomiarowego) pogłębia tę cechę.

Należy zauważyć, że jeśli analizowany algorytm jest stosowany w odniesieniu do ω częstotliwości ω_1 , to

procedury numerycznej interpolacji i różniczkowania powinny prowadzić do równoważnych im wartości odniesionych do sygnałów ciągłych. Wymaga to skalowania powyższych wyrażeń. Odpowiednie zależności można uzyskać z następujących relacji (zakłada się, że obserwowany jest sygnał ciągły: $y(t) = \sin(\omega_1 t)$):

$$x(t_k) = y(t) \Big|_{t=t_k}, \quad D\{x(t_k)\} = \frac{dy(t)}{dt} \Big|_{t=t_k}.$$

Stosując wyprowadzone powyżej związki można napisać dla $t_k = 1,5T$:

$$k_c \mathbf{y}^T (\mathbf{T}^{-1})^T \boldsymbol{\tau}(1,5T) = \sin(1,5\omega_1 T) \quad \text{oraz:} \quad k_s \mathbf{y}^T (\mathbf{T}_r)^T \boldsymbol{\tau}_r(1,5T) = \omega_1 \cos(1,5\omega_1 T).$$

Po podstawieniu: $y(k-3) = \sin(0)$, $y(k-2) = \sin(\omega_1 T)$, ..., $y(k-2) = \sin(3\omega_1 T)$ uzyskuje się współczynniki korekcyjne:

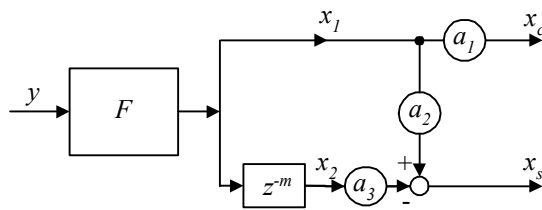
$$k_c = \frac{8}{9 \cos(a/2) - \cos(3a/2)}, \quad k_s = \frac{12\omega_1 T}{27 \sin(a/2) - \sin(3a/2)}.$$

Można zauważyć, że dla częstotliwości sieciowej 50 Hz współczynniki te nieznacznie odbiegają od wartości 1, jednak w niektórych zastosowaniach ich wartość może mieć istotne znaczenie dla końcowego wyniku, zwłaszcza przy niskiej częstotliwości próbkowania. □

Operacje różniczkowania i interpolacji mają formę algorytmów nierekursywnych ze stałym oknem pomiarowym (w tym przypadku bardzo krótkim). Przyjęcie wąskiego okna prowadzi do niekorzystnej charakterystyki częstotliwościowej. Korzyści występują jednak po stronie szybkości uzyskania wyniku, a ponadto, różniczkowanie sygnału pozwala także odwzorować niektóre nieharmoniczne składowe sygnału, co jest niekiedy ważną cechą tego podejścia [15].

4.3.4 Zastosowanie opóźnienia sygnału

Składowe ortogonalne można także otrzymać przez kombinację sygnału bezpośredniego i opóźnionego. Struktura takiego sposobu przetwarzania jest pokazana na rys. 4.12. Filtr F służy do modyfikacji właściwości czę-



Rys. 4.12. Struktura estymatora sygnału zespolonego z wykorzystaniem opóźnienia

stotliwościowych algorytmu. W celu określenia podstawowych zależności rozpatruje się przypadek, gdy nie ma filtru F . Wówczas, na podstawie związków pomiędzy sygnałami x_1 i x_2 (rys. 4.3), otrzymuje się:

$$|H_1(j\omega')| = |H_2(j\omega')| = |F(j\omega')| = 1,$$

$$x_1(k) = y(k), \quad x_2(k) = y(k - m), \quad (4.59)$$

$$\gamma_1(\omega') = 0, \quad \gamma_2(\omega') = -\omega' am = \Delta\gamma(\omega'),$$

gdzie: m – liczba próbek opóźnienia.

Składowe ortogonalne są określone na podstawie (4.12), gdzie

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{\cos \Delta\gamma(\omega'_0)}{\sin \Delta\gamma(\omega'_0)} = -\frac{\cos(\omega'_0 am)}{\sin(\omega'_0 am)}, \quad a_3 = \frac{1}{\sin \Delta\gamma(\omega'_0)} = -\frac{1}{\sin(\omega'_0 am)}. \quad (4.60)$$

Zatem:

$$x_c(k) = y(k),$$

$$x_s(k) = \frac{-\cos(\omega_0' am)y(k) + y(k-m)}{\sin(\omega_0' am)}. \quad (4.61)$$

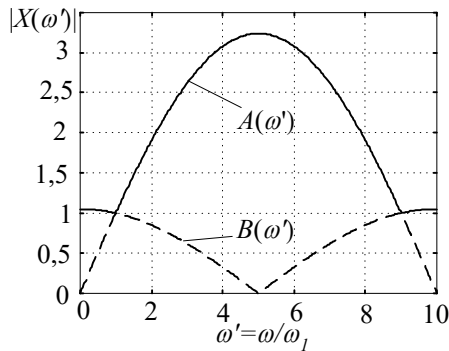
Funkcja przejścia estymatora przyjmuje następującą postać w przestrzeni \mathcal{Z}

$$H(z) = H_c(z) + jH_s(z) = 1 + j \frac{-\cos(\omega_0' am) + z^{-m}}{\sin(\omega_0' am)} \quad (4.62)$$

lub:
$$H(j\omega') = H_c(j\omega') + jH_s(j\omega') = -j \frac{e^{j\omega' am} - e^{-j\omega' am}}{\sin(\omega_0' am)}, \quad (4.63)$$

jako transformata widmowa.

Charakterystyka częstotliwościowa estymatora (4.61) dla opóźnienia $m = 2$ przy liczbie próbek w okresie $N = 20$ i częstotliwości projektowej $\omega_0' = 1$ (podstawowa harmoniczna) jest pokazana na rys. 4.13.



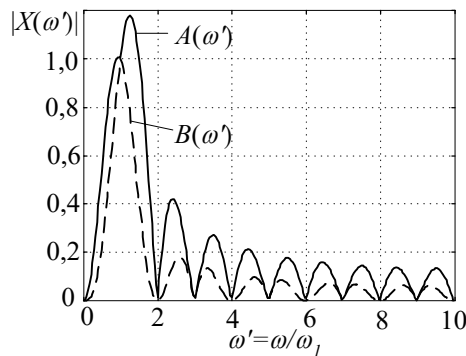
Rys. 4.13. Charakterystyka częstotliwościowa estymatora amplitudy z opóźnieniem sygnału o $m = 2$ próbki; $N = 20$

$\pi/2$ dla pulsacji znamionowej). Szeregowe połączenie filtra kosinusowego z układem jak na rys. 4.12 daje następującą transformatę widmową estymatora (porównaj (3.48)):

$$H(j\omega') = \frac{2 \cos\left(\frac{a}{2}\right) \sin\left(\frac{a}{2} \omega'\right) \sin(\omega' \pi) \left(1 + e^{-j\frac{\pi}{2}(\omega'-1)}\right)}{N \sin\left(\frac{a}{2}(\omega'+1)\right) \sin\left(\frac{a}{2}(\omega'-1)\right)} e^{-j\left(\frac{N-1}{2}a\omega'\right)}. \quad (4.64)$$

Obwiednie estymatora są określone następująco:

$$A(\omega') = \frac{\sqrt{2} \cos\left(\frac{a}{2}\right) \left| \sin\left(\frac{a}{2}\omega'\right) \sin(\omega'\pi) \right|}{N \left| \sin\left(\frac{a}{2}(\omega'+1)\right) \sin\left(\frac{a}{2}(\omega'-1)\right) \right|} \left(\sqrt{1 + \sin(\omega'\pi/2)} + \sqrt{1 - \sin(\omega'\pi/2)} \right). \quad (4.65)$$



Rys. 4.14. Charakterystyka częstotliwościowa estymatora amplitudy z jednym filtrem i opóźnieniem sygnału o $m = N/4$ próbek; $N = 20$

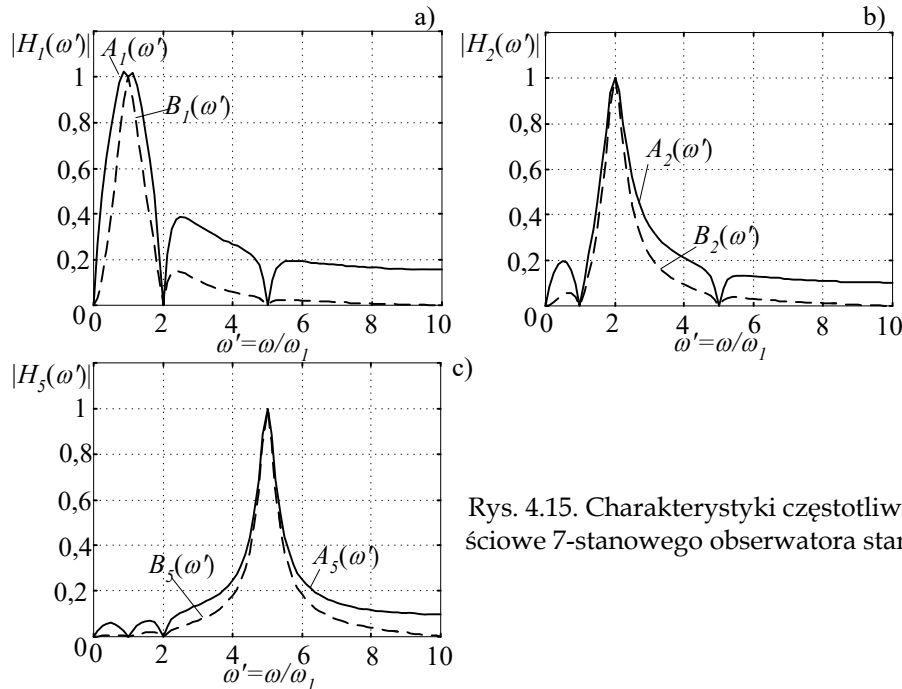
Wyrażenie dla $B(\omega)$ ma znak ujemny pomiędzy pierwiastkami w prawej części równania (wówczas powinien być wzięty moduł z różnicy tych pierwiastków). Przebiegi funkcji $A(\omega')$ oraz $B(\omega')$ są pokazane na rys. 4.14.

Powyższy estymator składowych ortogonalnych ma prostą strukturę i niezłe właściwości częstotliwościowe. Ponadto, w dużym stopniu jest odporny na zakłócenia w postaci składowej aperiodycznej (patrz p. 5.4).

4.3.5 Zastosowanie obserwatora stanu

Stosowane w algorytmach zabezpieczeń elektroenergetycznych sygnałowe modele zmiennych stanu są bezpośrednio powiązane ze składowymi ortogonalnymi sygnału. Oznacza to, że użyteczne składowe harmoniczne są reprezentowane przez swoje składowe ortogonalne. Analiza częstotliwościowa tych algorytmów może być zatem prowadzona w sposób podobny do podanego wyżej.

Dla uproszczenia, rozważania ograniczone są do obserwatorów z modelem niezależnym od czasu. Funkcja przejścia obserwatora stanu jest określona przez (3.172). Wektor $\mathbf{h}(j\omega')$ zawiera pary funkcji przejścia dla poszczególnych harmonicznych odzwierciedlonych w modelu. Znając funkcje przejścia estymatorów dwóch składowych ortogonalnych można łatwo określić wypadkową funkcję przejścia estymatora amplitudy. Na przykład, stosując widmowe charakterystyki 7-stanowego obserwatora stanu z Przykładu 3.4 otrzymuje się charakterystykę częstotliwościową amplitudy jak na rys. 4.15. W tym przypadku krzywe określające górną i dolną obwiednię charakterystyki nieznacznie różnią się od



Rys. 4.15. Charakterystyki częstotliwościowe 7-stanowego obserwatora stanu

częstotliwościowych charakterystyk estymatorów poszczególnych składowych ortogonalnych. (rys. 3.28). Jest to związane z tym, że w przeciwieństwie do filtrów o stałym oknie pomiarowym, w tym przypadku estymatory składowych sinusowej i kosinusowej nie są ortogonalne w całym zakresie częstotliwości.

4.4 Pomiar mocy

Moc (czynna lub bierna) w automatyce elektroenergetycznej rzadko występuje jako bezpośrednia wielkość kryterialna. Najczęściej wykorzystuje się znak tej wielkości do określenia kierunku przepływu mocy oraz jako parametr pośredni do wyznaczenia innych wielkości kryterialnych: impedancji lub admitancji. Ze względu na te właśnie cechy, pomiar mocy odnosi się zwykle do określonej harmonicznej, najczęściej podstawowej. Ogólna struktura takiego estymatora jest pokazana na rys. 4.16.

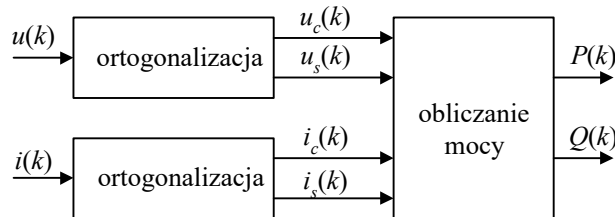
W tych warunkach moc pozorna może być określona bezpośrednio na podstawie wektorów napięcia i prądu. W ogólnym przypadku, gdy sygnał prądu jest opóźniony o m próbek w stosunku do napięcia (jak w (4.24)), otrzymuje się:

$$\underline{S}(k) = P(k) + jQ(k) = \frac{1}{2} \underline{u}(k) \underline{i}^*(k-m) e^{-j\Delta\gamma}, \quad (4.66)$$

gdzie * oznacza wielkość zespoloną sprzężoną, m – liczba próbek opóźnienia,

$\Delta\gamma = ma\omega_0'$, $a = \frac{2\pi}{N}$, $\omega_0' = \frac{\omega_0}{\omega_1}$, ω_0 – częstotliwość postulowana (projektowa); $\omega' = 1$ (podstawowa harmoniczna), $\underline{u}(k)$, $\underline{i}(k)$ – próbki wektora napięcia oraz prądu, odpowiednio.

Mnożenie przez $e^{-j\Delta\gamma}$ wynika stąd, że wielkości $\underline{u}(k)$, $\underline{i}(k)$ w (4.66) przedstawiają wirujące wektory i opóźniony wektor prądu należy 'przyspieszyć' o ten właśnie kąt.



Rys. 4.16. Struktura estymatora mocy

Podobne równanie można napisać dla przypadku, gdy opóźniony jest sygnał napięciowy. Zakładając, że do estymacji składowych ortogonalnych prądu i napięcia zastosowane zostały filtry cyfrowe, na ich wyjściu uzyskuje się następujące sygnały:

$$\underline{u}(k) = u_c(k) + ju_s(k), \quad \underline{i}(k) = i_c(k) + ji_s(k).$$

Dla takich sygnałów prądu i napięcia otrzymuje się następujący zbiór estymatorów mocy czynnej i biernej:

$$P(k) = \frac{1}{2 \cos \Delta\gamma} (u_c(k) i_c(k-m) + u_s(k-m) i_s(k)), \quad (4.67)$$

$$Q(k) = \frac{1}{2 \cos \Delta\gamma} (u_s(k) i_c(k-m) - u_c(k-m) i_s(k)), \quad (4.68)$$

$$P(k) = \frac{1}{2 \cos \Delta\gamma} (u_s(k) i_s(k-m) + u_c(k-m) i_c(k)), \quad (4.69)$$

$$Q(k) = \frac{1}{2 \cos \Delta\gamma} (u_s(k-m)i_c(k) - u_c(k)i_s(k-m)), \quad (4.70)$$

$$P(k) = \frac{1}{2 \sin \Delta\gamma} (u_c(k-m)i_s(k) - u_c(k)i_s(k-m)), \quad (4.71)$$

$$Q(k) = \frac{1}{2 \sin \Delta\gamma} (u_c(k-m)i_c(k) - u_c(k)i_c(k-m)), \quad (4.72)$$

$$P(k) = \frac{1}{2 \sin \Delta\gamma} (u_s(k)i_c(k-m) - u_s(k-m)i_c(k)), \quad (4.73)$$

$$Q(k) = \frac{1}{2 \sin \Delta\gamma} (u_s(k-m)i_s(k) - u_s(k)i_s(k-m)). \quad (4.74)$$

Wyrażenia (4.67)-(4.70) są poprawne dla $m \neq N/4$, podczas gdy (4.71)-(4.74) – dla $m > 0$ (jeśli ograniczyć rozważania tylko do opóźnień w granicach połowy okresu podstawowej harmonicznej). Jeśli wyeliminować opóźnienie, to powyższe zależności zredukują się do znanych wyrażen

$$P(k) = \frac{1}{2} (u_c(k)i_c(k) + u_s(k)i_s(k)), \quad (4.75)$$

$$Q(k) = \frac{1}{2} (u_s(k)i_c(k) - u_c(k)i_s(k)). \quad (4.76)$$

Można ponadto zauważyć, że w (4.72) oraz (4.74) występują te same składowe, a zatem odpowiednie zależności można zredukować do następującego związku

$$Q(k) = \frac{1}{2 \sin \Delta\gamma} (u(k-m)i(k) - u(k)i(k-m)), \quad (4.77)$$

gdzie: $u(k)$, $i(k)$ przedstawiają próbki sygnału, odpowiednio, prądu lub napięcia.

Jeśli do estymacji składowych ortogonalnych prądu i napięcia zastosowano algorytm korelacyjny, to w wyniku uzyskuje się stacjonarne wektory o następującej postaci:

$$\underline{U}(k) = U_c(k) + jU_s(k), \quad \underline{I}(k) = I_c(k) + jI_s(k).$$

Aby w tym przypadku skorzystać z ogólnej metody określania mocy z zastosowaniem opóźnienia wektora prądu lub napięcia, jak w (4.66), nie trzeba już dokonywać korekcji fazy sygnału. Zatem, zależność (4.66) przyjmuje teraz następującą postać:

$$S(k) = P(k) + jQ(k) = \frac{1}{2} \underline{U}(k) \underline{I}^*(k-m). \quad (4.78)$$

Na bazie tego równania można otrzymać estymatory mocy biernej i czynnej analogicznie do (4.67)-(4.70). Na przykład, zależności (4.67)-(4.68) prowadzą do:

$$P(k) = (U_c(k)I_c(k-m) + U_s(k-m)I_s(k))/2, \quad (4.79)$$

$$Q(k) = (U_c(k-m)I_s(k) - U_s(k)I_c(k-m))/2, \quad (4.80)$$

co dla $m=0$ jest równoważne zależnościom (4.75)-(4.76).

W celu uzyskania estymatorów analogicznych do (4.71)-(4.74) na bazie algorytmów korelacyjnych, należy uzyskane wektory obrócić o kąt równy opóźnieniu o m próbek, na przykład dla napięcia:

$$\underline{U}_d(k-m) = \underline{U}(k-m)e^{-j\gamma m} = (U_c(k-m) - jU_s(k-m))e^{-j\Delta\gamma}. \quad (4.81)$$

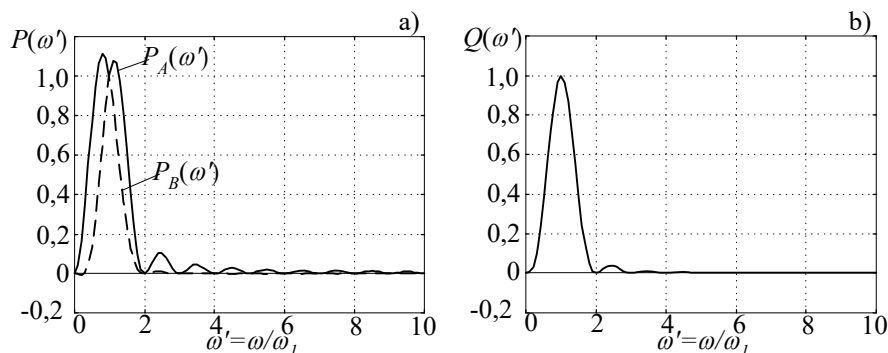
Uwzględniając to, otrzymuje się następującą postać zależności (4.71)-(4.72):

$$P(k) = \frac{1}{2 \sin \Delta\gamma} [(U_c(k)I_c(k-m) - I_s(k)U_s(k-m)) \sin \Delta\gamma + (U_c(k)I_s(k-m) - I_s(k)U_c(k-m)) \cos \Delta\gamma], \quad (4.82)$$

$$Q(k) = \frac{1}{2 \sin \Delta\gamma} [(U_c(k-m)I_c(k) - I_c(k-m)U_c(k)) \cos \Delta\gamma + (U_c(k)I_s(k-m) - I_c(k)U_s(k-m)) \sin \Delta\gamma] \quad (4.83)$$

Powyższe równania wynikają z relacji pomiędzy wektorami prądu i napięcia. Przy wyborze algorytmu pomiaru mocy należy się kierować wymaganiami co do jego prostoty i właściwości częstotliwościowych. Na przykład, w przypadku stosowania metody korelacyjnej do estymacji składowych ortogonalnych, nie ma poważnych argumentów przeciwko stosowaniu estymatorów (4.79)-(4.80). Właściwości dynamiczne i widmowe uzyskanych algorytmów zależą od użytych metod filtracji (ortogonalizacji). Poniższa analiza prezentuje właściwości niektórych estymatorów.

Dotyczy ona przypadku, gdy zespolone sygnały prądu i napięcia uzyskuje się w wyniku zastosowanie pełnokresowej metody Fouriera. Charakterystyki częstotliwościowe estymatorów mocy czynnej i biernej (4.75)-(4.76), które wywodzą się z algorytmów pierwszej grupy (4.67)-(4.70) są pokazane na rys. 4.17. Założono przy tym, że sygnały prądu i napięcia są określone przez następujące funkcje:

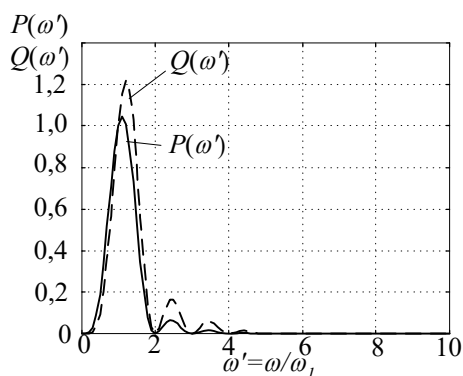


Rys. 4.17. Charakterystyka częstotliwościowa estymatora mocy czynnej (a) i biernej (b)

$$\begin{aligned} i(k) &= I \cos(\omega' ak + \beta - \varphi), \\ u(k) &= U \cos(\omega' ak + \beta), \end{aligned} \quad (4.84)$$

gdzie $\omega' = \omega/\omega_1$, $a = 2\pi/N$, $N = 20$ oraz $I = U = \sqrt{2}$, $\varphi = \pi/6$.

Można zauważyć, że w przeciwieństwie do algorytmu pomiaru mocy biernej, wynik pomiaru mocy czynnej zależy od chwilowej fazy sygnału. Podobnie jak w niektórych estymatorach amplitudy, wartość estymowanej mocy, w ogólnym przypadku, zmienia się wraz ze zmianą chwilowej fazy sygnału prądu lub napięcia w zakresie wyznaczonym przez obwiednie $P_A(\omega')$ oraz $P_B(\omega')$. Ustalony rezultat nie zmienia się w czasie (zgodnie ze zmianą chwilowej fazy sygnałów wejściowych) jedynie w wybranych punktach częstotliwości.



Rys. 4.18. Charakterystyka częstotliwościowa estymatorów mocy uzyskanych przez opóźnienie sygnałów napięcia i prądu o $m = 2$ próbki

Charakterystyki częstotliwościowe estymatorów drugiej grupy (4.71), (4.72) przy tych samych wymuszeniach i wprowadzonym opóźnieniu o $m=2$ próbki są pokazane na rys. 4.18. W tym przypadku estymatory mają charakterystykę częstotliwościową niezależną od czasu (chwilowej fazy). Właściwość ta może być wykorzystana do budowy algorytmów odpornych na zmianę częstotliwości (patrz p. 5.5).

Podobne zależności można uzyskać dla pozostałych estymatorów (4.67)-(4.74).

4.5 Pomiar parametrów obwodu zwarcowego

W większości przypadków zwarc w elementach systemu elektroenergetycznego można przyjąć, że dostatecznie dobrą reprezentację pętli zwarcowej uzyskuje się zakładając, że jest to obwód szeregowy RL . Odległość do miejsca zwarcia można wówczas oszacować na podstawie znajomości tych właśnie parametrów obwodu.

W zabezpieczeniach cyfrowych stosuje się jeden z dwóch typów algorytmów pomiaru parametrów pętli zwarcowej. W pierwszym z nich parametrami obwodu są składowe impedancji $Z = R + j\omega L$, która jest w klasyczny sposób określona jako iloraz wektorów napięcia i prądu. Pewna modyfikacja tej metody polega na tym, że wektory napięcia i prądu zamienione są przez transformaty Fouriera tych wielkości (uzyskane z przebiegów chwilowych w wyniku stosowania DPF). Otrzymana w ten sposób impedancja jest funkcją częstotliwości.

W drugim przypadku nieznanne wielkości: rezystancja i indukcyjność są parametrami równań stanu przejściowego w modelu obwodu zwarcowego. Do rozwiązywania tych równań stosuje się różne techniki numeryczne.

4.5.1 Model stanu ustalonego

W warunkach ustalonych, dla danego wektora prądu zwarcowego \underline{i} oraz wektora spadku napięcia \underline{u} na pętli zwarcowej, impedancja jest określona następującą zależnością:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{u_c + j u_s}{i_c + j i_s} = R + jX, \quad (4.85)$$

skąd otrzymuje się bezpośrednio składowe impedancji

$$R = \frac{u_c i_c + u_s i_s}{i_c^2 + i_s^2}, \quad X = \frac{u_s i_c - u_c i_s}{i_c^2 + i_s^2}. \quad (4.86)$$

Składowe te można uzyskać także z następujących alternatywnych zależności:

$$R = \frac{2P}{I^2}, \quad X = \frac{2Q}{I^2}, \quad (4.87)$$

gdzie: P, Q – moc czynna i bierna, I – amplituda prądu.

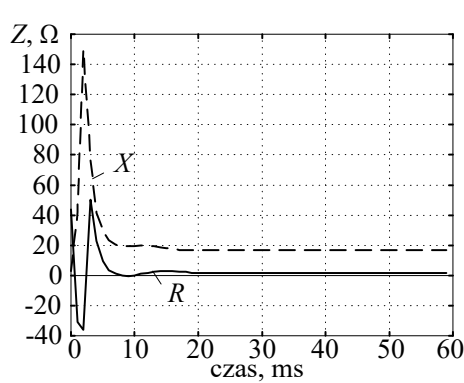
Stosując odpowiednie estymatory wektorów napięć i prądów w (4.86) oraz mocy w (4.87) można uzyskać różne algorytmy pomiaru impedancji. W systemie trójfazowym należy rozpatrywać odpowiednie zależności w odniesieniu do zwarcń międzyfazowych i zwarcń doziemnych [40], [42]. Na przykład, dla przypadku zwarcia L1-E z Przykładu 3.6, impedancja pętli zwarciowej jest określona następująco

$$\underline{Z}_F = \frac{\underline{u}_{L1}}{\underline{i}_{L1} + k_N \underline{i}_N}, \quad (4.88)$$

gdzie: $\underline{u}_A, \underline{i}_A$ – prąd i napięcie fazy L1,

$$\underline{i}_N = \underline{i}_{L1} + \underline{i}_{L2} + \underline{i}_{L3}, \quad (4.89)$$

$$k_N = \frac{\underline{Z}'_0 - \underline{Z}'_1}{3\underline{Z}'_1}, \quad (4.90)$$



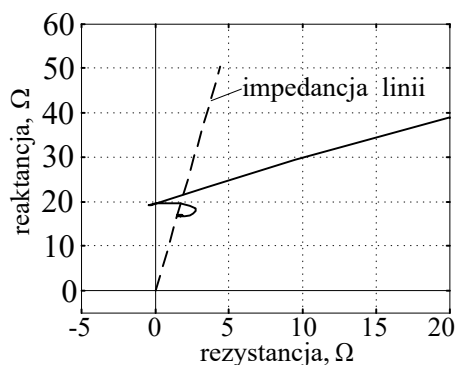
Rys. 4.19. Rezultat pomiaru impedancji dla zwarcia L1-E w linii trójfazowej

$\underline{Z}'_1, \underline{Z}'_0$ – jednostkowe impedancje składowej zgodnej i zerowej (Ω/km).

Estymaty rezystancji i reaktywności pętli zwarciowej dla zwarcia L1-E w odległości 1/3 długości linii przez rezystancję $0,5\Omega$ (rys. 1.3) są pokazane na rys. 4.19. Wektory napięcia i prądu są uzyskane w wyniku zastosowania filtrów Kalmana jak w Przykładzie 3.6 (model dwustanowy dla napięcia i trójstanowy dla prądu). Trajektoria estymaty impedancji jest pokazana na rys. 4.20.

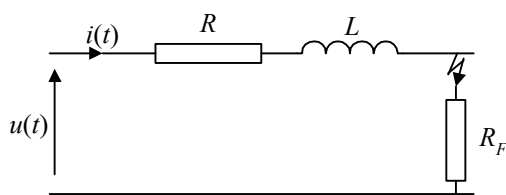
4.5.2 Zastosowanie modelu pętli zwarciowej

Ten rodzaj algorytmów wywodzi się z modelu pętli zwarciowej, w którym parametry modelu są związane z prądem i napięciem obserwowanym w punkcie pomiarowym. Zakłada się, że nadzorowany element



Rys. 4.20. Trajektoria impedancji dla zwarcia $L1-E$ w odległości $1/3$ długości linii

może być przedstawiony w postaci modelu o stałych skupionych. W celu



Rys. 4.21. Model pętli zwarciowej

ilustracji rozpatruje się obwód RL reprezentujący pętlę zwarciową (rys. 4.21), w którym napięcie $u(t)$ i prąd $i(t)$ są powiązane następującym równaniem (rezystancja zwarcia R_F jest tu pominięta):

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}. \quad (4.91)$$

W zabezpieczeniu cyfrowym parametry R oraz L można określić na wiele sposobów [1], [22], [38]. Oto niektóre z nich.

Najbardziej podstawowa metoda rozwiązania (4.91) polega na zastąpieniu różniczkowania przez odpowiednią formułę numeryczną. Stąd:

$$A\{u(t_a)\} = A\{i(t_a)\}R + D\{i(t_d)\}L, \quad (4.92)$$

gdzie: $A\{\}$ – operator interpolacji, $D\{\}$ – operator numerycznego różniczkowania, t_a , t_d – czas odniesienia (środek przedziału) operacji aproksymacji i różniczkowania.

Operacje interpolacji i różniczkowania w (4.92) powinny mieć to samo opóźnienie grupowe. Na przykład, przyjmując dwupunktowe operacje różniczkowania i interpolacji otrzymuje się*

$$\frac{u(k) + u(k-1)}{2} = R \frac{i(k) + i(k-1)}{2} + L \frac{i(k) - i(k-1)}{T}, \quad (4.93)$$

gdzie: T – okres próbkowania oraz $t_a = t_d = t_k - T/2$.

Wartości R oraz L można uzyskać przez rozwiązanie układu równań (4.92) zapisanych dla dwóch punktów przesuniętych w czasie o okres t_m ($t_a = t_d$)

$$\begin{aligned} A\{u(t_l)\} &= A\{i(t_l)\}R + D\{i(t_l)\}L, \\ A\{u(t_{l-m})\} &= A\{i(t_{l-m})\}R + D\{i(t_{l-m})\}L, \end{aligned} \quad (4.94)$$

skąd otrzymuje się następujące estymatory:

$$R = \frac{A\{u(t_{l-m})\}D\{i(t_l)\} - A\{u(t_l)\}D\{i(t_{l-m})\}}{A\{i(t_{l-m})\}D\{i(t_l)\} - A\{i(t_l)\}D\{i(t_{l-m})\}}, \quad (4.95)$$

$$L = \frac{A\{i(t_{l-m})\}A\{u(t_l)\} - A\{i(t_l)\}A\{u(t_{l-m})\}}{A\{i(t_{l-m})\}D\{i(t_l)\} - A\{i(t_l)\}D\{i(t_{l-m})\}}. \quad (4.96)$$

Warto pamiętać, że jeżeli powyższe estymatory są stosowane w sieci o pulsacji znamionowej ω_1 , to należy odpowiednio przeskalować operatory różniczkowania i interpolacji (p. 4.3.3).

Stosując w powyższych zależnościach najkrótsze okno pomiarowe uzyskuje się wynik na podstawie trzech kolejnych próbek sygnału prądu i napięcia. Należy jednak pamiętać, że różniczkowanie numeryczne jest bardzo wrażliwe na zakłócenia i przy krótkim oknie pomiarowym algorytm może dawać bardzo niestabilny wynik. Dlatego w praktycznych rozwiązaniach stosuje się filtrację wstępną sygnałów lub końcową uzyskanego wyniku.

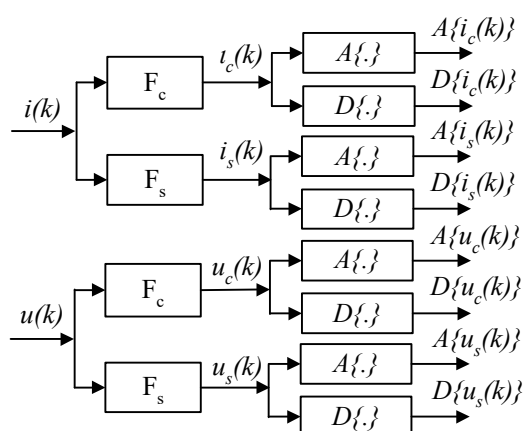
Używając do wstępnej filtracji dwa filtry o różnym przesunięciu fazowym (dwa do napięcia i dwa do prądu – rys. 4.22) otrzymuje się interesujący algorytm, w którym, w miejsce dwóch, przesuniętych w czasie próbek sygnału, stosuje się dwa sygnały uzyskane w rezultacie różnego przesunięcia fazowego [28]. W tym przypadku algorytm (4.96) przyjmuje następującą formę:

* Formuła (4.93) jest równoważna zastosowaniu metody trapezów do rozwiązywania równania różniczkowego (4.91).

$$R = \frac{A\{u_c(k)\}D\{i_s(k)\} - A\{u_s(k)\}D\{i_c(k)\}}{A\{i_c(k)\}D\{i_s(k)\} - A\{i_c(k)\}D\{i_s(k)\}}, \quad (4.97)$$

$$L = \frac{A\{i_s(k)\}A\{u_c(k)\} - A\{i_c(k)\}A\{u_s(k)\}}{A\{i_c(k)\}D\{i_s(k)\} - A\{i_c(k)\}D\{i_s(k)\}}, \quad (4.98)$$

gdzie: indeksy napięcia i prądu odpowiadają sygnałom wyjściowym filtrów wstępnych, jak na rys. 4.22.



Rys. 4.22. Struktura algorytmu pomiaru impedancji ze wstępną filtracją

Podobne podejście można zastosować w odniesieniu do zwarc międzyfazowych, gdzie składowe ortogonalne można otrzymać w wyniku przekształcenia fazowego układu współrzędnych do składowych $\alpha\beta$ (Algorytm 4.1) [1].

Należy zauważyć, że w przeciwieństwie do metody bazującej na pomiarze impedancji, model procesu (4.91) przyjęty w powyższej metodzie, jest odpowiedni również dla stanu przejściowego (jeśli tylko założenia co zasadności reprezentacji pętli zwarcowej w postaci obwodu RL są spełnione). Składowa aperiodyczna w sygnale prądu nie jest wówczas źródłem błędu pomiarowego (p. 5.4).

Dokładność estymacji może być poprawiona, gdy w miejsce dwóch równań (4.93) zastosuje się większą ich liczbę. Rozwiązanie takiego układu równań można uzyskać za pomocą MNK [4]. Przy założeniu, że zależność (4.93) będzie powtórzona dla M kolejnych próbek prądu i napięcia, otrzymuje się następujące równanie pomiarowe:

$$\begin{bmatrix} u_k + u_{k-1} \\ \dots \\ u_{k-M+2} + u_{k-M+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (i_k + i_{k-1}) & (i_k - i_{k-1}) \\ \dots & \dots \\ (i_{k-M+2} + i_{k-M+1}) & (i_{k-M+2} - i_{k-M+1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ \dots \\ \frac{2}{T}L \end{bmatrix} \quad (4.99)$$

lub w formie macierzowej

$$\mathbf{u}_\Sigma = \mathbf{I}_\Sigma \mathbf{x}, \quad (4.100)$$

gdzie:

$$\mathbf{u}_\Sigma = [u_k + u_{k-1} \quad u_{k-1} + u_{k-2} \quad \dots \quad u_{k-M+1} + u_{k-M}]^T, \quad (4.101)$$

$$\mathbf{I}_\Sigma = \begin{bmatrix} i_k + i_{k-1} & i_{k-1} + i_{k-2} & \dots & i_{k-M+1} + i_{k-M} \\ i_k - i_{k-1} & i_{k-1} - i_{k-2} & \dots & i_{k-M+1} - i_{k-M} \end{bmatrix}^T, \quad (4.102)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} R \\ \frac{2}{T}L \end{bmatrix}. \quad (4.103)$$

Wektor poszukiwanych parametrów określa zatem następująca zależność:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} R \\ \frac{2}{T}L \end{bmatrix} = [\mathbf{I}_\Sigma^T \mathbf{I}_\Sigma]^{-1} \mathbf{I}_\Sigma^T \mathbf{u}_\Sigma, \quad (4.104)$$

którą należy rozwiązywać w każdym kroku próbkowania.

Inny sposób otrzymywania parametrów RL schematu zastępczego obwodu zwarciovego polega na określeniu całki wyrażenia (4.91) w dwóch różnych przedziałach: $t_0 - t_1$ oraz $t_2 - t_3$ [24]:

$$\int_{t_0}^{t_1} u(t) dt = R \int_{t_0}^{t_1} i(t) dt + L(i(t_1) - i(t_0)), \quad (4.105)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} u(t) dt = R \int_{t_0}^{t_1} i(t) dt + L(i(t_3) - i(t_2)). \quad (4.106)$$

W przypadku algorytmów numerycznych, powyższe równania są aproksymowane zgodnie z przyjętą metodą całkowania numerycznego. Można sprawdzić, że stosując metodę trapezów dla trzech kolejnych punktów w (4.106) otrzymuje się algorytm zgodny z (4.93) zapisany dla tych samych

punktów. W ogólnym przypadku, dokładność obliczenia parametrów R oraz L zależy od szerokości przedziału całkowania. Należy zauważyć, że całkowanie (sumowanie) odpowiednio modyfikuje właściwości użytej metody. W szczególności, jeśli długość przedziału całkowania pokrywa się z okresem określonej harmonicznej, to jej obecność w sygnale wejściowym nie wpływa na wynik estymacji [11].

W przypadku linii trójfazowej równanie (4.91) należy określić w odniesieniu do wielkości występujących w obwodzie zwarciovym. Dla zwarcia doziemnego odpowiednie równanie ma następującą postać [10], [11]:

$$u(t) = R \left(i_p(t) + \frac{R_0' - R_1'}{R_1'} i_0(t) \right) + L \frac{d}{dt} \left(i_p(t) + \frac{L_0' - L_1'}{L_1'} i_0(t) \right), \quad (4.107)$$

gdzie: $i_p(t)$ – prąd w zwartej fazie, $i_0(t)$ – prąd kolejności zerowej, R_0' , R_1' – względna rezystancja linii dla składowej zerowej i zgodnej, L_0' , L_1' – względna indukcyjność dla składowej zerowej i zgodnej.

Podstawiając w (4.107):

$$R = k_R R_1', \quad L = k_L L_1', \quad (4.108)$$

otrzymuje się:

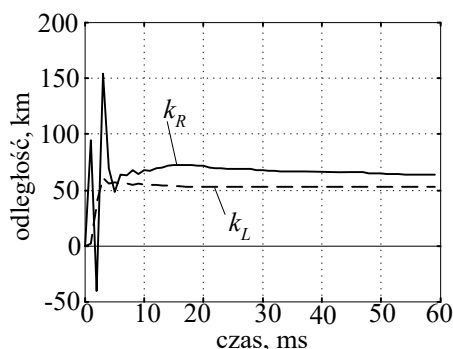
$$u(t) = k_R i_R(t) + k_L \frac{di_L(t)}{dt}, \quad (4.109)$$

gdzie:

$$i_R(t) = R_1' i_p(t) + (R_1' - R_0') i_0(t), \quad (4.110)$$

$$i_L(t) = L_1' i_p(t) + (L_1' - L_0') i_0(t). \quad (4.111)$$

Współczynniki k_R oraz k_L przedstawiają odległość do miejsca zwarcia określoną na podstawie, odpowiednio, rezystancji i indukcyjności obwodu zwarciovego. Na rys. 4.23 pokazane są przebiegi estymat odległości k_R oraz k_L dla zwarcia L1-E w 1/3 długości linii (53 km od punktu pomiarowego) przez rezystancję $0,5\Omega$ (rys. 1.3). Estymacja została przeprowadzona zgodnie z algorytmem (4.104) z oknem pomiarowym o szerokości $M=5$ próbek ($N=20$ próbek w okresie). Można zauważyć, że k_L osiąga stałą wartość bardzo bliską rzeczywistej odległości już po kilku milisekundach od momentu zwarcia, podczas gdy k_R zmienia się w



Rys. 4.23. Estymaty odległości do miejsca zwarcia

dużych granicach i ustala się na poziomie różnym od wartości poprawnej z powodu występującej rezystancji zwarcia R_F .

Na zakończenie można sformułować następujące wnioski charakteryzujące impedancyjne algorytmy pomiaru odległości do miejsca zwarcia:

-algorytmy wykorzystujące relacje pomiędzy wektorami prądu i napięcia są w dużym stopniu stabilne i dają dobre rezultaty w

przypadku, gdy w przebiegach zwarciovych jest mała zawartość niestacjonarnych lub nieharmonicznych składowych prądu i napięcia;

- algorytmy wywodzące się z modelu RL pętli zwarciovwej wykorzystują więcej informacji zawartej w sygnale wejściowym zabezpieczenia (składowa aperiodyczna jest tu częścią sygnału użytecznego) i dlatego są zazwyczaj dokładniejsze, choć mniej odporne na zakłócenia wysokoczęstotliwościowe; odpowiednie modyfikacje pozwalają jednak zredukować tę niedogodność.

4.6 Estymacja składowych symetrycznych

Przekształcenia układu współrzędnych są często stosowane w analizie systemu trójfazowego jako sposób uproszczenia zagadnienia lub wyróżnienia określonego zjawiska. W tym celu model sieci trójfazowej (lub większej liczby faz) przedstawiony w *naturalnym układzie współrzędnych* (współrzędnych fazowych) jest transformowany do innego układu współrzędnych (układu współrzędnych modalnych) z zachowaniem określonych relacji energetycznych. Ogólna postać takiego przekształcenia jest następująca

$$\mathbf{x}_m = \mathbf{T}\mathbf{x}_f, \quad (4.112)$$

gdzie: \mathbf{x}_f – wektor wielkości fazowych (w układzie współrzędnych naturalnych), \mathbf{x}_m – wektor wielkości modalnych (w modalnym układzie współrzędnych), \mathbf{T} – macierz transformacji.

Dalsze rozważania zostaną ograniczone do układu trójfazowego, gdy wektory w (4.112) mają wymiar (3×1) . Należy zauważyć, że wielkości reprezentowane przez te wektory mogą mieć różnorodny charakter. Na przykład, wektor trójfazowych sygnałów zespolonych można przedstawić za pomocą jednego z następujących modeli ciągłych:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_f(t) &= \begin{bmatrix} x_{L1}(t) & x_{L2}(t) & x_{L3}(t) \end{bmatrix}^T = \\ &= \begin{bmatrix} x_{L1x}(t) + jx_{L1y}(t) & x_{L2x}(t) + jx_{L2y}(t) & x_{L3x}(t) + jx_{L3y}(t) \end{bmatrix}^T = \\ &= \sqrt{2} \begin{bmatrix} \underline{X}_{L1} & \underline{X}_{L2} & \underline{X}_{L3} \end{bmatrix}^T e^{j\omega t} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} X_{L1} e^{j\psi_{L1}} & X_{L2} e^{j\psi_{L2}} & X_{L3} e^{j\psi_{L3}} \end{bmatrix}^T e^{j\omega t}, \end{aligned} \quad (4.113)$$

gdzie, w tym przypadku, wielkości oznaczone dużymi literami odnoszą się do wartości skutecznych.

Założono przy tym, że prędkość kątowna wszystkich sygnałów fazowych jest jednakowa. Przekształcenie (4.112) może dotyczyć różnych wielkości modelu (4.113), związanych z trójfazowym układem współrzędnych. Najszersze zastosowanie znalazło przekształcenie składowych symetrycznych, między innymi, ze względu na jego przydatność do analizy obwodów zwarciovych. W niektórych przypadkach wygodniej jest stosować zaproponowane przez Edith Clarke przekształcenie $0, \alpha, \beta$, znane również jako przekształcenie Clarke, którego macierz przekształceń ma współczynniki rzeczywiste [5].

Sens stosowania przekształcenia układu wielofazowego do nowego systemu współrzędnych uwidacznia się najlepiej w odniesieniu do parametrów układu. Równanie obwodu trójfazowego ze sprzężeniami międzyfazowymi ma następującą formę

$$\mathbf{u}_f = \mathbf{Z}_f \mathbf{i}_f, \quad (4.114)$$

gdzie:

$$\mathbf{Z}_f = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix}.$$

Jeśli wektory prądu i napięcia zostaną przekształcone zgodnie z (4.112), to otrzymuje się

$$\mathbf{u}_m = \mathbf{T} \mathbf{Z}_f \mathbf{T}^{-1} \mathbf{i}_m, \quad (4.115)$$

gdzie:

$$\mathbf{T} \mathbf{Z}_f \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{Z}_m. \quad (4.116)$$

Celem przekształcenia (4.115) jest, najczęściej, uzyskanie diagonalnej postaci macierzy \mathbf{Z}_m . Wówczas wielofazowy układ sprzężony przekształca się w diagonalny układ modalny z niezależnymi 'fazami' (modami). Warunek istnienia przekształcenia (4.116) jest zazwyczaj spełniony w odniesieniu do praktycznie spotykanych układów. W szczególności, macierz przekształceń \mathbf{T} jest zawsze nieosobliwa w przypadku symetrycznej macierzy parametrów \mathbf{Z}_f [12].

Przekształcenie składowych symetrycznych, w ogólnym przypadku, odnosi się do zespolonych sygnałów w układach wielofazowych. W przypadku dyskretnego modelu układu trójfazowego z fazą $L1$ wybraną jako fazą odniesienia, jest ono określone następująco [23]:

$$\begin{bmatrix} \underline{x}_0(k) \\ \underline{x}_1(k) \\ \underline{x}_2(k) \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_{L1}(k) \\ \underline{x}_{L2}(k) \\ \underline{x}_{L3}(k) \end{bmatrix}, \quad (4.117)$$

gdzie:

$$a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (4.118)$$

przy czym, macierze przekształceń

$$\mathbf{S} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix}. \quad (4.119)$$

Składowe symetryczne mają prostą interpretację geometryczną: składowa zerowa $\underline{x}_0(k)$ jest wartością średnią zespolonych sygnałów fazowych, składowa zgodna $\underline{x}_1(k)$ reprezentuje sygnał zespolony o dodatnim kierunku wirowania (wektor zespolony obraca się w kierunku zgodnym), a składowa przeciwna $\underline{x}_2(k)$ – w kierunku przeciwnym.

W analizie stanów ustalonych często korzysta się z przekształcenia składowych symetrycznych w odniesieniu do symbolicznej reprezentacji sygnałów fazowych (składowe symetryczne w postaci symbolicznej). Wówczas relacja (4.112) przybiera następującą formę:

$$\begin{bmatrix} \underline{X}_0 \\ \underline{X}_1 \\ \underline{X}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{X}_{L1} \\ \underline{X}_{L2} \\ \underline{X}_{L3} \end{bmatrix}. \quad (4.120)$$

Estymator składowych symetrycznych można otrzymać wprost z (4.117) gdy znane są składowe ortogonalne sygnałów fazowych. Jeśli, w ogólnym przypadku:

$$\underline{x}_i = x_{ix} + jx_{iy} = x_i + jx_{iy},$$

gdzie: $i=0, 1, 2$ lub odpowiednio, $i = L1, L2, L3$,

to związek (4.117) można zapisać w następującej postaci

$$\mathbf{x}_{012} = \mathbf{S}_1 \mathbf{x}_{abc}, \quad (4.121)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{012} &= [X_{0c} \ X_{0s} \ X_{1c} \ X_{1s} \ X_{2c} \ X_{2s}]^T, \\ \mathbf{x}_{abc} &= [X_{L1c} \ X_{L1s} \ X_{L2c} \ X_{L2s} \ X_{L3c} \ X_{L3s}]^T, \\ \mathbf{S}_1 &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & 2 & \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} & -1 \\ 2 & 0 & -1 & \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 2 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

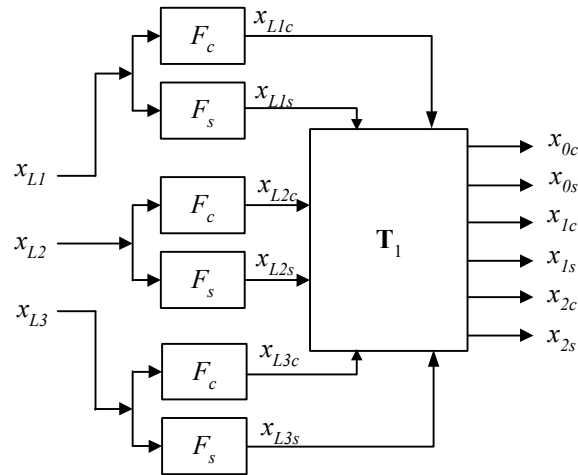
Struktura algorytmu jest pokazana na rys. 4.24. Składowe ortogonalne sygnałów fazowych mogą być określone za pomocą jednej z prezentowanych wcześniej metod.

Algorytm może być znacznie zredukowany, jeśli okres próbkowania zostanie tak dobrany, aby wielokrotność kątów pomiędzy m kolejnymi próbkami dała przesunięcie równe kątowi $2\pi/3$ [1], [34], [38]. Wówczas można stosować algorytm rekursywny (3.60) - (3.65) w odniesieniu do wielkości fazowych w (4.117), co prowadzi do następującego związku

$$\mathbf{x}_{012}(k) = \mathbf{x}_{012}(k-1) + \mathbf{S}_\Delta(k) \Delta \mathbf{x}(k), \quad (4.122)$$

$$\text{gdzie: } \mathbf{S}_\Delta(k) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \cos(ak) & \cos(ak) & \cos(ak) \\ \sin(ak) & \sin(ak) & \sin(ak) \\ \cos(ak) & \cos(a(k+m)) & \cos(a(k-m)) \\ \sin(ak) & \sin(a(k+m)) & \sin(a(k-m)) \\ \cos(ak) & \cos(a(k-m)) & \cos(a(k+m)) \\ \sin(ak) & \sin(a(k-m)) & \sin(a(k+m)) \end{bmatrix},$$

$$\Delta \mathbf{x}(k) = [\Delta x_{L1}(k) \ \Delta x_{L2}(k) \ \Delta x_{L3}(k)]^T,$$



Rys. 4.24. Struktura estymatora składowych symetrycznych

$\Delta x_l(k) = x_l(k) - x_l(k - N)$ – w przypadku algorytmu pełnokresowego,

$\Delta x_l(k) = x_l(k) + x_l(k - N/2)$ – w przypadku algorytmu półokresowego,

l – oznaczenie fazy ($L1$, $L2$ lub $L3$),

$am = 2\pi/3$, m - całkowite.

Składowa zerowa może być określona przez bezpośrednie sumowanie sygnałów fazowych dostępnych pomiarowo (rzeczywistych):

$$x_0(k) = \frac{x_{L1}(k) + x_{L2}(k) + x_{L3}(k)}{3}, \quad (4.123)$$

skąd, przez ortogonalizację, można już łatwo uzyskać postać zespoloną $\underline{x}_0(k)$.

Podobnie, jeśli tylko należy określić składową zgodną i przeciwną, to wygodnie jest stosować algorytm wykorzystujący koncepcję *wektora przestrzennego* [9], [16]. Składowe *wektora przestrzennego* \underline{x}_s systemu trójfazowego są określone przez następujące przekształcenie wielkości fazowych

$$\underline{x}_s(k) = \frac{2}{3} (x_{L1}(k) + ax_{L2}(k) + a^2 x_{L3}(k)) = x_\alpha(k) + jx_\beta(k), \quad (4.124)$$

gdzie: a – jak w (4.118).

Przekształcenie (4.124) uzupełnione o składową zerową (4.123) tworzy razem przekształcenie $0, \alpha, \beta$ (Clarke) fazowych wielkości rzeczywistych

$$\begin{bmatrix} x_0(k) \\ x_\alpha(k) \\ x_\beta(k) \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{L1}(k) \\ x_{L2}(k) \\ x_{L3}(k) \end{bmatrix} \quad (4.125)$$

lub zespolonych

$$\begin{bmatrix} \underline{x}_0(k) & \underline{x}_\alpha(k) & \underline{x}_\beta(k) \end{bmatrix}^T = \mathbf{C} \begin{bmatrix} \underline{x}_{L1}(k) & \underline{x}_{L2}(k) & \underline{x}_{L3}(k) \end{bmatrix}^T, \quad (4.126)$$

gdzie:

$$\mathbf{C} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Przez porównanie (4.117) i (4.124) można sprawdzić prawdziwość następującego związku

$$x_\alpha(k) + jx_\beta(k) = \underline{x}_1(k) + \underline{x}_2^*(k). \quad (4.127)$$

W końcu, aby znaleźć powiązanie pomiędzy składowymi symetrycznymi i zespoloną postacią składowych $0, \alpha, \beta$, należy wielkości fazowe w (4.126) przedstawić w postaci składowych symetrycznych. Prowadzi to do następującego przekształcenia

$$\begin{bmatrix} \underline{x}_0(k) & \underline{x}_1(k) & \underline{x}_2(k) \end{bmatrix}^T = \mathbf{S}\mathbf{C}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{x}_0(k) & \underline{x}_\alpha(k) & \underline{x}_\beta(k) \end{bmatrix}^T, \quad (4.128)$$

gdzie:

$$\mathbf{S}\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & j \\ 0 & 1 & -j \end{bmatrix}.$$

Istotne są tu zależności dla składowej zgodnej i przeciwnej

$$\begin{aligned} \underline{x}_1(k) &= \frac{1}{2}(x_\alpha(k) + jx_\beta(k)), \\ \underline{x}_2(k) &= \frac{1}{2}(x_\alpha(k) - jx_\beta(k)). \end{aligned} \quad (4.129)$$

Powyższe przekształcenie pozwala sformułować następujący algorytm.

Algorytm 4.1. *Algorytm estymacji składowych symetrycznych zgodnej i przeciwnej na podstawie pomiaru wielkości fazowych układu trójfazowego.*

- Na podstawie (4.125) określić składowe $x_\alpha(k)$ oraz $x_\beta(k)$

$$x_\alpha(k) = \frac{1}{3}(2x_{L1}(k) - x_{L2}(k) - x_{L3}(k)),$$

$$x_\beta(k) = \frac{\sqrt{3}}{3}(x_{L2}(k) - x_{L3}(k)).$$

- Stosując jedną z metod ortogonalizacji przekształcić sygnały $x_\alpha(k)$ oraz $x_\beta(k)$ do postaci zespolonej $\underline{x}_\alpha(k)$ oraz $\underline{x}_\beta(k)$.
- Za pomocą zależności (4.129) określić poszukiwane składowe symetryczne. □

Właściwości estymatora określonego przez powyższy algorytm są identyczne z właściwościami estymatora (4.121), jednak jego stosowanie może być prostsze, gdy obliczane są tylko dwie składowe: $\underline{x}_1(k)$ oraz $\underline{x}_2(k)$. Struktura algorytmu jest pokazana na rys. 4.25. Cechy estymatora zależą od użytej metody ortogonalizacji składowych $x_\alpha(k)$, $x_\beta(k)$. Charakterystyki częstotliwościowe estymatorów składowej zgodnej i przeciwnej dla przypadku, gdy do ortogonalizacji zastosowano półokresową metodę Fouriera są pokazane na rys. 4.26. Warto zauważyć, że w tym przypadku, racjonalnie jest analizować charakterystykę częstotliwościową w przedziale $(-N/2..N/2)$. Ponadto, uzyskana charakterystyka częstotliwościowa jest niezależna od fazy sygnału w pełnym zakresie zmian częstotliwości*. Reprezentacja analityczna odpowiednich funkcji określających estymaty może być łatwo otrzymana przez odwołanie się

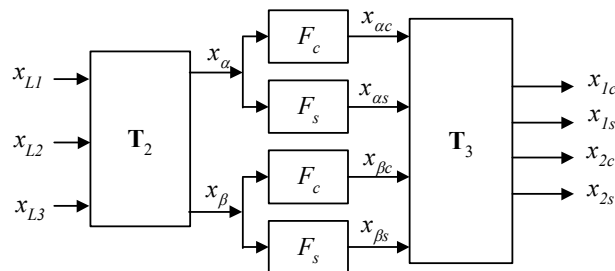
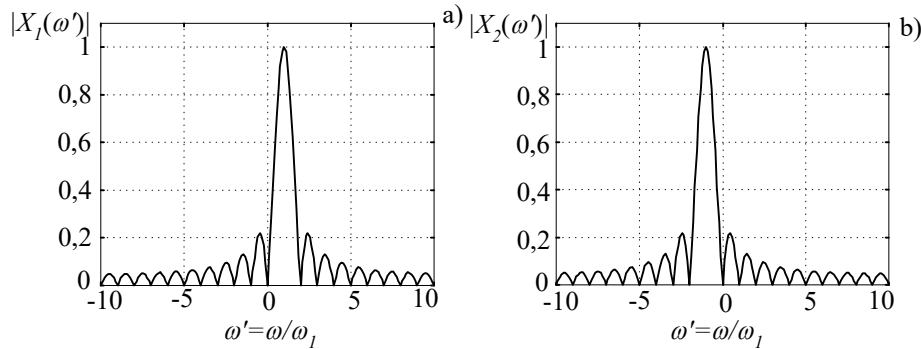


Fig. 4.25. Struktura estymatora składowej zgodnej i przeciwnej

* Jest to słuszne dla układu jednorodnego, gdy: $|X_{L1}| = |X_{L2}| = |X_{L3}|$



Rys. 4.26. Charakterystyki częstotliwościowe estymatorów składowej zgodnej (a) oraz składowej przeciwnej (b)

do przedstawienia sygnałów systemu trójfazowego w postaci zespolonej. W przypadku symetrycznego wymuszenia harmonicznego o częstotliwości względnej ω' otrzymuje się

$$\begin{aligned} \underline{x}_1(k) &= X \frac{A(\omega') + B(\omega')}{2} e^{j\vartheta(\omega')} e^{j(\omega'ak - \varphi + \zeta(\omega'))}, \\ \underline{x}_2(k) &= X \frac{A(\omega') - B(\omega')}{2} e^{j\vartheta(-\omega')} e^{j(\omega'ak - \varphi + \zeta(-\omega'))}, \end{aligned} \quad (4.130)$$

przy czym, na podstawie (4.20) można napisać następujące zależności

$$\frac{A(\omega') + B(\omega')}{2} = \frac{|H(j\omega')|}{2}, \quad \frac{A(\omega') - B(\omega')}{2} = \frac{|H(-j\omega')|}{2}, \quad (4.131)$$

co oznacza, że charakterystyki częstotliwościowe tych estymatorów są uśrednionymi charakterystykami (wartość średnia obwiedni górnej i dolnej) użytych filtrów.

W przypadku, gdy do ortogonalizacji zostanie zastosowany obserwator stanu, przekształcenie (4.129) może być zrealizowane przez odpowiednie ukształtowanie modelu pomiarowego. Model stanowy składowych symetrycznych zgodnej i przeciwnej ma wówczas następującą formę [26]:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{12}(k+1) &= \mathbf{A}_{12} \mathbf{x}_{12}(k), \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}_{12} \mathbf{x}_{12}(k), \end{aligned} \quad (4.132)$$

gdzie: $\mathbf{x}_{12}(k) = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2]^T$ – wektor stanu reprezentujący modele zespolone składowej zgodnej i przeciwnej, $\mathbf{y}(k)$ – wektor pomiarów jak w (3.162),

$$\mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \\ & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}, \quad (4.133)$$

przy czym, macierze \mathbf{A}_1 oraz \mathbf{A}_2 określają modele składowej zgodnej i przeciwnej; w przypadku dwustanowego modelu każdej składowej otrzymuje się:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{bmatrix}, \quad (4.134)$$

$$\mathbf{C}_{12} = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.135)$$

Można zauważyć, że na wyjściu systemu znajdują się dwie składowe wektora przestrzennego x_α , x_β , które należy określić zgodnie z (4.125). Struktura macierzy pomiaru \mathbf{C}_{12} wynika bezpośrednio z (4.124).

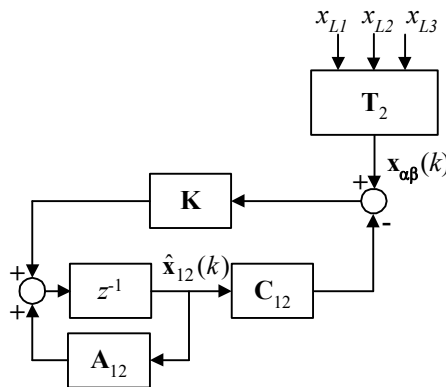
Szczegółowy model systemu zależy od sposobu reprezentacji składowych zgodnej i przeciwnej. Można tu stosować podobne reguły jak w przypadku klasycznego obserwatora do estymacji składowych ortogonalnych sygnału. Obserwator stanu systemu (4.132) ma następującą formę [26]:

$$\hat{\mathbf{x}}_{12}(k+1) = \mathbf{A}_{12}\hat{\mathbf{x}}_{12}(k) + \mathbf{K}(\mathbf{y}(k) - \mathbf{C}_{12}\hat{\mathbf{x}}_{12}(k)), \quad (4.136)$$

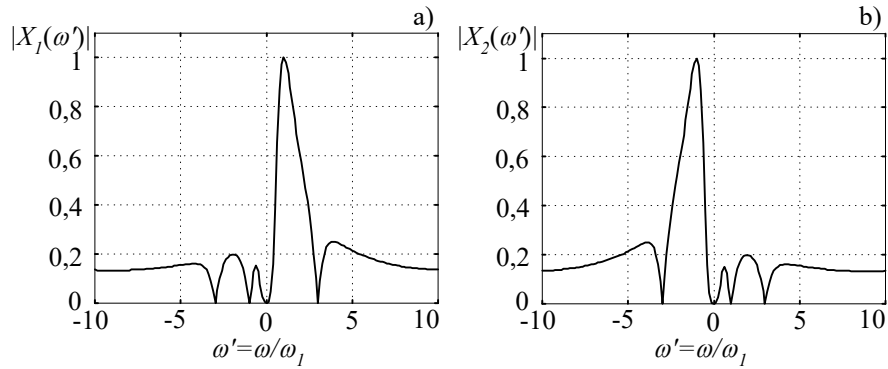
gdzie $\hat{\mathbf{x}}_{12}(k)$ – estymata wektora $\mathbf{x}_{12}(k)$, \mathbf{K} – macierz wzmocnienia.

Struktura obserwatora (4.136) jest pokazana na rys. 4.27.

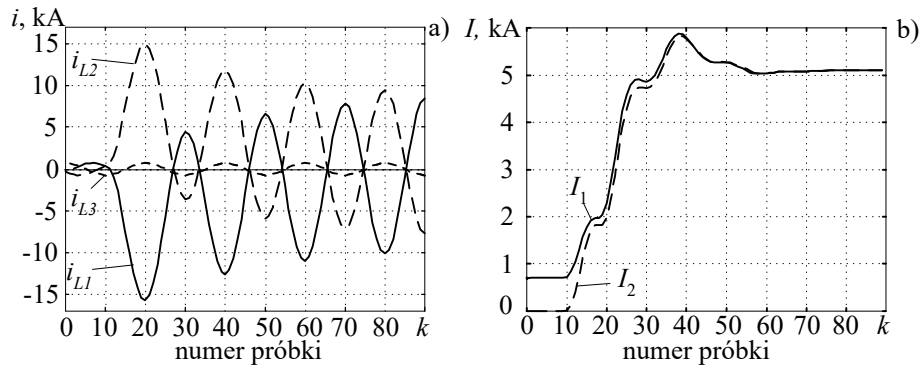
Synteza obserwatora (4.136) może być prowadzona w podobny sposób, jak to ma miejsce w przypadku obserwatora pojedynczego sygnału.



Rys. 4.27. Schemat blokowy obserwatora składowych symetrycznych



Rys. 4.28. Charakterystyki częstotliwościowe obserwatora składowej zgodnej (a) oraz przeciwnej (b)



Rys. 4.29. Przebiegi prądów fazowych (a) oraz estymaty składowych symetrycznych (b)

wzmocnienia. Będzie się jednak to wiązało z wydłużeniem stanu przejściowego pomiaru. □

4.7 Pomiar częstotliwości sygnału

Częstotliwość jest bardzo ważnym parametrem charakteryzującym stan systemu elektroenergetycznego. Można podać wiele funkcji sterowania systemem elektroenergetycznym, które opierają swoje działanie na pomiarze częstotliwości. To między innymi: samoczynne częstotliwościowe odciążanie (SCO), korekcja pomiarów od zmian częstotliwości, kontrola stabilności, regulacja prędkości obrotowej turbin, procedury adaptacyjnego sterowania systemem, procedury synchronizacji generatorów, niektóre rodzaje zabezpieczeń generatorów i transformatorów oraz inne.

Metody numeryczne stosowane do dokładnego i szybkiego pomiaru częstotliwości w systemie zazwyczaj wykorzystują sygnał napięciowy. W celu uniknięcia wpływu dużych zakłóceń w systemie trójfazowym, korzysta się najczęściej ze składowej zgodnej napięcia.

Ze względu na przeznaczenie, algorytmy pomiaru częstotliwości można podzielić na dwie kategorie:

- algorytmy do pomiaru odchyłki częstotliwości od wartości znamionowej - odnoszą się one do przypadków, gdy częstotliwość może się zmieniać w niewielkim zakresie (kilku Hz) w stosunku do wartości znamionowej;
- algorytmy do pomiaru szerokich zmian częstotliwości, co praktycznie oznacza zmiany w zakresie $(0,4 \div 1,6)\omega_1$, a nawet większym.

Jeśli chodzi o sposób próbkowania sygnałów napięciowych, to stosuje się jedną z dwóch technik: równomierne próbkowanie z częstotliwością odpowiadającą N próbkom w okresie znamionowej wartości podstawowej harmonicznej lub zmienny okres próbkowania, adaptowany do aktualnej prędkości kątowej sygnału. Ten ostatni sposób wymaga zastosowania odpowiedniej procedury adaptacyjnego sterowania czasem próbkowania. Niezależnie od tego, użyta metoda pomiaru częstotliwości może wymagać stosowania stałej liczby M próbek w oknie pomiarowym. W innym przypadku, szerokość okna pomiarowego może być zależna od wartości estymowanej częstotliwości.

Ponieważ stosowane algorytmy różnią się niekiedy w bardzo wielu szczegółach, poniżej przedstawione zostaną najbardziej charakterystyczne grupy używanych metod.

4.7.1 Metody wykorzystujące estymatory sygnału zespolonego

Omawiane tu algorytmy określają częstotliwość sygnału zespolonego odpowiadającego podstawowej harmonicznej na podstawie pomiaru kąta pomiędzy wektorami w dwóch lub większej liczbie kolejnych próbek sygnału, przy czym, składowe ortogonalne tych wektorów mogą być określone różnymi metodami (p. 4.3).

Zakładając stałą częstotliwość próbkowania otrzymuje się wartość kąta $a = 2\pi/N$ pomiędzy kolejnymi próbkami postulowanej składowej podstawowej. Jeśli częstotliwość obserwowanego sygnału różni się od wartości znamionowej o Δf , to jego model można zapisać następującym równaniem:

$$y(k) = X \cos((a + \Delta a)k - \varphi), \quad (4.137)$$

gdzie:

$$\Delta a = \frac{2\pi}{N} \frac{\Delta f}{f_0}, \quad \Delta f = f - f_0, \quad (4.138)$$

f_0 - częstotliwość znamionowa.

Sygnal (4.137) może być przedstawiony w postaci wykładniczej:

$$y(k) = X \cos((a + \Delta a)k - \varphi) = \frac{X}{2} \left(e^{j((a+\Delta a)k - \varphi)} + e^{-j((a+\Delta a)k - \varphi)} \right). \quad (4.139)$$

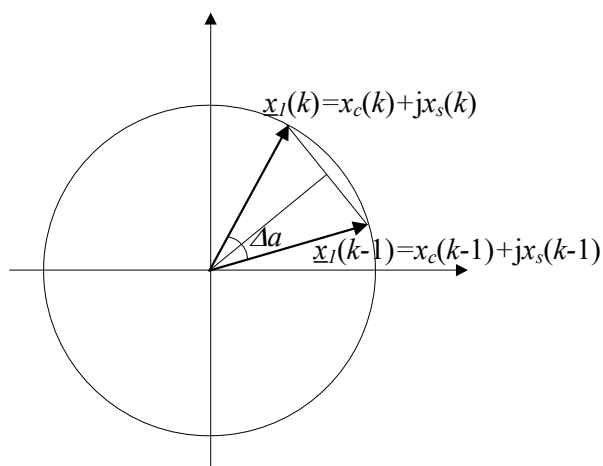
Poddając sygnał (4.139) przekształceniu według pełnookresowego korelacyjnego algorytmu Fouriera (3.38) otrzymuje się (rys. 4.30):

$$\begin{aligned} \underline{X}(k) &= X_c(k) + jX_s(k) \\ &= \frac{X}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left(e^{j((a+\Delta a)(k-i) - \varphi)} + e^{-j((a+\Delta a)(k-i) - \varphi)} \right) e^{-j(a(k-i))}. \end{aligned} \quad (4.140)$$

Sygnal (4.140) można przedstawić w następującej postaci [8]

$$\underline{X}(k) = d_1 \underline{D}(k) + d_2 \underline{D}^*(k) e^{-ja(2k+1)}, \quad (4.141)$$

gdzie:



Rys. 4.30. Kąt pomiędzy dwoma wektorami reprezentującymi sygnały zespolone w dwóch kolejnych próbkach

$$d_1 = \frac{X}{N} \frac{\sin\left(\frac{\Delta a}{2} N\right)}{\sin\left(\frac{\Delta a}{2}\right)}, \quad d_2 = \frac{X}{N} \frac{\sin\left(\frac{\Delta a}{2} N\right)}{\sin\left(\frac{\Delta a}{2} + a\right)}, \quad \underline{D}(k) = e^{-j\varphi} e^{-j\frac{\Delta a}{2}(N-1)} e^{j\Delta a k}.$$

Łatwo sprawdzić, że $\underline{D}(k)$ przedstawia wektor obracający się pomiędzy kolejnymi próbkami o kąt Δa , podczas gdy drugi składnik w (4.141) obraca się w kierunku ujemnym z podwójną prędkością. Dla małych odchyłek częstotliwości zachodzą zależności: $d_2 \ll d_1$ oraz $\sin(\Delta a) \approx \Delta a$. Zatem, wyrażenie (4.141) może być zredukowane do postaci

$$\underline{x}(k) \approx \frac{X}{N} \frac{\frac{\Delta a}{2} N}{\frac{\Delta a}{2}} e^{-j\varphi} e^{-j\frac{\Delta a}{2}(N-1)} e^{j\Delta a k}. \quad (4.142)$$

Rozpatrując stosunek dwóch kolejnych próbek sygnału wyjściowego (4.142)

$$\frac{\underline{X}(k)}{\underline{X}(k-1)} = \frac{e^{-j\varphi} e^{-j\frac{\Delta a}{2}(N-1)} e^{j\Delta a k}}{e^{-j\varphi} e^{-j\frac{\Delta a}{2}(N-1)} e^{j\Delta a(k-1)}} = e^{j\Delta a}, \quad (4.143)$$

otrzymuje się zmianę kąta:

$$\arg\left(\frac{\underline{X}(k)}{\underline{X}(k-1)}\right) = \arctg \frac{X_s(k)X_c(k-1) - X_c(k)X_s(k-1)}{X_c(k)X_c(k-1) + X_s(k)X_s(k-1)} = \Delta a = a \frac{\Delta f}{f_0}. \quad (4.144)$$

Zależność (4.144) określa estymator zmiany częstotliwości sygnału. Zgodnie z założeniami, można go stosować do przypadków niewielkiej zmiany częstotliwości w stosunku do wartości znamionowej f_0 . Miara ta zależy jednak od długości okna pomiarowego i odpowiednia jego modyfikacja może znacznie zwiększyć zakres mierzonej częstotliwości [8]. W takim przypadku, algorytm nadaża za zmianą pulsacji stosownie adaptując długość okna pomiarowego. Mechanizm ten pozwala zredukować błąd wynikający z uproszczenia wprowadzonego w (4.142).

Można zauważyć, że odrzucony drugi składnik w (4.141) przedstawia wektor o przeciwnym kierunku wirowania. Uproszczenie polega zatem na pozostawieniu tylko składowej zgodnej. W odniesieniu do sygnału trójfazowego można to wyeliminować przez zastosowanie wcześniejszej filtracji składowej zgodnej. Dla przypadku sygnału trójfazowego relacja (4.139) przybiera następującą postać:

$$\begin{aligned}
y_{L1}(k) &= X \cos((a + \Delta a)k - \varphi), \\
y_{L2}(k) &= X \cos((a + \Delta a)k - \varphi - 2\pi/3), \\
y_{L3}(k) &= X \cos((a + \Delta a)k - \varphi + 2\pi/3).
\end{aligned} \tag{4.145}$$

Stosując Algorytm 4.1 do określenia składowej zgodnej, w pierwszym kroku, na podstawie wielkości trójfazowych (4.145), otrzymuje się składowe wektora przestrzennego $\underline{x}_s(k)$

$$\begin{aligned}
x_\alpha(k) &= \frac{3}{2} X \cos((a + \Delta a)k - \varphi), \\
x_\beta(k) &= \frac{3}{2} X \sin((a + \Delta a)k - \varphi).
\end{aligned} \tag{4.146}$$

Poddając sygnały (4.146) ortogonalizacji za pomocą pełnookresowej metody Fouriera uzyskuje się zależności podobne do (4.141):

$$\begin{aligned}
\underline{x}_\alpha(k) &= \frac{3}{2} \left(d_1 \underline{D}(k) + d_2 \underline{D}^*(k) e^{-ja(2k+1)} \right), \\
\underline{x}_\beta(k) &= \frac{j3}{2} \left(d_1 \underline{D}(k) + d_2 \underline{D}^*(k) e^{-ja(2k+1)} \right)
\end{aligned} \tag{4.147}$$

Zgodnie z (4.129), składowa zgodna systemu trójfazowego (4.145) jest określona następująco:

$$\underline{x}_1(k) = \frac{1}{2} (\underline{x}_\alpha + j\underline{x}_\beta) = d_1 D(k) = \frac{X}{N} \frac{\sin\left(\frac{\Delta a}{2} N\right)}{\sin\left(\frac{\Delta a}{2}\right)} e^{-j\varphi} e^{-j\frac{\Delta a}{2}(N-1)} e^{j\Delta a k}. \tag{4.148}$$

Odchyłka częstotliwości może być następnie określona według tej samej zasady, jak w przypadku sygnału jednofazowego. Znając wektor (4.148) dla dwóch kolejnych próbek, kąt Δa pomiędzy nimi można także określić na podstawie następującego związku [21]:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} \frac{\Delta a}{2} &= \frac{|X_{1c}(k) - X_{1c}(k-1) + j(X_{1s}(k) - X_{1s}(k-1))|}{|X_{1c}(k) + X_{1c}(k-1) + j(X_{1s}(k) + X_{1s}(k-1))|} \\
&= \frac{|X_{1c}(k) - X_{1c}(k-1)| + |(X_{1s}(k) - X_{1s}(k-1))|}{|X_{1c}(k) + X_{1c}(k-1)| + |X_{1s}(k) + X_{1s}(k-1)|},
\end{aligned} \tag{4.149}$$

co pozwala określić odchyłkę częstotliwości

$$\Delta f = f_0 \frac{\Delta a}{a}. \tag{4.150}$$

Ponieważ kąt Δa jest na ogół mały, więc można tu korzystać z uproszczonej reprezentacji (4.149)

$$\tan \frac{\Delta a}{2} \approx \frac{\Delta a}{2}. \quad (4.151)$$

Zależność (4.149) nie daje informacji o znaku odchyłki częstotliwości. Można ją jednak łatwo uzyskać z analizy wektorów użytych w tym równaniu.

Algorytmy korzystające z przekształcenia sygnałów trójfazowych są bardziej stabilne i odporne na zakłócenia, gdyż stosuje się w nich większą liczbę danych niż w przypadku jednofazowym i przez to następuje zazwyczaj znaczna redukcja szumów.

Przykład 4.3. Zbadać właściwości algorytmów pomiaru częstotliwości korzystając z sygnału jednofazowego i trójfazowego.

W przypadku, gdy dostępny jest sygnał jednofazowy, częstotliwość można określić na podstawie zależności (4.142)–(4.144). Ostateczna postać zależności jest następująca:

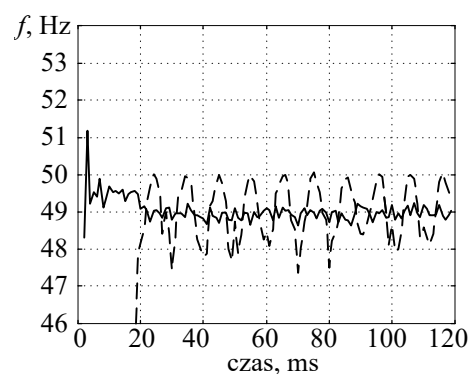
$$f = f_0 \left(1 + \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{X_s(k)X_c(k-1) - X_c(k)X_s(k-1)}{X_c(k)X_c(k-1) + X_s(k)X_s(k-1)} \right).$$

Przyjmuje się, że składowe ortogonalne w powyższym wzorze są określane za pomocą pełnokresowego korelacyjnego algorytmu Fouriera. Do badania właściwości algorytmu użyty będzie następujący sygnał testowy

$$y(k) = \sin(0,98ak) + v(k),$$

gdzie $v(k)$ jest pseudolosowym zakłóceniem o amplitudzie 0,05.

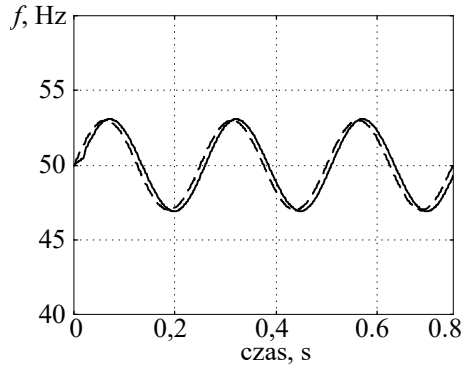
Rezultat estymacji jest pokazany na rys. 4.31 – krzywa przerywana. Widać duże oscylacje w otrzymanym wyniku.



Rys. 4.31. Rezultat estymacji częstotliwości

Jeśli sygnał rozszerzyć do symetrycznego sygnału trójfazowego, to można zastosować algorytm bazujący na składowej zgodnej (4.149). Rezultat pomiaru częstotliwości dla tego przypadku jest pokazany na rys. 4.31 – krzywa ciągła. Tym razem wynik jest stabilny. Niewielkie odchylenia są rezultatem wprowadzonych pseudolosowych zakłóceń.

Jednym z parametrów charakteryzujących właściwości estymatora częstotliwości jest zdolność nadążania za zmieniającą się częstotliwością. Na rys. 4.32 pokazane są krzywe zmieniającej się



Rys. 4.32. Rezultat pomiaru zmieniającej się częstotliwości

częstotliwości sygnału (krzywa przerywana) oraz przebieg estymaty otrzymanej zgodnie z algorytmem, w którym pomiar dokonywany jest w oparciu o składową zgodną. Widać niewielkie opóźnienie w odpowiedzi estymatora. □

Kolejny algorytm można uzyskać rozpatrując ustalony sygnał na wyjściu filtrów ortogonalizacyjnych (4.19). Zakładając, że $\mathcal{G}(\omega) = 0$ (jak w przypadku ortogonalizacji przez opóźnienie) dla wymuszenia w postaci (4.137)

otrzymuje się

$$\begin{aligned} \underline{x}(k) &= x_c(k) + jx_s(k) \\ &= X(A(\omega)\cos((a + \Delta a)k - \varphi + \xi(\omega)) + jB(\omega)\sin((a + \Delta a)k - \varphi + \xi(\omega))), \end{aligned} \quad (4.152)$$

gdzie: $A(\omega), B(\omega), \xi(\omega)$ – charakterystyki częstotliwościowe użytych filtrów (4.20), (4.21).

Składniki (4.152) zapisane dla dwóch kolejnych próbek dają następujące związki rekursywne:

$$\begin{aligned} x_c(k) &= x_c(k-1)\cos(a + \Delta a) - \frac{A(\omega)}{B(\omega)}x_s(k-1)\sin(a + \Delta a), \\ x_s(k) &= x_s(k-1)\cos(a + \Delta a) + \frac{B(\omega)}{A(\omega)}x_c(k-1)\sin(a + \Delta a). \end{aligned} \quad (4.153)$$

Można stąd otrzymać następującą zależność

$$\cos(a + \Delta a) = \frac{x_c(k)x_s(k) + x_c(k-1)x_s(k-1)}{x_c(k)x_s(k-1) + x_c(k-1)x_s(k)}, \quad (4.154)$$

na podstawie której łatwo określić odchyłkę częstotliwości.

Częstotliwość może być także określona ze związków wynikających z definicji algorytmów rekursywnej estymacji składowych symetrycznych. Jeśli wziąć dwie kolejne próbki składowej zgodnej uzyskanej według algorytmu (4.130), to:

$$\frac{x_1(k)}{x_1(k-1)} = e^{j(a+\Delta a)}. \quad (4.155)$$

Argument relacji (4.155) można określić w podobny sposób jak w przypadku algorytmu korelacyjnego ((4.144) lub (4.149)), chociaż tym razem wektor $x_1(k)$ obraca się z częstotliwością $f_0 + \Delta f$. Podobnie, stosując zależność (4.149) można określić kąt $(a + \Delta a)/2$, a następnie częstotliwość

$$f = \frac{a + \Delta a}{2} \frac{Nf_0}{\pi}. \quad (4.156)$$

Widać stąd, że użycie algorytmu korelacyjnego w miejsce filtru w odniesieniu do pomiaru częstotliwości daje te same rezultaty, z tym że uzyskana wartość jest teraz przesunięta o wielkość f_0 (jest to częstotliwość funkcji korelacyjnej). Ponieważ algorytm korelacyjny może być łatwo stosowany w wersji rekursywnej, więc uzyskane w ten sposób metody pomiaru częstotliwości są zazwyczaj prostsze niż przy zastosowaniu filtracji. Do estymacji składowych ortogonalnych w powyższych procedurach można także z powodzeniem stosować obserwator stanu.

4.7.2 Zastosowanie algorytmu MNK

Podstawą wykorzystania liniowego algorytmu MNK do estymacji częstotliwości sygnału jest utworzenie modelu sygnałowego w postaci wyrazów rozkładu funkcji sinusoidalnej w szereg Taylora [7], [29]. Model sygnału ciągłego może być zapisany w następującej postaci:

$$y(t) = X \cos(2\pi ft - \varphi) = X_c \cos(2\pi ft) + X_s \sin(2\pi ft), \quad (4.157)$$

gdzie: $X_c = X \cos \varphi$, $X_s = X \sin \varphi$.

Zastępując funkcje kosinus i sinus w (4.157) przez pierwsze trzy wyrazy ich rozkładu w szereg Taylora w otoczeniu znamionowej częstotliwości f_0 dla czasu t_l otrzymuje się

$$y(t_l) = X_c \left(\cos(2\pi f_0 t_l) - 2\pi \Delta f t_l \sin(2\pi f_0 t_l) - 2(\pi t_l)^2 (\Delta f)^2 \cos(2\pi f_0 t_l) \right) + X_s \left(\sin(2\pi f_0 t_l) + 2\pi \Delta f t_l \cos(2\pi f_0 t_l) - 2(\pi t_l)^2 (\Delta f)^2 \sin(2\pi f_0 t_l) \right), \quad (4.158)$$

gdzie: $\Delta f = f - f_0$, co może być przedstawione w następującej formie

$$y_l = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 + a_{16}x_6, \quad (4.159)$$

gdzie: $a_{11} = \cos(al)$, $a_{12} = -\frac{al}{f_0} \sin(al)$,

$$a_{13} = \sin(al), \quad a_{14} = \frac{al}{f_0} \cos(al), \quad a_{15} = \frac{-1}{2} \left(\frac{al}{f_0} \right)^2 \cos(al),$$

$$a_{16} = \frac{-1}{2} \left(\frac{al}{f_0} \right)^2 \sin(al)$$

oraz $x_1 = X_c$, $x_2 = X_c \Delta f$, $x_3 = X_s$, $x_4 = X_s \Delta f$, $x_5 = X_c (\Delta f)^2$,
 $x_6 = X_s (\Delta f)^2$,

przy czym, $a = 2\pi f_0 T = \frac{2\pi}{N}$, T - okres próbkowania, $t_l = Tl$.

Należy zauważyć, że współczynniki a_{ij} są określone z pomiarów i nie zależą od częstotliwości. Powtórzenie zależności (4.159) dla M kolejnych próbek $l = 1, 2, \dots, M$, $M > 6$, prowadzi do układu równań, które wygodnie jest przedstawić w postaci macierzowej

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y}, \quad (4.160)$$

gdzie: $\mathbf{A} = \{a_{l,i}\}$ - macierz $M \times 6$, $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_6]^T$ - wektor niewiadomych,

$\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_M]^T$ - wektor pomiarów.

Równanie regresji (4.160) może być rozwiązane metodą pseudoinwersji macierzy \mathbf{A} (porównaj MNK)

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{y}. \quad (4.161)$$

Wektor \mathbf{x} zawiera w tym przypadku trzy niewiadome: amplitudę sygnału X , jego fazę φ oraz odchyłkę częstotliwości Δf . Ta ostatnia wielkość może być wyodrębniona przez użycie jednej z następujących relacji:

$$\Delta f = \frac{x_2}{x_1} = \frac{X_c \Delta f}{X_c}, \quad (4.162)$$

$$\Delta f = \frac{x_4}{x_3} = \frac{X_s \Delta f}{X_s}. \quad (4.163)$$

Ponieważ wielkości x_1 oraz x_3 zmieniają się w czasie, więc do określenia poszukiwanego odchylenia częstotliwości Δf należy wybrać tę relację, w której mianownik ma, w danej chwili, większy moduł. Z wielkościami tymi są bezpośrednio związane składowe ortogonalne sygnału.

Można zauważyć, że zależność (4.161) przedstawia grupę filtrów SOI (w tym przypadku trzy filtry), których współczynniki są określone przez wiersze macierzy $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$. Charakterystyka częstotliwościowa przedstawionej metody może być analizowana przez badanie właściwości tych właśnie filtrów [7].

4.7.3 Wykorzystanie charakterystyki częstotliwościowej estymatorów amplitudy

Estymator amplitudy (4.26) ma charakterystykę częstotliwościową określoną przez równanie (4.31). W stanie ustalonym zachodzi więc następująca relacja

$$\frac{x_s(k)x_c(k-m) - x_c(k)x_s(k-m)}{\sin(\omega_0 am)} = \frac{A(\omega')B(\omega')\sin(\omega' am)}{\sin(\omega_0 am)}. \quad (4.164)$$

W celu określenia nieznannej wartości $\omega' a = a + \Delta a$, powyższe równanie może być zapisane dla dwóch różnych wartości opóźnienia m_1 oraz m_2 . Dzieląc obie strony uzyskanych wyrażeń otrzymuje się

$$\frac{x_s(k)x_c(k-m_1) - x_c(k)x_s(k-m_1)}{x_s(k)x_c(k-m_2) - x_c(k)x_s(k-m_2)} = \frac{\sin((a + \Delta a)m_1)}{\sin((a + \Delta a)m_2)}, \quad (4.165)$$

co dla $m_2 = 2m_1$ prowadzi do następującej zależności

$$\cos((a + \Delta a)m_1) = \frac{1}{2} \frac{x_s(k)x_c(k-m_2) - x_c(k)x_s(k-m_2)}{x_s(k)x_c(k-m_1) - x_c(k)x_s(k-m_1)}. \quad (4.166)$$

Powyższe wyrażenie może być stosowane w przypadku, gdy składowe ortogonalne zostały określone w wyniku zastosowania algorytmu filtracyjnego. Użycie metody korelacyjnej (na przykład DPF) prowadzi do nieco bardziej skomplikowanej formuły. Przez odpowiednie podstawienie rzeczywistej i urojonej części zgodnie z (4.23) do równania (4.164), otrzymuje się (dla $m_2 = 2m_1$)

$$\cos((a + \Delta a)m_1) = \frac{1}{2} \frac{p(m_2) \cos(am_2) - q(m_2) \sin(am_2)}{p(m_1) \cos(am_1) - q(m_1) \sin(am_1)}, \quad (4.167)$$

gdzie:

$$p(m) = X_s(k)X_c(k-m) - X_c(k)X_s(k-m),$$

$$q(m) = X_c(k)X_c(k-m) + X_s(k)X_s(k-m).$$

Widać, że współczynniki związane z funkcjami sinus/kosinus w (4.167) są stałe. Istnieje wiele modyfikacji powyższej metody [20], [32].

Wracając do estymatora (4.26) można zauważyć, że dzięki braku zależności charakterystyki częstotliwościowej od chwilowej fazy sygnału, można łatwo korygować wzmocnienie filtra ze zmianą częstotliwości. Problem ten jest omówiony w następnym rozdziale.

4.7.4 Metody wykorzystujące model Prony'ego

Zaproponowany w końcu osiemnastego wieku przez francuskiego matematyka de Prony'ego sposób reprezentacji przebiegu $y(t)$ obserwowanego w wybranych chwilach polega na jego aproksymacji za pomocą sumy funkcji sinusoidalnych o określonych amplitudach i częstotliwościach. W ogólnym przypadku, zespolony sygnał dyskretny $\underline{y}(k)$ obserwowany w oknie o szerokości M próbek może być aproksymowany za pomocą następującej funkcji:

$$\underline{x}(k) = \sum_{i=1}^p \underline{A}_i e^{s_i k}, \quad k = 0, 1, \dots, M-1, \quad (4.168)$$

gdzie: $\underline{A}_i = A_i + jB_i$ jest zespoloną amplitudą, natomiast $s_i = \sigma_i + j\omega_i$ jest zespoloną częstotliwością i -tej składowej sygnału.

Reprezentacja sygnału w postaci zależności (4.168) nazywa się *modelem Prony'ego*. Jego identyfikacja polega na określeniu zespolonej amplitudy \underline{A}_i oraz częstotliwości s_i poszczególnych składników $i = 1, 2, \dots, p$. Można zauważyć, że model (4.168) jest nieliniowy względem tych właśnie parametrów. Problem ich estymacji w takim przypadku można rozwiązać stosując nieliniową metodę najmniejszych kwadratów w wersji nierekursywnej (p. 3.4.4) lub rekursywnej (p. 3.4.5), czy też rozszerzony filtr Kalmana (p. 3.6.2). Związane to jest jednak ze znacznym kosztem obliczeniowym (metody iteracyjne), a w przypadku dużego rozmiaru modelu mogą wystąpić kłopoty ze stabilnością rozwiązania.

Zasługą Prony'ego jest zaproponowanie sposobu rozdzielania poszukiwanych parametrów w modelu (4.168), który umożliwi kolejne (a nie jednocześnie) obliczenie tych wielkości. Podany poniżej szkic wyprowadzenia odpowiednich zależności jest zgodny z zapisem przyjętym we współczesnej literaturze [19], [18].

Na wstępie zakłada się, że obserwowany sygnał $\underline{y}(k)$ nie jest zakłócony, a zatem poszukiwane są takie parametry modelu (4.168), dla których $\underline{x}(k) = \underline{y}(k)$. Przekształcenie \cancel{r} równania (4.168) prowadzi do

$$X(z) = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{i=1}^p A_i e^{s_i k} z^{-k}. \quad (4.169)$$

Zakłada się przy tym, że sygnał $\underline{x}(k)$ jest równy zero poza oknem obserwacji o szerokości M próbek.

W równaniu (4.169) można zmienić kolejność sumowania, co daje następującą zależność

$$X(z) = \sum_{i=1}^p A_i \sum_{k=0}^{M-1} e^{s_i k} z^{-k}. \quad (4.170)$$

Wyrażenie objęte wewnętrznym znakiem sumowania przedstawia sumę szeregu geometrycznego, którą można zastąpić znaną zależnością. Użytkuje się w ten sposób następującą postać transformaty (4.169):

$$X(z) = \sum_{i=1}^p A_i \frac{1 - e^{s_i M} z^{-M}}{1 - e^{s_i} z^{-1}}. \quad (4.171)$$

Po wykonaniu sumowania, wyrażenie (4.171) można sprowadzić do postaci następującego ułamka wymiernego:

$$X(z) = \frac{C(z)}{B(z)} = \frac{\sum_{i=1}^p \left(A_i \left(1 - e^{s_i M} z^{-M} \right) \prod_{j=1, j \neq i}^p \left(1 - e^{s_j} z^{-1} \right) \right)}{\prod_{i=1}^p \left(1 - e^{s_i} z^{-1} \right)}. \quad (4.172)$$

Powyższe równanie można rozpatrywać jako opis filtru cyfrowego o transmitancji $B(z)$, w którym $X(z)$ jest transformatą sygnału wejściowego, a $C(z)$ - sygnału wyjściowego:

$$C(z) = X(z)B(z). \quad (4.173)$$

Jest to filtr SOI, którego funkcja impulsowa może być określona bezpośrednio z (4.172)

$$B(z) = \prod_{i=1}^p (1 - e^{s_i} z^{-1}) = \sum_{j=0}^p \underline{b}_j z^{-j}, \quad \underline{b}_0 = 1. \quad (4.174)$$

Podobnie może być określona transformata sygnału wyjściowego

$$C(z) = \sum_{i=1}^p \left(\underline{A}_i (1 - e^{s_i M} z^{-M}) \prod_{j=1, j \neq i}^p (1 - e^{s_j} z^{-1}) \right) = \sum_{i=0}^{p-1} \underline{c}_i z^{-i} + \sum_{i=0}^{p-1} \underline{c}_{M+i} z^{-(M+i)}. \quad (4.175)$$

Jest ona zatem reprezentowana wielomianem stopnia $M + p - 1$, w którym współczynniki $\underline{c}_p = \underline{c}_{p+1} = \dots = \underline{c}_{M-1} = 0$.

Związek (4.173) można zapisać w dziedzinie czasu w postaci następującego równania filtru SOI

$$\underline{c}_k = \sum_{i=0}^p \underline{x}(k-i) \underline{b}_i, \quad k = 0, 1, \dots, M + p - 1. \quad (4.176)$$

Do określenia współczynników \underline{b}_i , $i = 1, 2, \dots, p$ ($b_0 = 1$) tego filtru można wykorzystać fakt, że na podstawie (4.175), część próbek sygnału wyjściowego jest równa zero: $\underline{c}_k = 0$, $k = p, p+1, \dots, M-1$. Dla tych właśnie próbek zależność (4.176) prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{bmatrix} \underline{x}(p) & \underline{x}(p-1) & \dots & \underline{x}(0) \\ \underline{x}(p+1) & \underline{x}(p) & \dots & \underline{x}(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{x}(M-1) & \underline{x}(M-2) & \dots & \underline{x}(M-p-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{b}_0 \\ \underline{b}_1 \\ \vdots \\ \underline{b}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.177)$$

Ponieważ $\underline{b}_0 = 1$, więc pierwsza kolumna macierzy utworzonej z próbek sygnału $\underline{x}(k)$ może być przeniesiona na prawą stronę równania (4.177). Po tej redukcji otrzymuje się następujące równanie

$$\mathbf{X} \mathbf{b} = -\mathbf{x}_1, \quad (4.178)$$

gdzie:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \underline{x}(p-1) & \underline{x}(p-2) & \dots & \underline{x}(0) \\ \underline{x}(p) & \underline{x}(p-1) & \dots & \underline{x}(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{x}(M-2) & \underline{x}(M-3) & \dots & \underline{x}(M-p-1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 \\ \vdots \\ \underline{b}_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \underline{x}(p) \\ \underline{x}(p+1) \\ \vdots \\ \underline{x}(M-1) \end{bmatrix}.$$

Jeśli, jak założono, sygnał $\underline{y}(k)$ nie jest zakłócony, to do wyznaczenia wektora \mathbf{b} wystarczy, aby macierz \mathbf{X} była kwadratowa. Do określenia p elementów wektora \mathbf{b} należy zatem wykonać $M = 2p$ pomiarów obserwowanego sygnału. Jeśli przyjąć, że sygnał $\underline{y}(k)$ jest zakłócony, to w modelu (4.168) należy uwzględnić błędy pomiarowe: $\underline{y}(k) = \underline{x}(k) + \underline{v}(k)$, $\underline{v}(k)$ – model błędów i wówczas do rozwiązania (4.178) należy wykonać $M > 2p$ pomiarów. Do określenia wektora \mathbf{b} można w tym przypadku zastosować algorytm MNK. Gdy estymacja jest prowadzona na podstawie ostatnich M próbek sygnału $\underline{y}(i)$, $i = k, k-1, \dots, k-M+1$, to odpowiednie równanie przyjmie następującą postać (próbki sygnału $\underline{x}(k)$ zostają teraz zastąpione przez próbki sygnału $\underline{y}(k)$):

$$\mathbf{b} = [\mathbf{Y}^T(k)\mathbf{Y}(k)]^{-1} \mathbf{Y}^T(k)^T \mathbf{w}(k), \quad (4.179)$$

gdzie: j -ty wiersz macierzy $\mathbf{Y}(k)$, $j = 1, 2, \dots, L$, $L \geq p$, ma następującą formę:

$$\mathbf{y}_j(k) = [\underline{y}(k-j) \quad \underline{y}(k-j-1) \quad \dots \quad \underline{y}(k-p-j+2) \quad \underline{y}(k-p-j+1)] ,$$

$$\text{natomiast } \mathbf{w}(k) = [-\underline{y}(k) \quad -\underline{y}(k-1) \quad \dots \quad -\underline{y}(k-L+1)]^T .$$

Poszukiwane częstotliwości mogą być wyznaczone na podstawie miejsc zerowych transmitancji $B(z)$ (4.174). Zgodnie z (4.178), równanie (4.174) można zapisać następująco:

$$B(z) = \sum_{j=0}^p \underline{b}_j z^{-j} = 1 + \sum_{j=1}^p \underline{b}_j z^{-j} . \quad (4.180)$$

Do określenia miejsc zerowych wielomianu $B(z)$ można wykorzystać przekształconą postać równania (4.174)

$$\prod_{i=1}^p (z - e^{s_i}) = z^p + \underline{b}_1 z^{p-1} + \dots + \underline{b}_{p-1} z + \underline{b}_p = 0 . \quad (4.181)$$

Pierwiastki z_i , $i = 1, 2, \dots, p$ są związane z poszukiwanymi częstotliwościami składowych sygnału $\underline{y}(k)$ następującą zależnością

$$z_i = e^{s_i}, \quad i = 1, 2, \dots, p . \quad (4.182)$$

Po wyznaczeniu powyższych wielkości można również wyznaczyć poszukiwane amplitudy zespolone bezpośrednio z (4.168).

Na podstawie przedstawionego sposobu aproksymacji sygnału powstało wiele szczegółowych metod określania częstotliwości sygnału [17], [18]. Na przykład, jeśli założyć, że obserwowany sygnał nie jest tłumiony ($\sigma_i = 0$), to ten sam zbiór danych wejściowych można wykorzystać dwukrotnie (w prostej i odwrotnej kolejności) [19].

W przypadku zastosowań w automatyce elektroenergetycznej, najczęściej pomiarowo dostępna jest jedynie składowa rzeczywista modelu (4.168). Zakładając, że sygnał zawiera tylko składowe oscylacyjne nietłumione ($\sigma_i = 0, i = 1, 2, \dots, p$) otrzymuje się:

$$x(k) = \operatorname{Re}\{\underline{x}(k)\} = A_1 \cos(\omega' ak) - B_1 \sin(\omega' ak) + A_2 \cos(2\omega' ak) - B_2 \sin(2\omega' ak) + \dots + A_p \cos(p\omega' ak) - B_p \sin(p\omega' ak), \quad (4.183)$$

gdzie: $\omega' = \omega / \omega_1, a = 2\pi / N, N$ – liczba próbek w okresie podstawowej harmonicznej o pulsacji ω_1 .

W modelu (4.183) należy określić częstotliwość względną ω' oraz amplitudy $A_i, B_i, i = 1, 2, \dots, p$. Również i w tym przypadku jest to zadanie nieliniowe względem poszukiwanych parametrów. W celu wykorzystania wyników uzyskanych dla modelu zespolonego, sygnał (4.183) należy przedstawić w postaci sumy dwóch sygnałów zespolonych wzajemnie sprzężonych:

$$x(k) = \frac{1}{2}(\underline{x}(k) + \underline{x}^*(k)) = \underline{x}_1(k) + \underline{x}_2(k), \quad (4.184)$$

gdzie:

$$\underline{x}(k) = \sum_{i=1}^p A_i e^{j\omega' i a k}, \quad \underline{x}^*(k) = \sum_{i=1}^p A_i^* e^{-j\omega' i a k}, \quad (4.185)$$

* oznacza operację sprzężenia.

Zastosowanie przekształcenia \mathcal{Z} w odniesieniu do równania (4.184) prowadzi do:

$$X(z) = X_1(z) + X_2(z) = \frac{C(z)}{B(z)}, \quad (4.186)$$

gdzie: na podstawie (4.172):

$$X_1(z) = \frac{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \left(\frac{A_i \left(1 - e^{j\omega' a M} z^{-M} \right) \prod_{l=1, l \neq i}^p \left(1 - e^{j\omega' a l} z^{-1} \right) \right)}{\prod_{i=1}^p \left(1 - e^{j\omega' a i} z^{-1} \right)}, \quad (4.187)$$

$$X_2(z) = \frac{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \left(\frac{A_i^* \left(1 - e^{-j\omega' a M} z^{-M} \right) \prod_{l=1, l \neq i}^p \left(1 - e^{-j\omega' a l} z^{-1} \right) \right)}{\prod_{i=1}^p \left(1 - e^{-j\omega' a i} z^{-1} \right)}. \quad (4.188)$$

Transmitancja $B(z)$ jest zatem określona następująco:

$$B(z) = \prod_{i=1}^p \left(1 - e^{j\omega' a i} z^{-1} \right) \left(1 - e^{-j\omega' a i} z^{-1} \right) = \sum_{i=0}^{2p} b_i z^{-i}, \quad (4.189)$$

przy czym, $b_0 = b_{2p} = 1$.

Można zauważyć, że wszystkie pierwiastki są rozmieszczone na okręgu jednostkowym, a ponadto, jeśli z_i jest pierwiastkiem, to również $1/z_i$, $-z_i$ oraz $-1/z_i$ także są miejscami zerowymi (4.189). Można sprawdzić, że dzięki tej właściwości współczynniki b_i są symetryczne względem wartości b_p :

$$b_{p-m} = b_{p+m}, \quad m = 1, 2, \dots, p. \quad (4.190)$$

Korzystając z powyższej symetrii można zapisać transmitancję (4.189) w następującej formie

$$B(z) = \sum_{i=0}^p b_i \left(z^{-i} + z^{-(2p-i)} \right). \quad (4.191)$$

Zgodnie z (4.186) $B(z)$ jest transmitancją filtra SOI o współczynnikach b_i , $i = 1, 2, \dots, p$. Postępując podobnie, jak w modelu sygnału zespolonego: (4.174)-(4.177), można napisać równania przetwarzania filtra dla $M = 2p$ próbek sygnału wejściowego w przypadku, gdy jego wyjścia są zerowe: $c_k = 0$, $k = p, p+1, \dots, M-1$

$$\begin{bmatrix} x(0) + x(2p) & x(1) + x(2p-1) & \cdots & 2x(p) \\ x(1) + x(2p+1) & x(2) + x(2p) & \cdots & 2x(p+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(M-1) + x(2p+M-1) & x(M-2) + x(2p+M-2) & \cdots & 2x(p+M-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.192)$$

Ponieważ $b_0 = 1$, więc pierwsza kolumna macierzy utworzonej z próbek sygnału $x(k)$ może być przeniesiona na prawą stronę równania (4.192). Po tej redukcji otrzymuje się równanie jak (4.178), przy czym wszystkie elementy macierzy \mathbf{X} oraz wektora prawej strony \mathbf{x}_1 są utworzone odpowiednio z sumy dwóch próbek sygnału $x(k)$.

Jeśli założyć, że obserwowany sygnał jest zakłócony, to do estymacji wektora współczynników \mathbf{b} (4.178) należy wykonać $M > 2p$ pomiarów. Ostateczna formuła MNK ma postać (4.179), przy czym, j -ty wiersz macierzy $\mathbf{Y}(k)$, $j = 1, 2, \dots, L$, $L \geq p$, jest określony następująco:

$$\mathbf{y}_j(k) = [y(k-j) + y(k-2p-j+2) \quad y(k-j-1) + y(k-2p-j+3) \quad \dots \quad y(k-p-j+2) + y(k-2p-j+p) \quad 2y(k-p-j+1)]', \quad (4.193)$$

natomiast wektor $\mathbf{w}(k)$

$$\mathbf{w}(k) = -[y(k) + y(k-2p) \quad y(k-1) + y(k-2p-1) \quad \dots \quad y(k-M+1) + y(k-2p-M+1)]^T. \quad (4.194)$$

Poszukiwane częstotliwości składowych sygnału (4.183) mogą być wyznaczone na podstawie miejsc zerowych transmitancji $B(z)$ (4.191). W celu uproszczenia zapisu można korzystać z postaci widmowej tej transmitancji. Po podstawieniu: $z = e^{j\omega a}$ do (4.191) otrzymuje się:

$$B(j\omega) = e^{-j\omega'ap} \sum_{i=0}^p b_i (e^{-j\omega'a(i-p)} + e^{j\omega'a(i-p)}) = 2e^{-j\omega'ap} \sum_{i=0}^p b_i \cos \omega'a(p-i). \quad (4.195)$$

Uzyskuje się zatem następujący warunek wiążący współczynniki wektora \mathbf{b} (4.179) z poszukiwanymi częstotliwościami:

$$f(\omega) = \cos(p\omega'a) + b_1 \cos((p-1)\omega'a) + \dots + b_{p-1} \cos(\omega'a) + b_p = 0. \quad (4.196)$$

Przez podstawienie: $g = \cos(\omega'a)$ powyższa funkcja może być przedstawiona w postaci wielomianu $\phi(g)$ p -tego stopnia

$$\phi(g) = d_0 g^p + d_1 g^{p-1} + \dots + d_{p-1} g + d_p = 0, \quad (4.197)$$

gdzie: współczynniki d_i , $i = 0, 1, \dots, p$ zależą od wartości wyrazów wektora \mathbf{b} w (4.196).

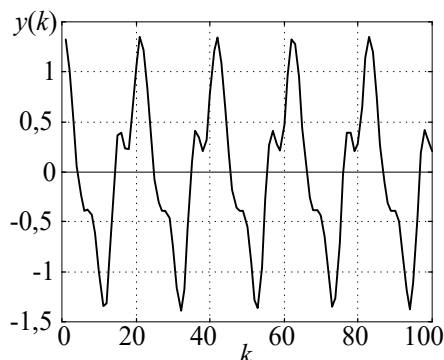
Rozpatrywany jest tu przypadek, gdy zadaniem estymacji częstotliwości jest określenie pulsacji podstawowej harmonicznej sygnału. Wówczas, spośród p pierwiastków wielomianu $\phi(g)$, należy określić tylko jeden: g_1 . W tym celu można zastosować jedną ze znanych iteracyjnych metod rozwiązywania tego typu zagadnień [31]. Należy zauważyć, że przy poprawnie postawionym zadaniu (rzęd modelu jest dostosowany do sygnału, poprawnie dobrany jest analogowy filtr odcinający, liczba próbek M w oknie pomiarowym jest także prawidłowa), wszystkie pierwiastki równania (4.197) są rzeczywiste. Ponadto, $\cos(\omega'_g a) < g_1 < \cos(\omega'_d a)$, gdzie ω'_d, ω'_g – graniczne wartości (odpowiednio dola i górna) spodziewanych zmian względnej częstotliwości składowej podstawowej. Problemy te ilustruje poniższy przykład.

Przykład 4.4. Zaprojektować algorytm określania częstotliwości składowej podstawowej sygnału elektrycznego określonego następującym modelem:

$$y(k) = A_1 \cos(\omega' ak + \varphi_1) + A_3 \cos(3\omega' ak + \varphi_3) + A_4 \cos(4\omega' ak + \varphi_4) + v(k)$$

gdzie $v(k)$ reprezentuje zakłócenie; $a = 2\pi/N$, $N = 20$ próbek w okresie podstawowej harmonicznej o pulsacji $\omega_1 = 100\pi$.

Widać, że sygnał ma trzy składowe harmoniczne oraz szum. Do dalszych rozważań przyjmuje się następujące parametry sygnału $y(k)$: $\omega' = \omega/\omega_1 = 0,97$, $A_1 = 1$, $\varphi_1 = 0$, $A_3 = 0,4$, $\varphi_3 = -\pi/3$, $A_4 = 0,1$, $\varphi_4 = -\pi/5$, $v(k)$ - szum pseudolosowy o amplitudzie -30dB. Przebieg tego sygnału jest pokazany na rys. 4.33.



Rys. 4.33. Przebieg analizowanego sygnału

Do określenia poszukiwanej częstotliwości należy określić miejsca zerowe funkcji (4.196), przy czym współczynniki b_1, b_2, \dots, b_p można określić zgodnie z (4.178). Zakłada się model sygnałowy estymatora o postaci (4.183) z czterema harmonicznymi, a zatem, w równaniu (4.196) $p = 3$. Odpowiednie elementy równania (4.178) z uwzględnieniem (4.192)-4.194) przyjmują następującą formę:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x(1) + x(2p-1) & x(2) + x(2p-2) & \cdots & 2x(p+1) \\ x(2) + x(2p) & x(3) + x(2p-1) & \cdots & 2x(p+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(M-2) + x(2p+M-2) & x(M-3) + x(2p+M-3) & \cdots & 2x(p+M-1) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x(0) + x(2p) \\ x(1) + x(2p+1) \\ \vdots \\ x(M-1) + x(2p+M-1) \end{bmatrix}, \quad \text{przy czym, } x(k) = y(k).$$

Zakłada się, że wszystkie próbki obserwowanego sygnału w algorytmie MNK (4.178) mieszczą się w oknie o szerokości $2N$ próbek, co daje wartość $M = 2N - 2p$.

Funkcję (4.196) można przedstawić w postaci wielomianu p -tego stopnia przez podstawienie: $z = \cos(\omega' a)$. Inny sposób polega na reprezentacji funkcji $\cos(gx)$ w postaci szeregu wykładniczego:

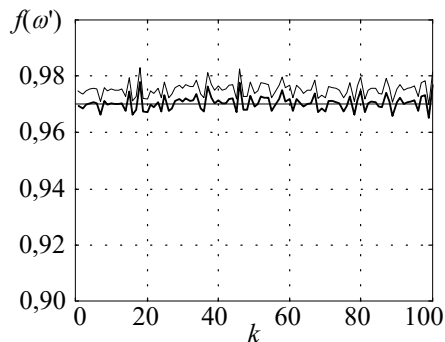
$$\cos(gx) = 1 - \frac{(gx)^2}{2!} + \frac{(gx)^4}{4!} - \dots$$

Ponieważ kolejne współczynniki tego szeregu szybko maleją, więc stosowanie takiego podstawienia w (4.196) jest korzystne zwłaszcza przy dużym rzędzie modelu sygnałowego. Ponadto, zmienna w takim podstawieniu bezpośrednio reprezentuje poszukiwaną częstotliwość.

Stosując powyższe podstawienie w (4.196) otrzymuje się następujący wielomian:

$$f(\omega') = c_0 - c_2(\omega' a)^2 + c_4(\omega' a)^4 - c_6(\omega' a)^6 + \dots,$$

gdzie:



Rys. 4.34. Rezultat pomiaru częstotliwości; linią kreskowaną pokazano wynik pomiaru dla trzech wyrazów rozkładu funkcji kosinus w szereg wykładniczy

$$c_0 = 1 + b_1 + b_2 + \dots + b_p,$$

$$c_k = (p^k + b_1(p-1)^k + \dots + b_p) / k!,$$

$$k = 2, 4, \dots$$

Miejsca zerowe funkcji $f(\omega')$ można łatwo określić za pomocą metody Newtona [31]. Początkowe przybliżenie można dosyć dobrze oszacować na podstawie dwóch pierwszych wyrazów wielomianu

$$f(\omega'): \left((\omega' a)^2 \right)_0 = c_0 / c_2.$$

Rezultat estymacji częstotliwości składowej podstawowej rozpatrywanego sygnału jest pokazany na rys. 4.34. W algorytmie przyjęto pięć wyrazów rozkładu funkcji

kosinus w szereg wykładniczy. Analiza wykazała, że zwiększenie tej liczby nie prowadzi do poprawy wyniku estymacji. Na rysunku pokazany jest także rezultat dla przypadku, gdy przyjęte zostały tylko trzy pierwsze wyrazy tego rozkładu. Należy podkreślić, że większą dokładność i stabilność pomiaru można uzyskać przez zwiększenie liczby próbek w oknie pomiarowym M lub przez wstępną filtrację sygnału. □

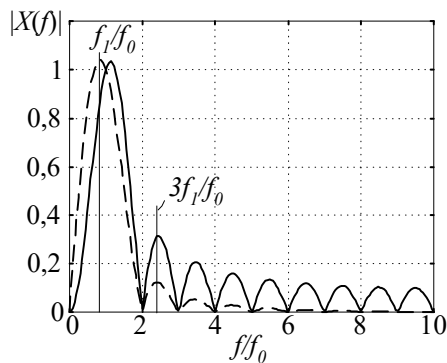
4.7.5 Metody adaptacyjne

Do estymacji częstotliwości korzysta się zazwyczaj z reprezentacji sygnału w postaci zespolonej. Stąd też właściwości poszczególnych metod w dużej mierze zależą od rodzaju zastosowanych algorytmów określania składowych ortogonalnych. Obserwowany sygnał tylko w dużym przybliżeniu może być reprezentowany w postaci funkcji sinusoidalnej. Zawiera on zakłócenia w postaci szumów oraz składowych harmonicznych. Te właśnie składowe zakłócające mogą znacznie odkształcać pomiar. Można to pokazać na przykładzie algorytmu (4.166), w którym, do określania składowych ortogonalnych, używa się pełnookresowej metody Fouriera. Obserwowany sygnał o następującej formie:

$$v(t) = \cos 2\pi f'_0 t + 0,1 \cos 6\pi f'_0 t - \varphi, \quad (4.198)$$

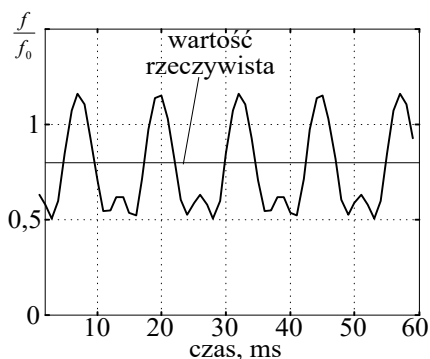
gdzie: f_0 – wartość znamionowa częstotliwości składowej podstawowej, f' – częstotliwość względna $f' = f/f_0$,

jest równomiernie próbkowany N razy w okresie podstawowej harmonicznej. Charakterystyki częstotliwościowe estymatorów składowych ortogonalnych są pokazane na rys. 4.35, gdzie zaznaczono miejsca położenia sygnałów odpowiadających pierwszej i trzeciej harmonicznej zgodnie z



Rys. 4.35. Położenie składowych harmonicznych pierwszej i trzeciej sygnału o częstotliwości 0,8 wartości znamionowej na tle częstotliwościowych charakterystyk estymatorów składowych ortogonalnych; $N=20$.

(4.198) dla $f' = 0,8$. Można zauważyć, że trzecia harmoniczna nie jest całkowicie tłumiona, co miałoby miejsce przy braku odchyłki częstotliwości. Ustalona odpowiedź estymatora (4.166) na wymuszenie (4.198) jest pokazana na rys. 4.36. Można



Rys. 4.36. Estymata częstotliwości sygnału zawierającego 10% trzeciej harmonicznej; $N=20$, $f_0 = 50$ Hz.

zauważyć, że nawet nieduża amplituda zakłócenia powoduje, w tym przypadku, duże błędy estymacji częstotliwości.

Tego typu błędy mogą być zredukowane przez podjęcie jednego z następujących działań:

- rozszerzenie modelu sygnałowego tak, aby bardziej dokładnie odwzorowywał obserwowany sygnał,
- odpowiednia adaptacja charakterystyki filtrów ortogonalizujących do aktualnej częstotliwości sygnału.

Pierwsza propozycja może być łatwo zrealizowana przez zastosowa-

nie algorytmu NLS [13], [36] (patrz p. 3.4.4) lub rozszerzonego filtru Kalmana (p. 3.6.2) [6]. Stosowanie algorytmów nieliniowych może jednak rodzić problemy z ich stabilnością, szczególnie gdy początkowe rozwiązanie przyjęto daleko od rzeczywistej wartości częstotliwości. W tym zakresie lepszym podejściem wydaje się zastosowanie przedstawionego w poprzednim punkcie modelu Prony'ego.

Drugie podejście polega na wprowadzeniu mechanizmu adaptacji stosowanych filtrów do aktualnej częstotliwości. Można to zrealizować według jednej z następujących metod:

- (I) Stosowanie zmiennej długości okna pomiarowego tak, że długość okna jest zawsze związana z okresem podstawowej harmonicznej obserwowanego sygnału. Zazwyczaj jest tu potrzebna odpowiednia korekcja, gdyż długość okna jest mierzona całkowitą liczbą próbek, co nie zawsze odpowiada okresowi sygnału [8].
- (II) Stosowanie zmiennej częstotliwości próbkowania, co zapewnia utrzymanie tej samej liczby próbek w oknie pomiarowym pomimo zmiany jego długości (w związku ze zmianą okresu składowej podstawowej) [2], [3]. To podejście może być trudne do zaakceptowania gdy próbkowane sygnały są stosowane również przez inne algorytmy.
- (III) Dostosowanie współczynników filtrów ortogonalizujących do aktualnej częstotliwości, przy zachowaniu stałej długości okna pomiarowego [30], [33]. Współczynniki zaprojektowanych wcześniej filtrów, dla różnych częstotliwości z wybranego przedziału, są przechowywane w pamięci komputera. Do obliczeń wybierana

jest para filtrów ortogonalizujących, których wzmocnienie jednostkowe przypada najbliższej aktualnej częstotliwości. Metoda jest w bardzo dużym stopniu odporna na zakłócenia, jednak wymaga stosunkowo dużo pamięci na przechowywanie współczynników całej rodziny filtrów. Ponieważ filtry te pokrywają zadany obszar częstotliwości z określonym krokiem jej przyrostu, więc ostateczny efekt może być uzyskany przez dokonanie dodatkowej korekcji w trakcie pomiarów.

- (IV) Stosowanie stałej częstotliwości próbkowania z programową zmianą skali czasowej na zasadzie aproksymacji (ang. *software resampling*). W dalszych etapach stosuje się algorytmy jak w (II) [14].

Wybór określonej metody zależy od wymaganej dokładności pomiaru częstotliwości, dostępnego sprzętu oraz potrzeby dostosowania metody do innych algorytmów pomiarowych.

4.8 Podsumowanie

W tym rozdziale przedstawione zostały algorytmy pomiaru podstawowych wielkości elektrycznych, które są stosowane do oceny stanu systemu elektroenergetycznego lub chronionego obiektu. Ocena tych algorytmów może być dokonana na podstawie ich właściwości widmowych lub dynamicznych.

Podstawowe algorytmy tej grupy bazują na modelu sygnału zespolonego prądu i napięcia, którego parametry uzyskuje się za pomocą nierekursywnych lub rekursywnych procedur dyskretnego przekształcenia Fouriera lub im pokrewnych. Model sygnałowy jest zatem odniesiony do stanu ustalonego procesu, co ogranicza szybkość pomiaru. Trudno jest w takim przypadku uzyskać stabilny wynik w czasie krótszym od jednego okresu składowej podstawowej prądu lub napięcia. Realizacja tych algorytmów może się odbywać według procedury filtracyjnej lub korelacyjnej.

Na bazie tych metod są również tworzone algorytmy cyfrowego pomiaru składowych symetrycznych prądu i napięcia. Pokazana została zasada tworzenia obserwatora stanu do estymacji składowych symetrycznych.

Ważna grupa rozpatrywanych metod jest otrzymywana w wyniku stosowania procedury różniczkowania numerycznego. Model sygnałowy jest w tym przypadku oparty na analizie dynamiki procesu zachodzącego w zwartym obwodzie. W przeciwieństwie do klasycznych metod DPF, te procedury odwzorowują stan przejściowy, a nie stan ustalony procesu.

Możliwe jest wówczas lepsze dopasowanie modelu do występującego stanu przejściowego, co może być istotne wówczas, gdy widmo zakłóceń mieści się blisko składowej podstawowej lub harmonicznym sygnału. Wadą tej metody jest wrażliwość na zakłócenia wysokoczęstotliwościowe. Można to łagodzić przez stosowanie algorytmu MNK z odpowiednio szerokim oknem pomiarowym.

Zaprezentowane zostały także niektóre metody cyfrowego pomiaru częstotliwości w systemie elektroenergetycznym.

4.9 Literatura

- [1] Akke M., Thorp J.T.: *Some improvements in the three-phase differential equation algorithm for fast transmission line protection*. IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 13, No. 1, January 1998, ss. 66-72.
- [2] Benmouyal G.: *An adaptive sampling-interval generator for digital relaying*. IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 4, No. 3, July 1989, ss. 1602-1609.
- [3] Benmouyal G.: *Design of a combined digital global differential and Volt/Hertz relay for step-up transformers*. IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 6, No. 3, July 1991, ss. 1000-1007.
- [4] Bornard P., Bastide J.C.: *A Prototype of Multiprocessor Based Distance Relay*. IEEE Trans. on PAS, Vol. PAS-101, No. 2, February 1982, ss. 491-497.
- [5] Clarke E.: *Circuit analysis of AC power systems*. Vol. 1. Wiley. New York 1943.
- [6] Girgis A.A., Hwang T.L.D.: *Optimal Estimation of Voltage Phasors and Frequency Deviation Using Linear and Non-Linear Kalman Filtering: Theory and Limitations*. IEEE Trans. on PAS, Vol. PAS-103, No 10, October 1984, ss. 2943-2949.
- [7] Giray M.M., Sachdev M.S.: *Off-Nominal Frequency Measurements in Electric Power Systems*. IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 4, No 3, July 1989, ss. 1573-1578.
- [8] Hart D., Novosel D., Hu Y., Smith B., Egolf M.: *A New Frequency Tracking and Phasor Estimation Algorithm for Generator Protection*. IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 12, No. 3, July 1997, ss. 1064-1073.
- [9] Hosemann G., Steigerwald H.M.: *Modal saturation detector for digital differential protection*. IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 8, No 3, July 1993, ss. 933-938.
- [10] Jeyasurya B., Smolinski W.J.: *Identification of a Best Algorithm for Digital Distance Protection of Transmission Lines*. IEEE Trans. on PAS, Vol. PAS-102, No 10, October 1983, ss. 3358-3364.
- [11] Johnes A.T., Salman S.K.: *Digital Protection for Power Systems*. Peter Peregrinus Ltd. IEE Power Series 15. London 1995.

- [12] Kaczorek T.: *Wektory i macierze w automatyce i elektrotechnice*. WNT, Warszawa, 1998.
- [13] Kamwa I., Grondin R.: *Fast Adaptive Scheme for Tracking Voltage Phasor and Local Frequency in Power Transmission and Distribution Systems*. IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 7, No 2, April 1992, ss. 789-795.
- [14] Kasztenny B., Rosołowski E.: *Two new measuring algorithms for generator and transformer relaying*. IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 13, No 4, October 1998, ss. 1053-1059.
- [15] Kudo H., Sasaki H., Seo K., Takahashi M., Yoshida K., Maeda T.: *Implementation of a Digital Distance Relay Using an Interpolated Integral Solution of a Differential Equation*. IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 3, No 4, October 1988, ss. 1475-1481.
- [16] Łobos T.: *Fast Estimation of Symmetrical Components in Real-Time*. IEE Proc. Pt. C, No 1, January 1992, ss. 27-30.
- [17] Łobos T., Rezmer J.: *Real-time determination of power system frequency*. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol. 46, No 4, August 1997, ss. 877-881.
- [18] Mayer J. -U.: *The Prony spectral line estimation (PSLE) method for the analysis of vascular oscillation*. IEEE Transaction on Biomedical Engineering, Vol. 36, No 9, Sept. 1989, ss. 968-971.
- [19] Mitra S.K., Kaiser J.F. (ed.): *Handbook for digital signal processing*. John Wiley & Sons, Inc. New York 1993.
- [20] Moore P.J., Carranza R.D., Johnes A.T.: *Model System Tests on a New Numeric Method of Power System Frequency Measurement*. IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 11, No 2, April 1996, ss. 696-701.
- [21] Phadke A.G., Thorp J.S., Adamiak M.G.: *A New Measurement Technique for Tracking Voltage Phasors, Local System Frequency, and Rate of Change of Frequency*. IEEE Trans. on PAS, Vol. 102, No 5, May 1983, ss. 1025-1033.
- [22] Phadke A.G., Thorp J.S.: *Computer Relaying for Power Systems*, Research Studies Press Ltd. Taunton, Somerset 1994.
- [23] Pytel J.: *Zastosowanie składowych symetrycznych do analizowania stanów nieustalonych* Prace Naukowe Instytutu Energoelektryki Pol. Wr., nr 71, Seria: Monografie, nr 16, Wydawnictwo Pol. Wr. Wrocław 1987.
- [24] Ranjbar A.M., Cory B.J.: *An improvement method for the digital protection of high voltage transmission lines*. IEEE Trans. on PAS, Vol. 94, 1975, ss. 544-550.
- [25] Rosołowski E.: *Analiza algorytmów cyfrowych zabezpieczeń elektroenergetycznych*. Prace Naukowe Instytutu Energoelektryki Pol. Wr. Nr 88, Seria: Monografie, nr 27, Wydawnictwo Pol. Wr. Wrocław 1992.
- [26] Rosołowski E., Michalik M.: *Fast Identification of Symmetrical Components by Use of a State Observer*. IEE Proc.-Gener. Transm. Distrib. Vol. 141, No 6, November 1994, ss. 617-622.
- [27] Rosołowski E.: *Complex Filters Applied in Power System Protection*. Archives of Electrical Engineering, Vol. XLIV, No 2, 1995, ss. 299-314.

- [28] Rosołowski E., Iżykowski J., Kasztenny B., Saha M.M.: *A New Distance Relaying Algorithm Based on Complex Differential Equation for Symmetrical Components*. Electric Power Systems Research, No 40 (1997), ss. 175-180.
- [29] Sachdev M.S., Giray M.M.: *A Least Error Squares Technique for Determining Power System Frequency*. IEEE Trans. on PAS, Vol. 104, No 2, February 1985, ss. 437-443.
- [30] Sidhu T.S., Sachdev M.S.: *An Iterative Technique for Fast and Accurate Measurement of Power System Frequency*. IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 13, No 1, January 1998, ss. 109-115.
- [31] Stoer J., Bulirsch R.: *Wstęp do analizy numerycznej*. PWN. Warszawa 1987.
- [32] Szafran J., Rebizant W.: *Power system frequency estimation*. IEE Proc.-Gener. Transm. Distrib., Vol. 145, No 5, September 1998, ss. 578-582.
- [33] Szafran J., Rebizant W., Michalik M.: *Adaptive estimation of wide range frequency changes for power generator protection and control purposes*. IEE Proc.-Gener. Transm. Distrib., Vol. 146, No 1, January 1999, ss. 31-34.
- [34] Szafran J., Wiszniewski A.: *Algorytmy pomiarowe i decyzyjne cyfrowej automatyki elektroenergetycznej*. WNT. Warszawa 2001.
- [35] Шнеерсон Е.М.: *Дистанционные защиты*. Энергоатомиздат, Москва 1984.
- [36] Terzija V.V., Djuric M.B., Kovacevic B.D.: *Voltage phasor and local system frequency estimation using Newton type algorithm*. IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 9, No 3, January 1994, ss. 1368-1374.
- [37] Thorp J.S., Phadke A.G., Horowitz S.H., Beehler J.E.: *Limits to Impedance Relaying*. IEEE Trans. on PAS, Vol. 98, No 1, January/February 1979, ss. 246-260.
- [38] Ungrad H., Winkler W., Wiszniewski A.: *Protection techniques in electrical energy systems*. Marcel Dekker, Inc. New York 1995.
- [39] Wang L.: *Frequency responses of phasor-based microprocessor relaying algorithms*. IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 14, No 1, January 1999, ss. 98-109.
- [40] Winkler W., Wiszniewski A.: *Automatyka zabezpieczeniowa w systemach elektroenergetycznych*. WNT. Warszawa 1999.
- [41] Wiszniewski A.: *Algorytmy pomiarów cyfrowych w automatyce elektroenergetycznej*. WNT. Warszawa 1990.
- [42] Żydanowicz J.: *Elektroenergetyczna automatyka zabezpieczeniowa*. T. 1-3, WNT, Warszawa 1979-1988.

Rozdział 5

KOMPENSACJA BŁĘDÓW POMIAROWYCH

5.1 Wprowadzenie

Poprawne działanie układów automatyki elektroenergetycznej w dużym stopniu zależy od dokładności pomiaru odpowiednich wielkości kryterialnych. Źródeł błędów pomiarowych można poszukiwać wewnątrz członu pomiarowego, jak również w torze pomiarowym oraz w nadzorowanym obiekcie. W tym rozdziale analizowane są błędy, które są związane z przyjętym algorytmem pomiarowym. Błędy te umownie zostały podzielone na dwie kategorie: błędy ustalone oraz błędy dynamiczne, a przynależność do nich przede wszystkim wynika ze stanu, w jakim znajduje się badany proces oraz pomiar. Można tu wyróżnić trzy sytuacje, w których występuje stan przejściowy pomiaru:

- ustalony pomiar zostaje zakłócony przez zmianę stanu nadzorowanego obiektu;
- pomiar zostaje rozpoczęty w stanie ustalonym procesu;
- pomiar zostaje rozpoczęty po wykryciu stanu przejściowego obiektu.

Błędy dynamiczne powstają w wyniku różnicy pomiędzy założonym modelem sygnałowym obserwowanego procesu a rzeczywistym przebiegiem tego procesu w stanie przejściowym. Źródeł tych błędów należy upatrywać w następujących czynnikach.

- Algorytmy pomiarowe są zazwyczaj określone w odniesieniu do warunków stanu ustalonego procesu, a zatem dynamiczny stan przejściowy nie spełnia tych założeń.
- Cyfrowe algorytmy pomiarowe charakteryzują się określoną pamięcią o obserwowanym procesie, gdyż przetwarzanie informacji odbywa się z wykorzystaniem wielu kolejnych próbek mierzonego sygnału. W tej sytuacji, po zmianie stanu procesu poprawna odpowiedź może nastąpić dopiero po zapełnieniu 'pamięci' algorytmu o zaistniałym zdarzeniu. W stanie przejściowym układ pomiarowy określa mierzoną wielkość na podstawie próbek sygnału z dwóch różnych stanów obiektu.

Jest to charakterystyczna cecha omawianych tu układów automatyki zabezpieczeniowej, które powinny podejmować decyzję właśnie w takich warunkach.

Zachowanie się algorytmów pomiarowych w stanie przejściowym zależy od ich struktury. Z tego punktu widzenia można wyróżnić dwie rodziny metod pomiaru cyfrowego:

- Algorytmy ze stałą długością okna pomiarowego, w których zazwyczaj stosowane są metody filtracji lub korelacji (na przykład, filtry SOI).
- Estymatory, których stan przejściowy nie jest z góry ograniczony do określonego przedziału. Ta grupa algorytmów opiera się zazwyczaj na modelach zmiennych stanu (obserwatory stanu lub filtry Kalmana), filtrach NOI oraz innych procedurach rekursywnych. Błędy przejściowe są nieodłączną cechą takich algorytmów, a ich redukcja jest istotą estymacji. Projektowanie tych algorytmów opiera się na analizie szybkości odpowiedzi i jej cech dynamicznych (przeregulowanie, stabilność odpowiedzi, wrażliwość na zakłócenia).

Inna kategoria rozpatrywanych błędów ma swoje źródło w torze pomiarowym układu automatyki, a w szczególności w przekładnikach pomiarowych. Szczególnie istotne są stany przejściowe w pojemnościowych przekładnikach napięciowych (*PPN*), które są stosowane w sieciach najwyższych napięć oraz w przekładnikach prądowych (*PP*).

Pojemnościowy przekładnik napięciowy może być najczęściej reprezentowany liniowym schematem zastępczym [3]. Intensywny stan przejściowy powstaje po gwałtownym spadku napięcia po zwarciu w obwodzie pierwotnym w wyniku rozładowania energii nagromadzonej w kondensatorze (p. 1.6.2). Kompensacja powstałego w ten sposób błędu polega na stosowaniu układów analogowych lub odpowiednich algorytmów cyfrowych, które odwzorowują odwrotną transmitancję samego zastępczego schematu *PPN* [3].

Źródłem błędów przekładnika prądowego jest nieliniowa charakterystyka magnesowania jego ferromagnetycznego rdzenia. W poprawnie dobranym *PP* rzadko mogą wystąpić warunki do trwałego nasycenia rdzenia, co ma miejsce w półokresowych odstępach w przebiegu prądu przy bardzo dużym wzroście jego amplitudy. Znacznie częściej dochodzi do przejściowego nasycenia rdzenia w rezultacie wystąpienia w mierzo-nym prądzie składowej aperiodycznej o dużej amplitudzie. Czas trwania związanego z tym odkształcenia przebiegu prądu wtórnego zależy od głębokości nasycenia oraz stałej czasowej zanikania składowej aperiodycznej. Niestety, w porównaniu z błędami *PPN*, ze względu na

nieliniowe zjawiska w obwodach z PP , tego typu błędy są znacznie trudniejsze do analizy i korekcji. Błędy powstające w torze pomiarowym zabezpieczeń są szeroko omawiane w literaturze specjalistycznej [23], gdzie podaje się również różne sposoby ich korekcji [3], [7]. Niektóre metody korekcji takich błędów omawiane są w następnym rozdziale.

Właściwości algorytmów pomiarowych w stanie ustalonym są określone za pomocą charakterystyki częstotliwościowej amplitudy i fazy. Były one analizowane w poprzednich rozdziałach, przy okazji syntezy odpowiednich metod. Warto zauważyć, że w rozpatrywanym tu zastosowaniu charakterystyki te dają tylko bardzo ogólne pojęcie o właściwościach algorytmów pomiarowych. Wynika to z faktu, że 'stan ustalony' nie jest adekwatnym pojęciem do opisu zdarzeń, które są istotne z punktu widzenia automatyki zabezpieczeniowej. Tym niemniej, w algorytmach numerycznych często wygodnie jest rozpatrywać stan przejściowy jako sekwencję kolejnych 'stanów ustalonych' i wówczas odpowiadające im charakterystyki częstotliwościowe dają wyobrażenie o właściwościach analizowanych metod.

Poniżej rozpatrywane będą głównie stany przejściowe algorytmów o stałym oknie pomiarowym. Problem redukcji błędów od składowej aperiodycznej rozpatrywany jest jako przykład niedopasowania modelu do obserwowanego zjawiska.

5.2 Stan przejściowy algorytmów

5.2.1 Algorytmy o stałym oknie pomiarowym

Typowymi algorytmami o stałym oknie pomiarowym jest para filtrów SOI z funkcjami impulsowymi, odpowiednio, h_c oraz h_s służących do ortogonalizacji sygnału $y(k)$. Zakładając zerowe warunki początkowe, odpowiedź filtrów w k -tym kroku można określić za pomocą następujących równań

$$\begin{aligned} x_c(k) &= \sum_{i=0}^{p-1} h_c(i)y(k-i), \\ x_s(k) &= \sum_{i=0}^{p-1} h_s(i)y(k-i), \end{aligned} \quad p = \begin{cases} k & \text{dla } k < M, \\ M & \text{dla } k \geq M, \end{cases} \quad (5.1)$$

gdzie: M - długość okna pomiarowego.

Dla wymuszenia określonego w postaci następującej funkcji:

$$y(k) = X \cos(ak - \beta), \quad (5.2)$$

otrzymuje się [12]:

$$\begin{aligned} x_c(k) &= X(r_c(k) \cos(ak - \beta) + s_c(k) \sin(ak - \beta)), \\ x_s(k) &= X(r_s(k) \cos(ak - \beta) + s_s(k) \sin(ak - \beta)), \end{aligned} \quad (5.3)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} r_c(k) &= \sum_{i=0}^{p-1} h_c(i) \cos(ai), \\ s_c(k) &= \sum_{i=0}^{p-1} h_c(i) \sin(ai) \end{aligned} \quad (5.4)$$

i podobnie dla $r_s(k)$ oraz $s_s(k)$.

Łatwo sprawdzić, że w przypadku pełnookresowego algorytmu Fouriera ($M = N$) równania (5.3) przyjmą następującą postać

$$\begin{aligned} x_c(k) &= \frac{X}{N \sin a} (k \sin a \cos(ak - \beta) + \sin(ak) \cos(a - \beta)), \\ x_s(k) &= \frac{X}{N \sin a} (k \sin a \sin(ak - \beta) - \sin(ak) \sin(a - \beta)), \end{aligned} \quad (5.5)$$

dla $k < N$ oraz

$$x_c(k) = X \cos(ak - \beta), \quad x_s(k) = X \sin(ak - \beta), \quad (5.6)$$

dla $k \geq N$.

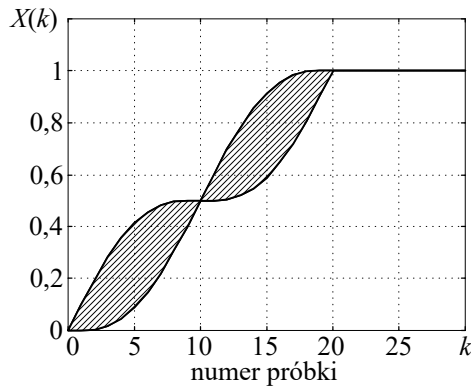
Gdy w miejsce filtracji stosowany jest algorytm korelacyjny z tymi samymi funkcjami bazowymi, to stan przejściowy ($k < N$) jest określony następująco:

$$\begin{aligned} X_c(k) &= \frac{X}{N \sin a} (k \sin a \cos \beta + \sin(ak) \cos(a(k+1) - \beta)), \\ X_s(k) &= \frac{X}{N \sin a} (k \sin a \sin \beta + \sin(ak) \sin(a(k+1) - \beta)) \end{aligned} \quad (5.7)$$

oraz

$$X_c(k) = X \cos \beta, \quad X_s(k) = X \sin \beta, \quad (5.8)$$

dla $k \geq N$ (stan ustalony).



Rys. 5.1. Stan przejściowy estymatora amplitudy opartego na pełnookresowym algorytmie Fouriera; $N = 20$

Przebieg estymaty amplitudy uzyskanej ze składowych określonych zgodnie z powyższymi algorytmami (5.5) lub (5.7) jest pokazany na rys. 5.1. Zakreślone obszary oznaczają zmianę położenia odpowiedzi w zależności od fazy β sygnału wejściowego (5.2). Ze względu na losową wartość zmiennej fazy β , błąd przejściowy rozważanej metody nie może być z góry określony nawet w przypadku idealnie sinu-

soidalnego wymuszenia o nieznannej fazie.

Podobny stan przejściowy można także obserwować, gdy tak określone składowe ortogonalne prądu i napięcia zastosować do wyznaczenia złożonych wielkości, jak moc lub impedancja. Niech sygnały prądu i napięcia o postaci

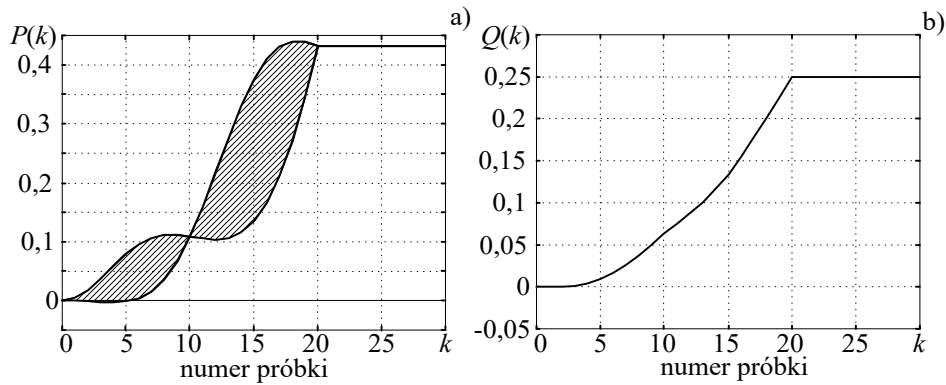
$$\begin{aligned} i(k) &= I \cos(ak - \beta - \varphi), \\ u(k) &= U \cos(ak - \beta), \end{aligned} \quad (5.9)$$

zostaną poddane ortogonalizacji za pomocą filtrów (5.1) lub adekwatnej procedury korelacyjnej. Stosując sygnały (5.9) w estymatorach mocy czynnej (4.75) i biernej (4.76) otrzymuje się odpowiednie obrazy stanów przejściowych, jak na rys. 5.2. Należy zauważyć, że stan przejściowy estymatora mocy biernej nie zależy od fazy. Podobne właściwości ma również estymator (4.77).

W celu skrócenia stanu przejściowego w powyższych algorytmach można zaproponować jedno z dwóch rozwiązań:

- zastosować algorytm o krótkim oknie pomiarowym, które będzie się poszerzać w miarę napływu danych o nowym stanie systemu,
- zastosować metodę niewrażliwą na zmianę fazy sygnału i odpowiednio skorygować wynik pomiaru.

Należy jednak zauważyć, że w obu przypadkach zakłada się, że sygnał wejściowy jest sinusoidalny. Inne składowe są traktowane jako zakłócenia, które mogą wprowadzić dodatkowe błędy pomiarowe.



Rys. 5.2. Stan przejściowy estymatorów mocy czynnej (a) i biernej (b);
 $N=20$, $I=U=1$, $\varphi = \pi/6$

5.2.2 Algorytmy ze zmienną długością okna pomiarowego

Metody tego typu opierają się na obserwacji, że czas trwania stanu przejściowego procedur o stałym oknie pomiarowym zależy od długości tego właśnie okna. Stąd też, w celu uzyskania szybkiej odpowiedzi należy stosować krótkie okno pomiarowe. Aby równocześnie racjonalnie wykorzystać posiadaną informację, do zwiększenia dokładności estymacji można poszerzać okno w miarę napływania danych o nowym stanie nadzorowanego procesu. Poszerzanie okna kończy się po osiągnięciu zadanej jego długości. Projektowanie takiego algorytmu sprowadza się do następujących kroków:

- określić minimalną (początkową) i maksymalną (ustaloną) długości okna pomiarowego,
- określić sposób obliczania składowych ortogonalnych w kolejnych krokach ze zmiennym oknem pomiarowym.

Przedstawiona procedura pomiarowa odnosi się do tego samego, niezmiennego stanu obserwowanego procesu, zatem musi zostać zainicjowana po wykryciu zmiany tego stanu. Należy wobec tego również określić sposób uruchamiania algorytmu – na przykład, po przekroczeniu określonej wartości śledzonej wielkości.

Metoda obliczania składowych ortogonalnych w kolejnych krokach stanu przejściowego powinna być dobrana z punktu widzenia tłumienia określonych składowych zakłócających. W przypadku pełnokresowego algorytmu Fouriera, przyjętego jako metoda bazowa, można rozważyć

dwa różne podejścia do projektowania estymatorów w stanie przejściowym:

- standardowy algorytm korelacyjny z zerowymi warunkami początkowymi, rozszerzany w kolejnych krokach do wersji pełnookresowej,
- algorytm o różnym kształcie funkcji korelacyjnych w kolejnych krokach, dobieranych z punktu widzenia eliminacji składowej stałej.

Pierwsze podejście ilustruje rys. 5.3. Algorytm startuje z minimalnym oknem pomiarowym o długości M_m próbek, powiedzmy $M_m = 2$, które jest sukcesywnie powiększane w miarę napływania nowych danych. Dla okna o szerokości M próbek wyjściowe składowe są określone według następujących równań (patrz p. 3.4.2):

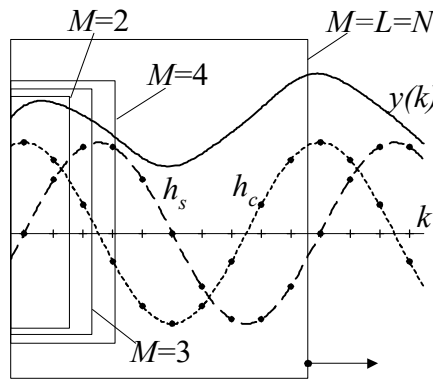
$$\begin{bmatrix} X_c(k) \\ X_s(k) \end{bmatrix} = \mathbf{P}(M) \begin{bmatrix} X_c^M(k) \\ X_s^M(k) \end{bmatrix}, \quad M = M_m, M_m + 1, \dots, L; \quad k = M_m, M_m + 1, \dots, \quad (5.10)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} X_c^M(k) &= \sum_{i=0}^{M-1} \cos(a(k+i-M))y(k+i-M), \\ X_s^M(k) &= \sum_{i=0}^{M-1} \sin(a(k+i-M))y(k+i-M), \end{aligned} \quad (5.11)$$

$\mathbf{P}(M) = \{q_{ij}\}^{-1}$ - macierz 2×2 (3.104) z wyrazami:

$$\begin{aligned} q_{11} &= \frac{M}{2} + \frac{\sin(aM) \cos(2\beta)}{2 \sin a}, \\ q_{12} = q_{21} &= \frac{\sin(aM) \sin(2\beta)}{2 \sin a}, \\ q_{22} &= \frac{M}{2} - \frac{\sin(aM) \cos(2\beta)}{2 \sin a} \end{aligned} \quad (5.12)$$

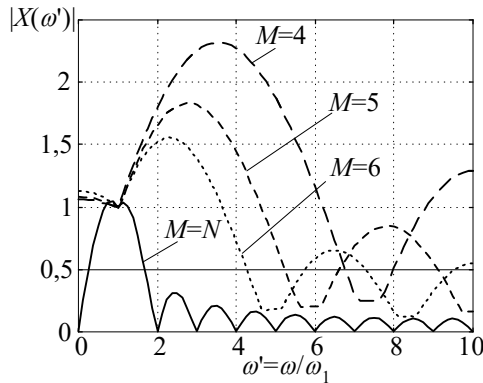


Rys. 5.3. Ilustracja sposobu przetwarzania sygnału w algorytmie o zmiennym oknie pomiarowym

oraz

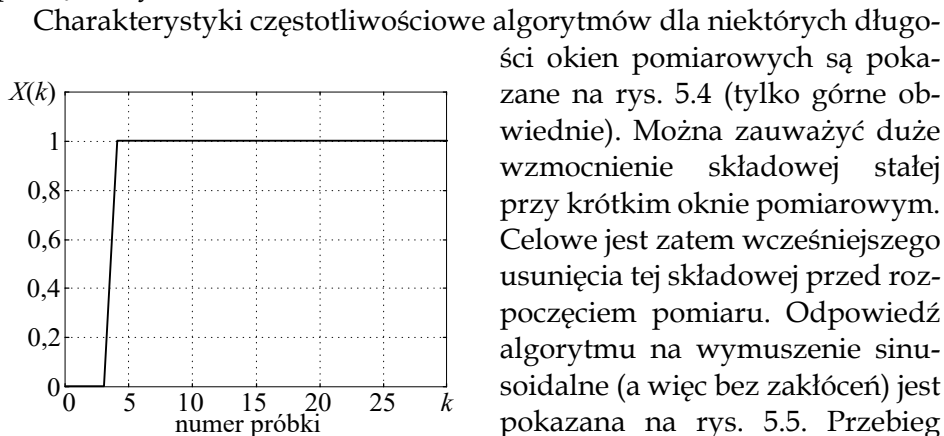
$$2\beta = 2\beta(k) = \begin{cases} a(k-1) & \text{dla } M \leq L, (k = M), \\ a(2k-1-L) & \text{dla } k > L, (M = L), \end{cases} \quad (5.13)$$

L - liczba próbek w ustalonym końcowym oknie pomiarowym.



Rys. 5.4. Charakterystyka częstotliwościowa algorytmu Fouriera dla różnej szerokości okna pomiarowego; $N = 20$

W stanie ustalonym ($k > L$) współczynniki (5.11) mogą być obliczane rekursywnie jak w algorytmie standardowym przy zerowych warunkach początkowych.



Rys. 5.5. Stan przejściowy algorytmu z kompensacją błędów dynamicznych

Elementy macierzy \mathbf{P} mają charakter współczynników wzmocnienia. Można zauważyć, że macierz \mathbf{P} przybiera formę diagonalną dla wartości M , które są wielokrotnością liczby $N/2$, to jest, gdy funkcje korelacyjne są ortogonalne w oknie pomiarowym. Gdy ustalone okno ma długość L próbek, która nie jest wielokrotnością liczby $N/2$, to w stanie ustalonym macierz \mathbf{P} również zmienia się okresowo zgodnie z (5.12).

Charakterystyki częstotliwościowe algorytmów dla niektórych długości okien pomiarowych są pokazane na rys. 5.4 (tylko górne obwiednie). Można zauważyć duże wzmocnienie składowej stałej przy krótkim oknie pomiarowym. Celowe jest zatem wcześniejszego usunięcia tej składowej przed rozpoczęciem pomiaru. Odpowiedź algorytmu na wymuszenie sinusoidalne (a więc bez zakłóceń) jest pokazana na rys. 5.5. Przebieg charakterystyki częstotliwościowej wskazuje jednak na to, że ten

idealny obraz ulegnie odkształceniu przy obecności innych składowych w sygnale wejściowym.

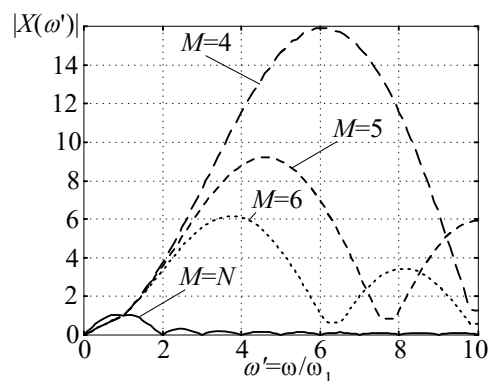
W drugim podejściu do projektowania rozpatrywanego algorytmu funkcja impulsowa jest tak dobierana, aby w kolejnych krokach przetwarzania usunąć składową stałą z sygnału. Ilustruje to następujący przykład.

Przykład 5.1. Zaprojektować algorytm estymacji składowych ortogonalnych sygnału ze zmiennym oknem pomiarowym na bazie pełnokresowej korelacyjnej metody Fouriera. Algorytm powinien być niewrażliwy na obecność w sygnale składowej stałej.

Zakłada się, że sygnał jest próbkowany $N = 20$ razy w okresie podstawowej harmonicznej.

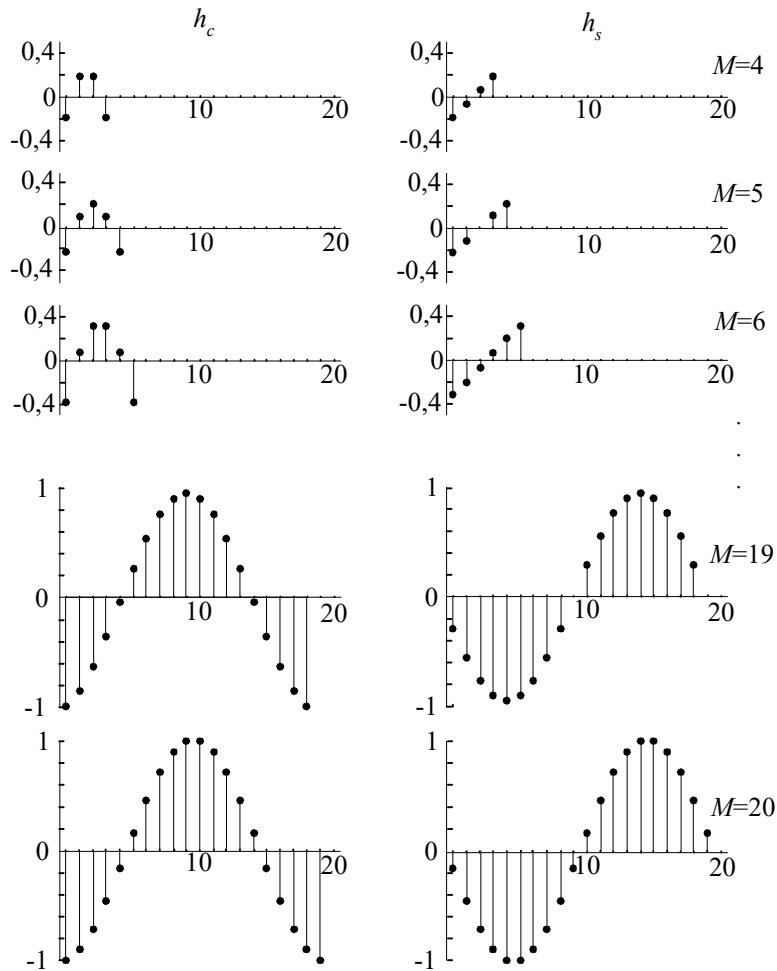
W celu określenia funkcji korelacyjnej w kolejnych krokach obliczeń należy zauważyć, że filtr kosinusowy z oknem pomiarowym o długości innej niż wielokrotność okresu ma wzmocnienie większe od zera dla składowej stałej.

W celu obejścia tego problemu można wprowadzić takie przesunięcie funkcji korelacyjnej aby jej wartość średnia w oknie była równa zero (porównaj z p. 3.4.2). Można zatem w charakterze funkcji impulsowych stosować parę funkcji sinus/kosinus, jak w algorytmie (3.123) z liczbą próbek w oknie pomiarowym równą M . Ciąg takich funkcji odpowiadających h_c oraz h_s wyrównanych względem środka okna jest pokazany na rys. 5.7 (pokazane funkcje mają zmienioną skalę). Pierwszy krok algorytmu odpowiada oknu z liczbą próbek $M=4$. Odpowiedź czasowa estymatora amplitudy na wymuszenie w formie (5.2) jest taka sama jak na rys. 5.5. Dla tej idealnej sytuacji poprawna wartość odpowiedzi



Rys. 5.6. Charakterystyki częstotliwościowe filtrów o różnych długościach okien pomiarowych; $N=20$

jest uzyskana po czterech próbkach. Jednak w początkowych krokach algorytm jest bardzo wrażliwy na szumy i składowe wysokiej częstotliwości. Widać to na rys. 5.6, gdzie pokazano charakterystyki częstotliwościowe dla estymatorów o długości okien równych odpowiednio 4-, 5- oraz 6-ciu próbkom. Widać, że szybka odpowiedź pociąga za sobą dużą niepewność wyniku w obecności zakłóceń. Stąd też zastosowanie



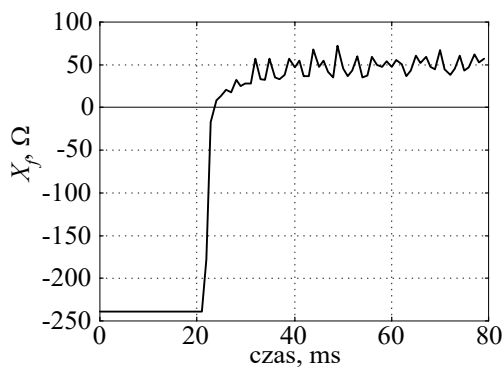
Rys. 5.7. Funkcje korelacyjne dla kolejnych kroków algorytmu o zmiennej długości okna pomiarowego

takiego podejścia powinna być dokładnie przeanalizowane pod kątem wymaganej szybkości i dokładności odpowiedzi. □

Pomysł stosowania zmiennego okna pomiarowego można także rozszerzyć na inne algorytmy. Można zauważyć, że zmiana długości okna w powyższej metodzie odpowiada zmianie okresu całkowania przy obliczaniu odpowiednich współczynników Fouriera. Tę samą zasadę można stosować w przypadku całkowania równań różniczkowych związanych z modelem *RI* pętli zwarciowej (4.99). W tym przypadku długość okna jest bezpośrednio związana z okresem całkowania odpowiednich równań [6], [25].

5.2.3 Stabilizacja pomiaru wielkości kryterialnej

Obecność zakłóceń w sygnałach wejściowych automatyki elektroenergetycznej powoduje, że rezultat pomiaru wielkości kryterialnej może być bardzo niestabilny i niepewny. Stosowanie szybkich procedur, które korzystają z ograniczonej informacji o stanie procesu, jeszcze to zjawisko pogarsza. Przykład jest pokazany na rys. 5.8, który przedstawia wynik pomiaru reaktancji pętli zwarciowej po zwarciu $L1-L2$ w linii napowietrznej 400 kV w odległości 0,8 długości linii od miejsca pomiaru (rys. 1.3). Reaktancja jest wyznaczana zgodnie z 5-punktowym algorytmem różniczkowym (4.104). Podejmowanie przez przekaźnik decyzji w tych warunkach jest bardzo niepewne. Jedną z metod postępowania w takich przypadkach jest stabilizacja wyniku pomiaru przez odpowiednią jego filtrację. Stosowanie zwykłej zwłoki nie zawsze rozwiązuje ten problem, gdyż stan przejściowy wywołany zwarciem może być bardzo długi, a po-



Rys. 5.8. Pomiar reaktancji pętli zwarciowej za pomocą 5-punktowego algorytmu MNK

nadto, takie postępowanie jest nieracjonalne, bo decyzję należy podjąć jak najszybciej.

Rezultat pomiaru wielkości kryterialnej jest na ogół sygnałem wolnozmiennym (w porównaniu ze stosowaną częstotliwością próbkowania), w którym z zakłóceń należy wydobyc wyraźną tendencję zmiany stanu procesu. Można do tego celu stosować

liniowe filtry uśredniające lub filtry medianowe.

Filtr uśredniający

Uśrednianie jest najprostszym i bardzo często skutecznym sposobem wygładzania danych. Filtr wyznaczający średnią wartość z M kolejnych próbek sygnału $y(k)$ jest określony następującym równaniem:

$$x(k) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} y(k-i). \quad (5.14)$$

Stan przejściowy filtra trwa przez okres równy długości jego okna pomiarowego, co ilustruje rys. 5.9ab.

Filtr medianowy

Niedostatkami operacji uśredniania jest efekt związany z 'pamięcią' filtru, co objawia się tym, że każda zmiana sygnału wejściowego, w postaci nawet bardzo krótkiego impulsu, jest 'pamiętana' przez okres jednego okna pomiarowego. Wady tej pozbawiony jest filtr medianowy, który przetwarza sygnał wejściowy zgodnie z następującą zależnością [8]

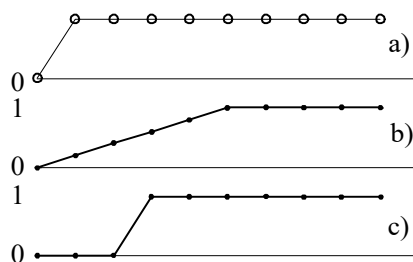
$$x(k) = \text{med}(y(k - M + 1), y(k - M + 2), \dots, y(k)), \quad (5.15)$$

gdzie funkcja $\text{med}(\cdot)$ oznacza medianę (wartość środkową) ze zbioru próbek w oknie pomiarowym o szerokości M próbek.

Operację wyznaczania mediany ze zbioru M próbek można określić następującym algorytmem.

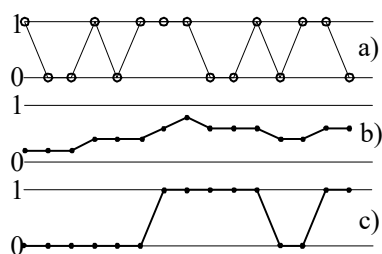
1. Uporządkować zbiór próbek w oknie pomiarowym $y(k - M + 1), y(k - M + 2), \dots, y(k)$ od najmniejszej do największej wartości (lub odwrotnie): $y_0, y_1, \dots, y_{\frac{M-1}{2}}, \dots, y_{M-1}$.
2. Określić sygnał wyjściowy zgodnie z (5.15): $x(k) = y_{\frac{M-1}{2}}$. W przypadku, gdy M jest liczbą parzystą, to przyjmuje się, że $x(k) = \frac{1}{2} \left(y_{\frac{M-1}{2}} + y_{\frac{M}{2}} \right)$, co przedstawia średnią z dwóch środkowych wartości uporządkowanego zbioru.

Podobnie jak w filtrze SOI, przetwarzanie rozpoczyna się od wyzerowania pamięci filtru, po czym, w kolejnych krokach wprowadzane są następujące po sobie próbki, a wartość wyjściowa jest określana zgodnie z powyższym algorytmem.



Rys. 5.9. Odpowiedź na skok jednostkowy (a) filtru uśredniającego (b) oraz medianowego (c)

Filtr medianowy jest nieliniowym przetwornikiem sygnałów. W sposób szczególny nadaje się on do usuwania szumu, wydobywając zmianę poziomu sygnału. Na rysunkach 5.9 oraz 5.10 pokazane są przebiegi ilustrujące właściwości filtru medianowego oraz uśredniającego o tej

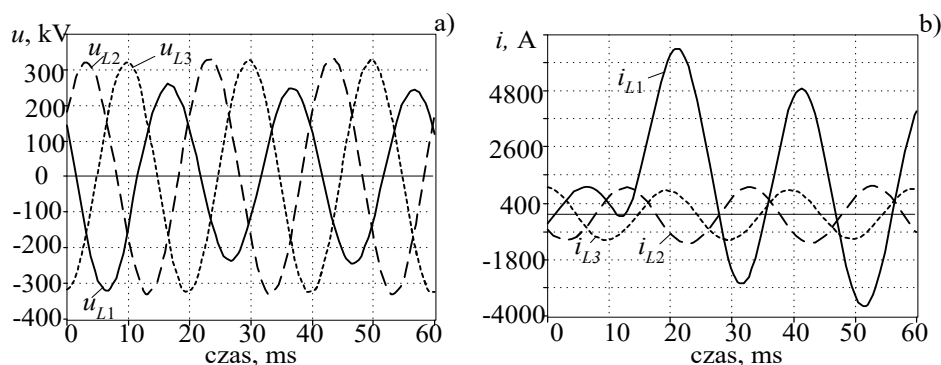


Rys. 5.10. Odpowiedź filtru uśredniającego (b) i medianowego (c) na przykładowe wymuszenie (a)

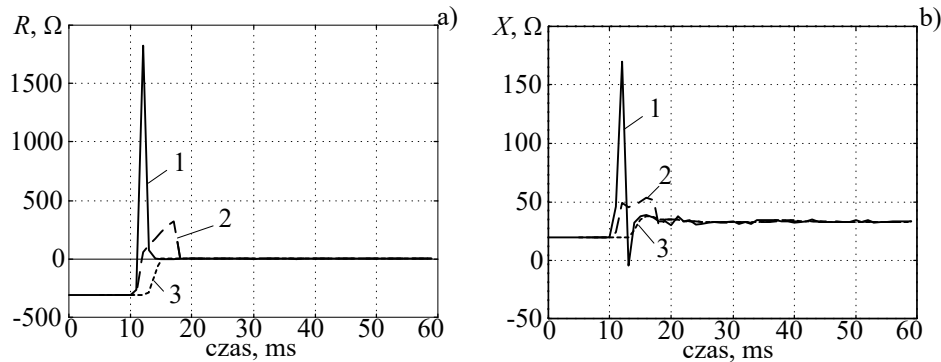
samej szerokości okna pomiarowego ($M=5$). Porównując reakcję obu filtrów na skok jednostkowy można zauważyć charakterystyczne narastanie odpowiedzi filtru uśredniającego przez okres równy długości okna pomiarowego. W przypadku filtru medianowego sygnał wyjściowy gwałtownie zmienia się do nowego stanu z opóźnieniem równym $(M-1)/2$ próbek. Zmiany sygnału wejściowego w postaci impulsów o czasie trwania krótszym niż to właśnie opóźnienie nie przenoszą się na wyjście (rys. 5.10). Te właściwości sprawiają, że filtr medianowy jest bardzo skutecznym narzędziem wygładzania rezultatów pomiaru wielkości kryterialnych. Ilustruje to poniższy przykład.

Przykład 5.2. Porównać właściwości filtrów: uśredniającego i medianowego, zastosowanych do wygładzania pomiarów impedancji. Składowe impedancji są określane na podstawie algorytmu opartego na modelu RL pętli zwarciowej (4.94). Estymacja odbywa na podstawie dwóch równań różniczkowych (3 punkty), natomiast do uśredniania wyników zastosowano filtry o długości okna pomiarowego $M=5$ próbek.

Sygnały fazowe prądu i napięcia są dostarczane z modelu jak na rys. 1.3. Rozpatruje się zwarcie $L1-E$ w odległości 0,8 długości linii od stacji A. Warunki początkowe są takie, jak na rys. 1.3, przy czym początkowy rozchyl napięć



Rys. 5.11. Zwarcie w odległości 0,8 długości linii od stacji A przez $0,2 \Omega$, kąt napięcia: 15° , zwarcie $L1-E$



Rys. 5.12. Pomiar impedancji: 1 – algorytm 3-punktowy różniczkowy, 2 – po filtracji uśredniającej 6-cio punktowej, 3 – po filtrze medianowym 6-cio punktowym

między stacjami A i B wynosi $\angle(\underline{U}_A - \underline{U}_B) = -15^\circ$. Przebieg napięć i prądów obserwowanych przez układ pomiarowy w stacji A jest pokazany na rys. 5.11 (wielkości te są przeskalowane do układu pierwotnego).

Pomiar impedancji pętli zwarciowej odbywa się zgodnie z (4.95), (4.96). Rezultaty pomiaru oraz wygładzania wyników są pokazane na rys. 5.12. Ze względu na duże krótkotrwałe przeregulowanie w odpowiedzi estymatorów, uśrednianie wprowadza znaczne opóźnienie w ustalaniu się sygnału wyjściowego. W przypadku filtru medianowego obserwuje się znacznie szybszą reakcję. \square

5.3 Błędy dynamiczne algorytmów

5.3.1 Dynamiczna korekcja stanu przejściowego

Algorytm korekcji stanu przejściowego był początkowo stosowany w odniesieniu do estymatora mocy biernej w formie (4.77), który ma odpowiedź niezależną od fazy sygnałów wejściowych. Analizując rys. 5.2 można zauważyć, że dla niezakłóconych sygnałów wejściowych (5.9) poprawna odpowiedź może być określona bezpośrednio po pierwszym pomiarze. W stanie przejściowym algorytmu (4.77), odpowiedź w kroku o numerze p może być zapisana następująco

$$Q(p) = \frac{QT(p)}{\sin \Delta\gamma}, \quad (5.16)$$

gdzie: $Q = \frac{1}{2}UI \sin \varphi$ – poprawna (ustalona) wartość mocy biernej, $\Delta\gamma = maq_0$ – kąt zależny od opóźnienia o m próbek w (4.66), $T(p)$ –

funkcja określająca przebieg odpowiedzi estymatora w stanie przejściowym (rys. 5.2b).

Sposób określania funkcji $T(p)$ zostanie pokazany na przykładzie estymatora (4.77). Struktura estymatora jest przedstawiona na rys. 5.13. Dla uproszczenia założono, że napięcie i prąd są przetwarzane z zastosowaniem takiego samego filtra F . Przełączniki na wejściu reprezentują rozpoczęcie obliczeń z numerem kroku $p = 0$. Dla sygnałów wejściowych o postaci (5.9), sygnały wyjściowe są określone podobnie jak w (5.3)

$$\begin{aligned} u_f(p) &= U(r_f(p) \cos(ap - \beta) + s_f(p) \sin(ap - \beta)), \\ i_f(p) &= I(r_f(p) \cos(ap - \beta - \varphi) + s_f(p) \sin(ap - \beta - \varphi)), \end{aligned} \quad (5.17)$$

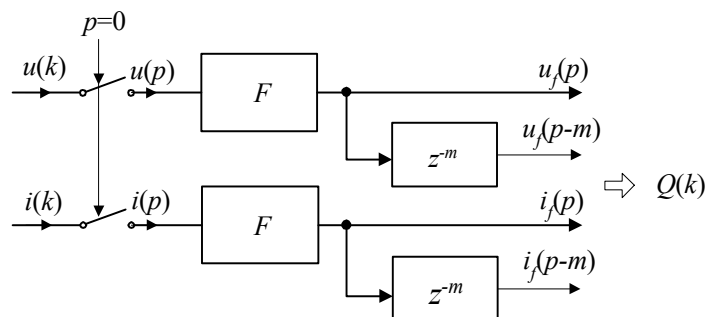
gdzie: $r_f(p)$, $s_f(p)$ są określone przez (5.4) z odpowiednią funkcją impulsową h_f .

Podstawiając (5.17) do (4.77) otrzymuje się estymator mocy o postaci jak w (5.16), przy czym

$$\begin{aligned} T(p) &= (r_f(p)r_f(p-m) + s_f(p)s_f(p-m))\sin(am) + \\ & (r_f(p)s_f(p-m) - r_f(p-m)s_f(p))\cos(am). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Funkcja (5.18) określa stan przejściowy estymatora od zera do wartości $\sin(am)$, co przy dopasowaniu estymatora ($q_0 = 1$) pozwala dokładnie odtworzyć jego stan przejściowy. Ostateczna wersja skorygowanego estymatora jest otrzymana po podstawieniu funkcji (5.18) oraz (4.77) do (5.16) (rys. 5.13):

$$\hat{Q}(p) = \frac{1}{2T(p)} (u_f(p-m)i_f(p) - u_f(p)i_f(p-m)). \quad (5.19)$$



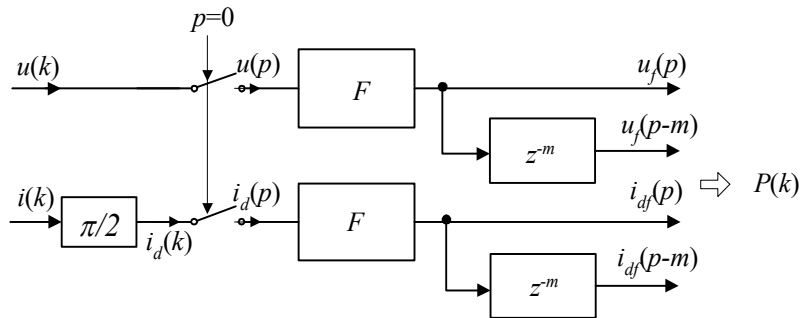
Rys. 5.13. Struktura estymatora mocy biernej

Odpowiedź estymatora w stanie przejściowym jest taka sama jak na rys. 5.2b. Opóźnienie odpowiedzi zależy od liczby próbek m opóźnienia w (5.19).

Powyższy algorytm może być także rozszerzony na pomiar innych wielkości elektrycznych. Opóźnienie przebiegu prądu o kąt $\pi/2$, prowadzi do estymatora mocy czynnej (rys. 5.14). Przesunięcie kątowe może być wykonane przez opóźnienie sygnału, jak w (4.61)

$$i_d(k) = \frac{i(k-m) - i(k)\cos(am)}{\sin(am)}, \quad (5.20)$$

gdzie: m jest liczbą próbek opóźnienia.



Rys.5.14. Struktura estymatora mocy czynnej

Można pokazać [11], że po tym uzupełnieniu estymator mierzy moc czynną, a (5.16) może być zapisane w następującej postaci:

$$P(p) = \frac{PT(p)}{\sin \Delta\gamma}, \quad (5.21)$$

gdzie: $P = \frac{1}{2}UI \cos\varphi$ – poprawna wartość mocy.

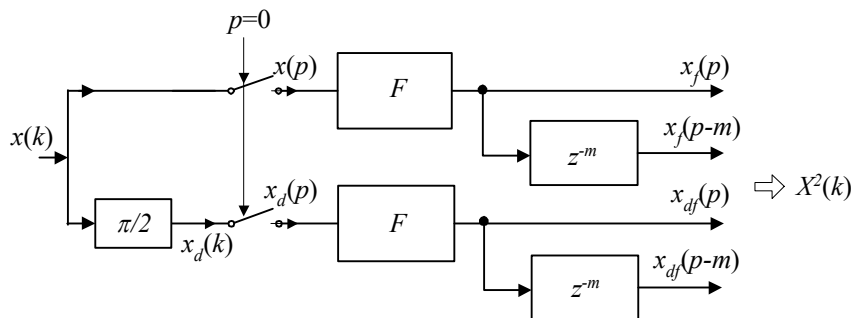
Ostatecznie, estymator mocy czynnej przyjmuje następującą postać:

$$\hat{P}(p) = \frac{1}{2T(p)} (u_f(p-m)i_{df}(p) - u_f(p)i_{df}(p-m)). \quad (5.22)$$

W porównaniu z estymatorem (5.19), w tym przypadku wymagane jest dodatkowe opóźnienie sygnału prądu o m próbek.

Można łatwo zauważyć, że wprowadzając ten sam sygnał na oba wejścia estymatora mocy czynnej (5.22) ($u(k) = i(k) = x(k)$, $\varphi = 0$) otrzymuje się estymator amplitudy (rys.5.15):

$$\hat{X}^2(p) = \frac{1}{2T(p)} (x_f(p-m)x_{df}(p) - x_f(p)x_{df}(p-m)). \quad (5.23a)$$



Rys. 5.15. Struktura estymatora amplitudy

Powyższa zależność odpowiada sytuacji, gdy do przetwarzania sygnałów stosowane są filtry cyfrowe. W przypadku zastosowania algorytmu korelacyjnego, sygnały wyjściowe X_f , X_{df} odpowiadają współczynnikom korelacji. Wówczas w miejsce równania (5.23a) należy przyjąć następującą zależność

$$\hat{X}^2(p) = \frac{1}{2T(p)} \left[(X_f(p)X_f(p-m) + X_{df}(p)X_{df}(p-m))\sin(am) + (X_f(p)X_{df}(p-m) - X_f(p-m)X_{df}(p))\cos(am) \right] \quad (5.23b)$$

Stosując powyższe estymatory w zależności (4.78) można uzyskać efektywny algorytm pomiaru impedancji [11].

5.3.2 Pomiar składowych ortogonalnych z podziałem częstotliwości próbkowania

W rozwiązaniach nowoczesnych systemów sterowania stacją elektroenergetyczną dąży się do integracji wielu funkcji tradycyjnie realizowanych w oddzielnych urządzeniach. To sprawia, że częstotliwość próbkowania wejściowych sygnałów prądu i napięcia jest narzucona przez najbardziej wymagające pod tym względem funkcje (na przykład, funkcje rejestracji przebiegów). Tymczasem, dokładność określania miejsca

zwarcia przez tradycyjne algorytmy zabezpieczeniowe w niewielkim stopniu się poprawia wraz ze wzrostem częstotliwości próbkowania (dla zabezpieczeń odległościowych ta granica wynosi 16 próbek w okresie [1]). Ponadto, zbyt krótki okres pomiędzy próbkami może nie wystarczyć na wykonanie wszystkich operacji związanych z realizacją algorytmu zabezpieczeniowego w czasie rzeczywistym. Powstaje więc pytanie, jak wykorzystać sygnał próbkowany z częstotliwością wyższą niż realizowany jest algorytm zabezpieczeniowy. Proste pominięcie kilku kolejnych próbek jest nieracjonalne, gdyż traci się spróbkowane już dane, a ponadto wystąpi tu problem niedopasowania analogowego filtra odcinającego, który został dobrany do wyższej częstotliwości próbkowania.

Jednym z możliwych rozwiązań jest zastosowanie koncepcji obliczania składowych ortogonalnych w dwóch etapach. W literaturze angielskiej przyjęło się tu określenie *phaselets* [1], co można tłumaczyć, jako wektory częściowe. Są to wielkości, które są otrzymane w rezultacie splotu lub korelacji fragmentów obserwowanych sygnałów z funkcjami sinus/kosinus w krótkim oknie pomiarowym o odpowiednio dobranej długości. Ta operacja jest prowadzona z wykorzystaniem próbek sygnału wejściowego dostarczanych z częstotliwością f_T . Niech zabezpieczenie, dla którego wykonywany jest ten pomiar, kontroluje wielkości kryterialne co M_p próbek sygnału wejściowego y , to znaczy z częstotliwością $f_p = f_T / M_p$. W takim razie, wynik pomiaru powinien być dostępny po każdym M_p próbkach sygnału wejściowego. Procedura pomiaru składowych ortogonalnych może być zatem zapisana następująco

$$\begin{aligned} p_c(l) &= \sum_{i=0}^{M_p-1} \cos(a(k_p + i - M_p + 1))y(k_p + i - M_p + 1), \\ p_s(l) &= \sum_{i=0}^{M_p-1} \sin(a(k_p + i - M_p + 1))y(k_p + i - M_p + 1), \end{aligned} \quad k_p = lM_p - 1, \quad (5.24)$$

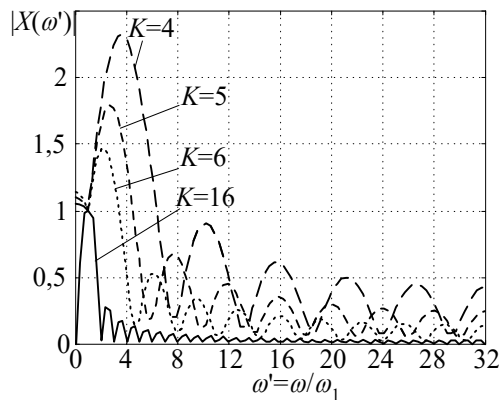
gdzie: k_p – numer próbki wejściowej, l – numer kroku pobierania wyniku pomiaru przez zabezpieczenie ($l = 1, 2, \dots$), $a = 2\pi / N$, N – jak poprzednio, liczba próbek sygnału wejściowego w okresie.

Wektor częściowy określony przez składowe (5.24) jest fragmentem rezultatu przetwarzania (5.11) z liczbą próbek ograniczoną do M_p . Najpierw rozpatrywany jest przypadek, gdy algorytm startuje przy

zerowych warunkach początkowych. Mając K par składowych (5.24) w kolejnych krokach algorytmu $1, 2, \dots, K$, można określić składowe ortogonalne sygnału zgodnie z pomiarem w oknie o długości KM_p (porównaj z (5.10))

$$\begin{bmatrix} X_c(K) \\ X_s(K) \end{bmatrix} = \mathbf{P}(KM_p) \sum_{i=1}^K \begin{bmatrix} p_c(i) \\ p_s(i) \end{bmatrix}, \quad (5.25)$$

gdzie: macierz \mathbf{P} jest określona podobnie jak w (5.12) dla $M=KM_p$.



Rys. 5.16. Charakterystyki częstotliwościowe algorytmów z częściowym obliczaniem składowych wektora; $N=64$, $M_p = 4$.

Charakterystyki częstotliwościowe estymatora (5.25) dla kilku różnych wartości K są pokazane na rys. 5.16 (liczba próbek w okresie obserwowanego sygnału wynosi $N=64$, a $M_p=4$). Rzeczywista długość okna pomiarowego w tym przypadku jest równa KM_p próbek.

Algorytm (5.25) osiąga stan ustalony gdy liczba próbek stanu przejściowego KM_p przyjmie war-

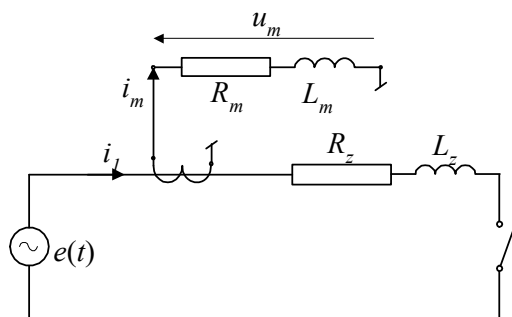
tość odpowiadającą ustalonej długości okna L . Podobnie jak w klasycznym estymatorze, w stanie ustalonym macierz \mathbf{P} przyjmuje postać diagonalną jeśli ustalona długość okna jest równa wielokrotności połowy okresu modelu sygnałowego. Można zauważyć, że z punktu widzenia właściwości częstotliwościowych, algorytm ma wszystkie cechy metody o dużej częstotliwości próbkowania.

5.4 Kompensacja błędów od składowej aperiodycznej

Prądy i napięcia towarzyszące zwarciom w praktyce nie są nigdy w pełni sinusoidalne. Prąd zwarciový zazwyczaj zawiera zanikającą aperiodycznie składową stałą, która jest niemal w pełni transformowana przez przekładniki pomiarowe do obwodów wtórnych. O ile zakłócające składowe

harmoniczne są łatwe do eliminacji, to składowa aperiodyczna wymaga specjalnego podejścia. Z punktu widzenia tradycyjnych algorytmów jest to bowiem zakłócenie niestacjonarne. Stała czasowa zanikania tej składowej zależy od parametrów obwodu zwarcioowego i może się zmieniać od kilku milisekund do ułamka sekundy. Widmo ciągłego sygnału wykładniczego jest nieskończone, co oznacza, że w ogólnym przypadku nie może być ono usunięte z widma obserwowanego sygnału w standardowych algorytmach pomiarowych (patrz Przykład 2.1). Obecność składowej aperiodycznej w sygnale wejściowym zabezpieczeń może niekiedy prowadzić do znacznych dynamicznych błędów pomiaru, sięgających nawet 20% wartości sygnału [18].

W przypadku zabezpieczeń linii, klasyczną metodą eliminacji składowej aperiodycznej jest stosowanie członów kompensacyjnych w prądowych obwodach wejściowych przekaźników (ang. *mimic circuit*). Schemat ideowy takiego rozwiązania jest pokazany na rys. 5.17. Obwód jest utworzony z szeregowo połączonych elementów R_m , L_m , przez które przepływa mierzony prąd (obwód jest umieszczony po wtórnej stronie *PP*). Elementy R_m , L_m obwodu kompensacyjnego są tak dobrane, że $R_m / L_m = R_z / L_z$, gdzie indeks z odnosi się do zakładanego obwodu zwarcioowego w linii [2],



Rys. 5.17. Schemat ideowy układu kompensacyjnego z modelem linii

[4], [9]. Spadek napięcia na obwodzie kompensacyjnym jest proporcjonalny do mierzonego prądu, z tym, że jest on pozbawiony składowej aperiodycznej. Można to sprawdzić zakładając, że prąd zwarcioowy jest określony następującą funkcją (3.4):

$$i(t) = I_1 \cos(\omega_1 t - \varphi) - I_0 e^{-\frac{R_z}{L_z} t} . \quad (5.26)$$

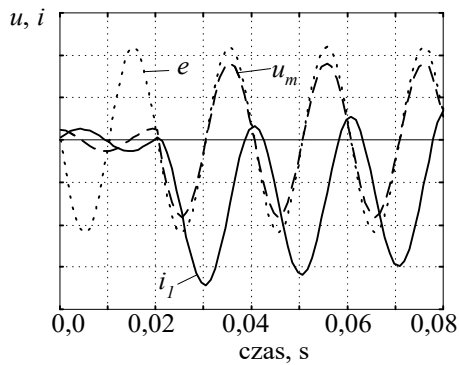
Jeśli zwarcie nastąpiło w chwili $t=0$, a obwód kompensacyjny ma parametry proporcjonalne do odpowiednich parametrów obwodu zwarcioowego, to spadek napięcia przyjmie następującą postać:

$$u_m(t) = k_i I_1 Z_m \cos(\omega_1 t - \varphi), \quad (5.27)$$

gdzie: k_i - współczynnik transformacji PP,

$$I_1 = \frac{|U|}{|Z|}, \quad Z_z = R_z + j\omega_1 L_z, \quad Z_m = R_m + j\omega_1 L_m,$$

a więc jest proporcjonalny do składowej podstawowej prądu. Ilustracja tych zależności jest pokazana na rys. 5.18. Można zauważyć, że napięcie wyjściowe po zwarciu jest proporcjonalne do napięcia zasilającego obwód zwarciaowy.



Rys. 5.18. Przebieg napięcia i prądu w układzie kompensacyjnym

Obwody kompensacyjne są powszechnie stosowane w zabezpieczeniach linii, chociaż trzeba pamiętać, że charakter obwodu zwarciaowego jest trudny do przewidzenia z powodu nieznannej i przypadkowej rezystancji zwarcia. Jest to czynnik, który zmienia założenia poczynione w (5.27), co jest źródłem określonych błędów kompensacji.

Opisany schemat może być łatwo zamieniony na postać algorytmu numerycznego, który jest częścią numerycznej procedury pomiarowej. W celu określenia odpowiednich zależności zakłada się, że model sygnałowy prądu obserwowanego przez zabezpieczenie może być przedstawiony w postaci trzech składowych tworzących sygnał o podstawowej harmonicznej oraz składowej aperiodycznej [9]

$$i(k) = I_c(k) \cos(ak) + I_s(k) \sin(ak) + I_0(k) \exp(bk), \quad (5.28)$$

gdzie: $I_c(k) = I_1 \cos(\varphi + \psi)$, $I_s(k) = I_1 \sin(\varphi + \psi)$, $I_a(k) = -I_1 \cos(\varphi + \psi)$,

$$b = -\frac{T_1}{NT_a}, \quad T_a \text{ — stała czasowa składowej aperiodycznej.}$$

Sygnał jest próbkowany z częstotliwością N/T_1 .

W celu identyfikacji trzech składowych w (5.28) można zastosować schemat MNK. Dla $M > 3$ kolejnych próbek otrzymuje się następujące równanie macierzowe:

$$\begin{bmatrix} \cos(a(k-M+1)) & \sin(a(k-M+1)) & \exp(b(k-M+1)) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos(a(k-1)) & \sin(a(k-1)) & \exp(b(k-1)) \\ \cos(ak) & \sin(ak) & \exp(bk) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_c(k) \\ I_s(k) \\ I_a(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i(k-M+1) \\ \vdots \\ i(k-1) \\ i(k) \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

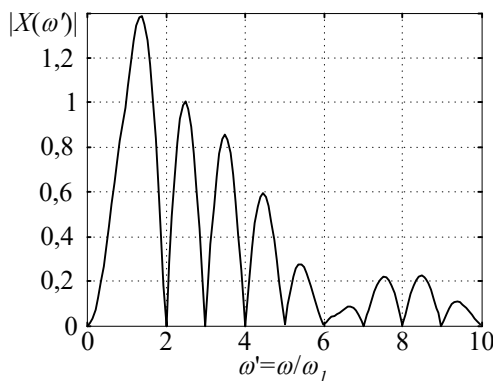
na podstawie którego można łatwo wyznaczyć estymaty składowych: \hat{i}_c oraz \hat{i}_s w kolejnych krokach próbkowania.

Znając powyższe składowe można napisać skorygowaną postać równania (5.28), w którym pominięto zakłócającą składową aperiodyczną:

$$i_m(k) = \hat{I}_c(k) \cos(ak) + \hat{I}_s(k) \sin(ak). \quad (5.30)$$

Prąd $i_m(k)$ w (5.30) jest proporcjonalny do spadku napięcia na analogowym obwodzie kompensacyjnym.

Algorytm wprowadza opóźnienie, które zależy od długości okna pomiarowego w (5.29), która w związku z tym nie powinna być zbyt duża – zazwyczaj ok. 1/4 okresu podstawowej harmonicznej. Przebieg odpowiedzi czasowej powyższego algorytmu jest zbliżony do reakcji oryginalnego układu kompensacyjnego (rys. 5.18). Separacja składowej aperiodycznej nie jest pełna jeśli tłumienie tej składowej jest różne od stałej czasowej T_a przyjętej w modelu sygnałowym. Charakterystyka częstotliwościowa powyższego algorytmu dla $N=20$ oraz $M=6$ jest pokazana na rys. 5.19. Można zauważyć występowanie stosunkowo dużego wzmocnienia w zakresie wysokich częstotliwości, co powoduje, że metoda jest czuła na zakłócenia (szumy) oraz wyższe harmoniczne w przypadku niewielkiej nawet odchyłki częstotliwości od wartości zanamionowej.



Rys. 5.19. Charakterystyka częstotliwościowa cyfrowego algorytmu kompensacyjnego; $N=20$, $M=6$

Wpływ obecności składowej aperiodycznej w obserwowanym sygnale na dokładność estymacji określonych wielkości zależy od właściwości algorytmu pomiarowego. Stosunkowo

dużą odporność pod tym względem mają algorytmy oparte na modelu *RL* obwodu zwarciovego (wywodzące się z równań różniczkowych obwodu). Wynika to z faktu, że w tym przypadku model pomiarowy jest zgodny lub zbliżony do obserwowanego procesu powstawania składowej aperiodycznej.

Należy zauważyć, że moc widma składowej zanikającej aperiodycznie jest skoncentrowana w zakresie niskich częstotliwości. Dlatego filtry użyte do ortogonalizacji powinny tłumić ten właśnie zakres częstotliwości. Niestety, w przypadku stosowania krótkich okien pomiarowych (w celu skrócenia odpowiedzi filtru), estymowana pierwsza harmoniczna sygnału leży również w paśmie niskich częstotliwości. Ta sprzeczność jest trudna do przewyciężenia. Stosowanie algorytmów cyfrowych pozwala jednak, przy określonych założeniach, w pełni wyeliminować składową aperiodyczną z sygnału wejściowego zabezpieczeń.

W przypadku algorytmu pełnokresowego możliwa jest modyfikacja metody najmniejszych kwadratów, która pozwala na adaptacyjną korekcję pomiaru składowych ortogonalnych. Wywód odpowiedniej procedury zaczyna się od założenia, że stała czasowa zanikania składowej aperiodycznej jest znana. To założenie może być następnie zdjęte.

Stosując trójstanowy model sygnałowy można utworzyć algorytm, który w pełni eliminuje składową aperiodyczną o znanej stałej czasowej. Pomiar składowych ortogonalnych w oknie o długości N próbek za pomocą tego algorytmu jest określony następującymi wyrażeniami (3.121):

$$\begin{aligned} X_c &= \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (\cos(ai) - d_c) y(i), \\ X_s &= \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (\sin(ai) - d_s) y(i), \end{aligned} \quad (5.31)$$

gdzie: d_c, d_s są współczynnikami, które zależą od stałej czasowej zanikania składowej aperiodycznej (3.116).

W kolejnych krokach okno pomiarowe przesuwa się względem sygnału y oraz funkcji korelujących. Uwzględniając to można otrzymać następującą postać wyrażen (5.31):

$$\begin{aligned} X_c(k) &= \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (\cos(a(k-i)) - d_c(k)) y(k-i), \\ X_s(k) &= \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (\sin(a(k-i)) - d_s(k)) y(k-i), \end{aligned} \quad (5.32)$$

gdzie: $d_c(k)$, $d_s(k)$ są określone w (3.118).

Podobnie jak w przypadku metody Fouriera, powyższy algorytm można zapisać w postaci rekursywnej. Proste przekształcenia prowadzą do następujących zależności [15], [16]:

$$\begin{aligned} X_r(k) &= X_r(k-1) + h_r(k)\Delta y(k), \\ X_i(k) &= X_i(k-1) + h_i(k)\Delta y(k), \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$X_\Sigma(k) = X_\Sigma(k-1) + \Delta y(k), \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} X_c(k) &= X_r(k) - d_c(k)X_\Sigma(k), \\ X_s(k) &= X_i(k) - d_s(k)X_\Sigma(k), \end{aligned} \quad (5.35)$$

gdzie:

$$\Delta y(k) = \frac{2}{N}(y(k) - y(k-N)), \quad (5.36)$$

$$h_r(k) = \cos(ak), \quad h_i(k) = \sin(ak). \quad (5.37)$$

Należy zauważyć, że (5.33) przedstawia klasyczny pełnookresowy algorytm Fouriera, podczas gdy (5.35) wprowadza korekcję składowej aperiodycznej. Wielkość $X_\Sigma(k)$ jest sumą próbek sygnału w oknie pomiarowym i może być rekursywnie obliczana zgodnie z (5.34).

Algorytm (5.33)–(5.35) całkowicie eliminuje składową aperiodyczną jeśli funkcje $d_c(k)$ oraz $d_s(k)$ są znane dla danej wartości stałej czasowej zanikania składowej aperiodycznej w obserwowanym sygnale $y(k)$. W przeciwnym przypadku korekcja (5.35) może prowadzić do dużych błędów. Można jednak pokazać, że wspomniane funkcje korekcyjne mogą być wyznaczone na podstawie pomiarów. W tym celu funkcje (3.118) można zapisać w następującej formie

$$\begin{aligned} d_c(k) &= p_c h_r(k) - p_s h_i(k), \\ d_s(k) &= p_c h_i(k) + p_s h_r(k), \end{aligned} \quad (5.38)$$

gdzie: p_c oraz p_s mogą być określone na podstawie (3.118)–(3.120)

$$\begin{aligned} p_c &= \frac{(1-r)(\cos a - r)}{(\cos a - r)^2 + \sin^2 a}, \\ p_s &= \frac{(1-r)\sin a}{(\cos a - r)^2 + \sin^2 a}, \end{aligned} \quad (5.39)$$

przy czym:

$$r = \exp(b), \quad b = -\frac{T_1}{NT_a}. \quad (5.40)$$

W celu wyznaczenia parametru r korzysta się z faktu, że kolejne próbki sygnału reprezentującego składową aperiodyczną o amplitudzie A mogą być przedstawione w postaci następującego ciągu geometrycznego

$$\{A, A\exp(b), A\exp(2b), \dots, A\exp((N-1)b), \dots\} = \{A, Ar, Ar^2, \dots, Ar^{N-1}, \dots\}, \quad (5.41)$$

z ilorazem r .

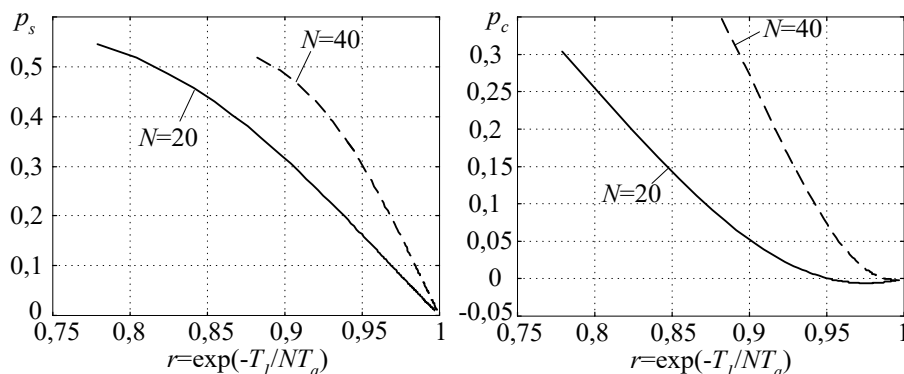
Próbki ciągu (5.41) nie mogą być bezpośrednio określone, gdy rozważana składowa jest dodana do podstawowej harmonicznej sygnału. Jednak zsumowanie próbek sygnału $y(k)$ w jednym okresie eliminuje podstawową składową harmoniczną, natomiast reszta tworzy sumę N wyrazów ciągu (5.41)

$$X_\Sigma(k) = Ar^{k-N+1} \frac{1-r^N}{1-r}. \quad (5.42)$$

Wartość nieznanego parametru r może być określona jako iloraz dwóch sąsiednich próbek (5.42)

$$r = \frac{X_\Sigma(k)}{X_\Sigma(k-1)}. \quad (5.43)$$

Estymator (5.43) daje poprawną wartość w stanie ustalonym procedury (5.34), podczas gdy w stanie przejściowym, w wyniku występowania szumów mogą być generowane nierealistyczne wielkości. Wartość ilorazu r można łatwo kontrolować ograniczając go do przedziału



Rys. 5.20. Współczynniki p_s oraz p_c (5.39) jako funkcje ilorazu r

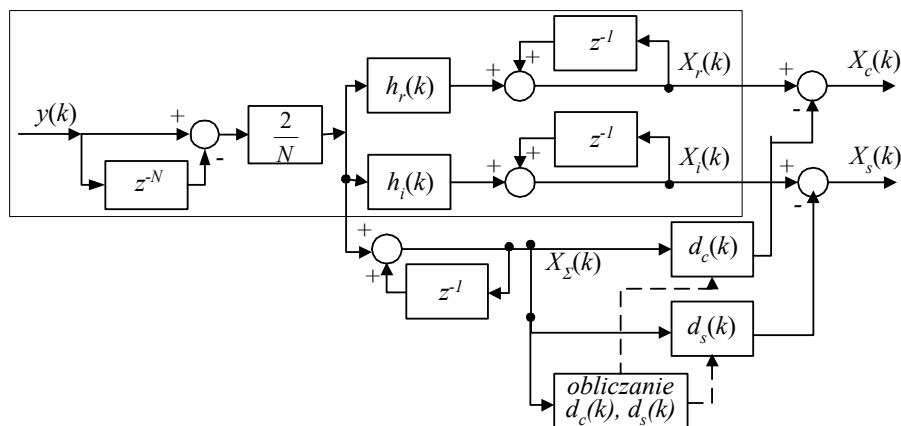
$$1 \leq r \leq r_{\min}, \quad (5.44)$$

gdzie: $r_{\min} = \exp\left(-\frac{T_1}{NT_{a\min}}\right)$, $T_{a\min}$ założona minimalna wartość stałej czasowej zanikania składowej aperiodycznej, która powinna być brana pod uwagę w tej procedurze.

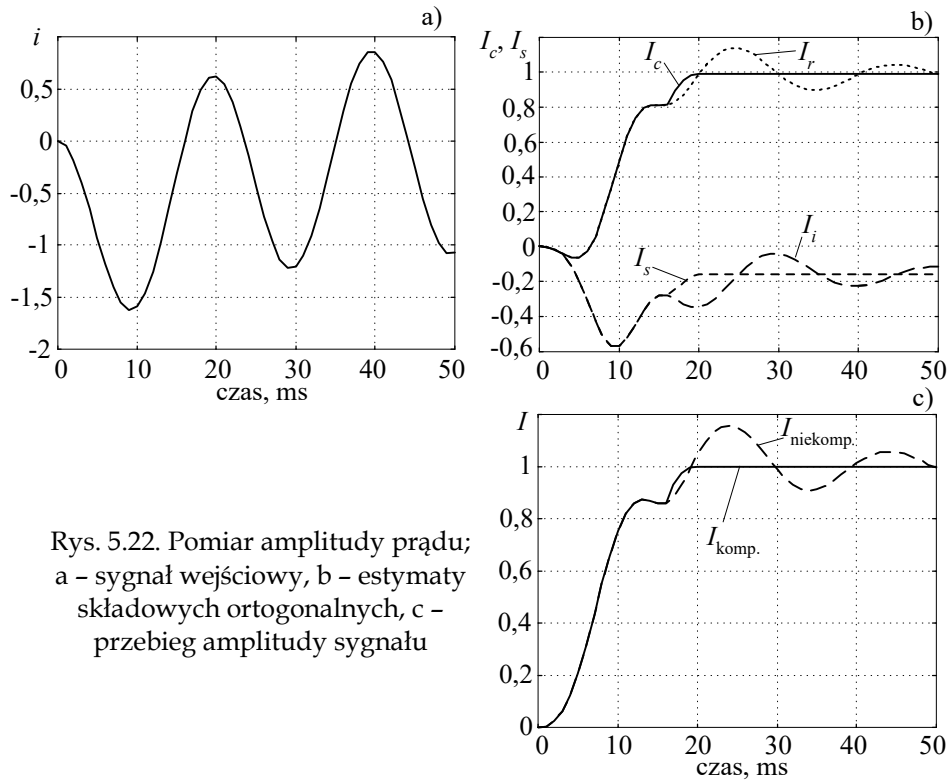
Wartość $T_{a\min}$ można wybrać nie mniejszą niż (2..5) ms, gdyż zakłócenia o krótszej stałej czasowej nie mają wpływu na wartość estymowanych wielkości w filtrze pełnookresowym.

Współczynniki p_c i p_s zależą od parametrów r oraz N . Przebiegi funkcji (5.39) dla $N=20$ oraz $N=40$ są pokazane na rys. 5.20. W rzeczywistych układach pomiarowych funkcje te mogą być zapisane w pamięci komputera w postaci tabelarycznej, co eliminuje konieczność ich obliczania według (5.39).

Ostatecznie, adaptacyjna korekcja, uwzględniająca amplitudę oraz stałą czasową zakłócenia aperiodycznego jest wprowadzana zgodnie z (5.35). Struktura estymatora jest pokazana na rys. 5.21. Obszar zaznaczony linią kreskową przedstawia klasyczny pełnookresowy algorytm Fouriera, a pozostała część odpowiada algorytmowi korekcyjnemu. Przykład ilustrujący efektywność korekcji jest pokazany na rys. 5.22. Zakłócająca składowa aperiodyczna jest identyfikowana zgodnie z podaną powyżej metodą. Widać, że uzyskany estymator składowych ortogonalnych jest odporny na tego typu zakłócenie. Korekcja jest wprowadzana tylko w przypadku pojawienia się omawianego zakłócenia, co jest związane z wystąpieniem odpowiednio dużej wartości $X_s(k)$. Właściwości statyczne estymatora, a więc i



Rys. 5.21. Struktura algorytmu adaptacyjnej estymacji składowych ortogonalnych



Rys. 5.22. Pomiar amplitudy prądu;
 a – sygnał wejściowy, b – estymaty
 składowych ortogonalnych, c –
 przebieg amplitudy sygnału

charakterystyka częstotliwościowa, są takie same, jak pełnokresowego estymatora Fouriera (rys. 3.7).

Powyższą metodę można także stosować w odniesieniu do algorytmu półokresowego. W tym przypadku równania (5.32) przyjmą następującą postać:

$$\begin{aligned} X_c(k) &= \frac{4}{N} \sum_{i=0}^{N/2-1} (\cos(a(k-i)) - d_c(k)) y(k-i), \\ X_s(k) &= \frac{4}{N} \sum_{i=0}^{N/2-1} (\sin(a(k-i)) - d_s(k)) y(k-i). \end{aligned} \quad (5.45)$$

Stosując również trójstanowy estymator MNK, jak w (3.115)-(3.121), można otrzymać macierz odwrotną \mathbf{P}_G^{-1} (3.117), dla której zakłada się następujący warunek:

$$q_{13} = q_{23} = 0. \quad (5.46)$$

Ponieważ celem pomiaru są tylko dwie pierwsze zmienne $X_c(k)$, $X_s(k)$ w trójelementowym wektorze niewiadomych $\hat{\mathbf{x}}(k)$, więc zgodnie z

warunkiem (5.46)) w estymatorze (3.96) można pominąć ostatni wiersz. W ten sposób w macierzy \mathbf{P}_G^{-1} (3×3) można dalej rozpatrywać tylko podmacierz utworzoną z dwóch pierwszych wierszy i kolumn

$$\mathbf{P}_S^{-1} = \{q_{ij}\}, \quad i, j = 1..2. \quad (5.47)$$

Warunek (5.46) określa sposób obliczenia współczynników $d_c(k)$, $d_s(k)$:

$$q_{13} = \sum_{j=0}^{N/2-1} (\cos(a(k-j)) - d_c(k)) \exp(b(N/2 - j - 1)) = 0, \quad (5.48)$$

$$q_{23} = \sum_{j=0}^{N/2-1} (\sin(a(k-j)) - d_s(k)) \exp(b(N/2 - j - 1)) = 0, \quad (5.49)$$

skąd

$$d_c(k) = \frac{\sum_{j=0}^{N/2-1} \cos(a(k-j)) \exp(b(N/2 - j - 1))}{\sum_{j=0}^{N/2-1} \exp(b(N/2 - j - 1))}, \quad (5.50)$$

$$d_s(k) = \frac{\sum_{j=0}^{N/2-1} \sin(a(k-j)) \exp(b(N/2 - j - 1))}{\sum_{j=0}^{N/2-1} \exp(b(N/2 - j - 1))}, \quad (5.51)$$

co po uproszczeniu, prowadzi do

$$\begin{aligned} d_c(k) &= p_s h_i(k) + p_c h_r(k), \\ d_s(k) &= p_c h_i(k) - p_s h_r(k), \end{aligned} \quad (5.52)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} p_c &= g(r - \cos a), \\ p_s &= g \sin a, \end{aligned} \quad (5.53)$$

$$g = \frac{(1 + r^{N/2})(1 - r)}{(1 - r^{N/2})(\cos a - r)^2 + \sin^2 a}, \quad (5.54)$$

$h_r(k)$, $h_i(k)$ - jak w (5.37), r - jak w (5.40).

Można zauważyć symetrię w wyrażeniach określających korekcyjne współczynniki d_c, d_s w algorytmie pełnokresowym (5.38) i półokresowym (5.52). Tym razem jednak estymacja parametru r jest nieco bardziej złożona.

Podobnie, jak w przypadku korektora pełnokresowego, wstępnie zakłada się, że stała czasowa zanikania składowej aperiodycznej, a zatem również zmienna r jest znana, co pozwala określić składniki macierzy $\mathbf{P}_s(k)$ w (5.47). Cztery wyrazy macierzy odwrotnej, które można traktować jako współczynniki wzmocnienia algorytmu (filtru) są określone następująco:

$$q_{11} = \sum_{j=0}^{N/2-1} (\cos(a(k-j)) - d_c(k)) \cos(a(k-j)), \quad (5.55)$$

$$q_{12} = \sum_{j=0}^{N/2-1} (\cos(a(k-j)) - d_c(k)) \sin(a(k-j)), \quad (5.56)$$

$$q_{21} = \sum_{j=0}^{N/2-1} (\sin(a(k-j)) - d_s(k)) \cos(a(k-j)), \quad (5.57)$$

$$q_{22} = \sum_{j=0}^{N/2-1} (\sin(a(k-j)) - d_s(k)) \sin(a(k-j)). \quad (5.58)$$

Można zauważyć, że współczynniki te zmieniają się w czasie. Po uproszczeniu otrzymuje się:

$$q_{11}(k) = \frac{N}{4} - d_c(k) \frac{\sin(ak + a/2)}{\sin a/2}, \quad (5.59)$$

$$q_{12}(k) = d_c(k) \frac{\cos(ak + a/2)}{\sin a/2}, \quad (5.60)$$

$$q_{22}(k) = \frac{N}{4} + d_s(k) \frac{\cos(ak + a/2)}{\sin a/2}, \quad (5.61)$$

$$q_{21}(k) = -d_s(k) \frac{\sin(ak + a/2)}{\sin a/2}. \quad (5.62)$$

Współczynniki (5.59)-(5.62) określają macierz $\mathbf{P}_s(k)$. Ostateczna postać algorytmu jest zgodna z (3.96)

$$\mathbf{x}_s(k) = \mathbf{P}_s(k) \mathbf{H}_s^T(k) \mathbf{y}(k), \quad (5.63)$$

gdzie: $\mathbf{x}_s(k) = [X_c(k), X_s(k)]^T$,

przy czym macierz \mathbf{H}_s jest utworzona z dwóch pierwszych kolumn macierzy \mathbf{H}_G (3.115).

Zależność (5.63) można sprowadzić do następującej postaci:

$$\begin{aligned} X_c(k) &= p_{11}(k)X_p(k) + p_{12}(k)X_q(k), \\ X_s(k) &= p_{21}(k)X_p(k) + p_{22}(k)X_q(k), \end{aligned} \quad (5.64)$$

gdzie:

$$X_p(k) = \sum_{j=0}^{N/2-1} (h_r(k-j) - d_c(k))y(k-j), \quad (5.65)$$

$$X_q(k) = \sum_{j=0}^{N/2-1} (h_i(k-j) - d_s(k))y(k-j), \quad (5.66)$$

natomiast współczynniki p_{ij} można otrzymać w rezultacie odwrócenia macierzy

$$\mathbf{P}_s = \{p_{ij}\} = \{q_{ij}\}^{-1}, \quad i, j = 1..2, \quad (5.67)$$

co jest równoważne następującym prostym zależnościom:

$$\begin{aligned} p_{11}(k) &= \frac{q_{22}(k)}{d}, \quad p_{12}(k) = \frac{-q_{12}(k)}{d}, \\ p_{21}(k) &= \frac{-q_{21}(k)}{d}, \quad p_{22}(k) = \frac{q_{11}(k)}{d}, \end{aligned} \quad (5.68)$$

przy czym, $d = \frac{N}{4} \left(\frac{N}{4} - g(r+1) \right)$.

Stosowanie algorytmu (5.64) wymaga jeszcze określenia parametru r , który teraz powinien być estymowany na podstawie danych z ostatniej połowy okresu. Wyrażenia (5.65), (5.66) można przedstawić w następującej postaci

$$\begin{aligned} X_p(k) &= X_r(k) - d_c(k)X_\Sigma(k), \\ X_q(k) &= X_i(k) - d_s(k)X_\Sigma(k), \end{aligned} \quad (5.69)$$

gdzie:

$$X_r(k) = \sum_{j=0}^{N/2-1} h_r(k-j)y(k-j), \quad (5.70)$$

$$X_i(k) = \sum_{j=0}^{N/2-1} h_i(k-j)y(k-j), \quad (5.71)$$

przedstawia półokresowy algorytm Fouriera (z pominięciem współczynników skalujących), natomiast

$$X_\Sigma(k) = \sum_{j=0}^{N/2-1} y(k-j), \quad (5.72)$$

jest sumą próbek sygnału w półokresie.

Łatwo zauważyć, że analogicznie do równań (5.33)-(5.35), zależności (5.70), (5.71) można przedstawić w postaci rekursywnej:

$$\begin{aligned} X_r(k) &= X_r(k-1) + h_r(k)\Delta y(k), \\ X_i(k) &= X_i(k-1) + h_i(k)\Delta y(k), \end{aligned} \quad (5.73)$$

gdzie:
$$\Delta y(k) = y(k) + y(k - N/2) \quad (5.74)$$

oraz
$$X_\Sigma(k) = X_\Sigma(k-1) + y(k) - y(k - N/2). \quad (5.75)$$

Parametr r może być określony na podstawie analizy półokresowej uproszczonej transformaty Walsh'a wejściowego sygnału $y(k)$ (3.79). Postać rekursywna algorytmu jest następująca

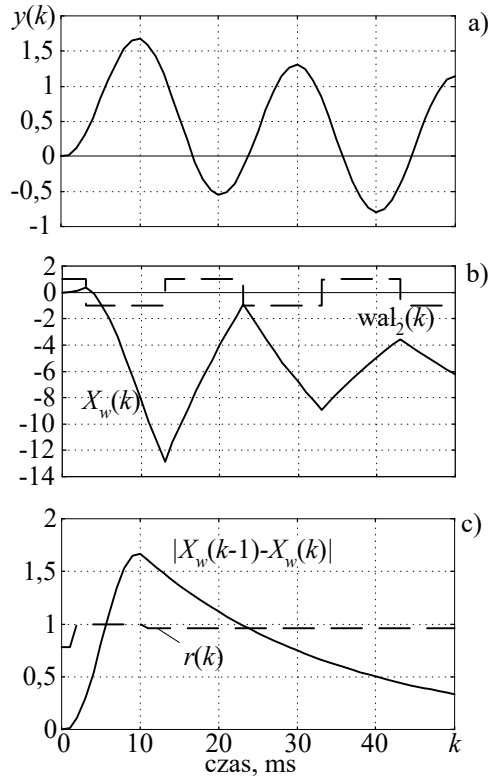
$$X_w(k) = X_w(k-1) + \text{wal}_2(k)\Delta y(k), \quad (5.76)$$

gdzie: $\text{wal}_2(k)$ jest funkcją prostokątną o wartościach ± 1 , jak w (3.76).

Można sprawdzić, że jeśli sygnał wejściowy $y(k)$ ma postać jak w (5.28), to wyrażenie $\text{abs}(X_w(k) - X_w(k-1))$ jest proporcjonalne do składowej aperiodycznej zawartej w tym sygnale. Zatem parametr r jako estymata funkcji $\exp(b)$ (5.40) może być określony na podstawie następującego związku:

$$r = r(k) = \frac{|X_w(k) - X_w(k-1)|}{|X_w(k-1) - X_w(k-2)|}. \quad (5.77)$$

Przykładowy przebieg funkcji $r(k)$ i jej relacja do innych sygnałów stosowanych w procedurze są pokazane na rys. 5.23. Można zauważyć, że



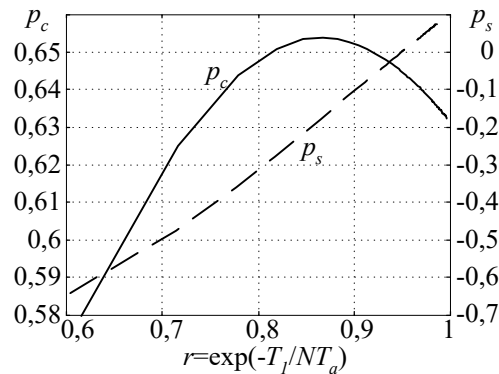
Rys. 5.23. Kolejne etapy określania funkcji $r(k)$; $N = 20$

poprawna wartość tej funkcji jest dostępna po $N/2+1$ próbkach. Do stabilizacji uzyskanego wyniku można także korzystać z warunku (5.44)).

W ten sposób, poszukiwany estymator półokresowy został w pełni określony. Widać, że najbardziej złożona obliczeniowo jest operacja określania współczynników p_c oraz p_s (5.53). Można jednak zauważyć, że dla danej wartości kąta a (co zależy od przyjętej częstotliwości próbkowania), współczynniki te są regularnymi funkcjami parametru r . Ich przebiegi dla $N = 20$ są pokazane na rys. 5.24. Funkcje te mogą być z dużą dokładnością aproksymowane wielomianami 2-stopnia

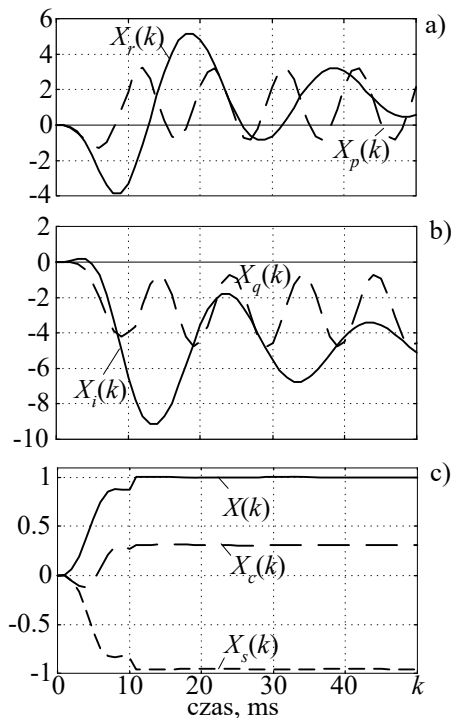
$$\begin{aligned} p_c &= a_1 + r(a_2 + ra_3), \\ p_s &= b_1 + r(b_2 + rb_3), \end{aligned} \quad (5.78)$$

gdzie: stałe współczynniki a_i, b_i , $i = 1..3$ można łatwo otrzymać stosując algorytm MNK.



Rys. 5.24. Współczynniki p_s oraz p_c w algorytmie półokresowym; $N=20$

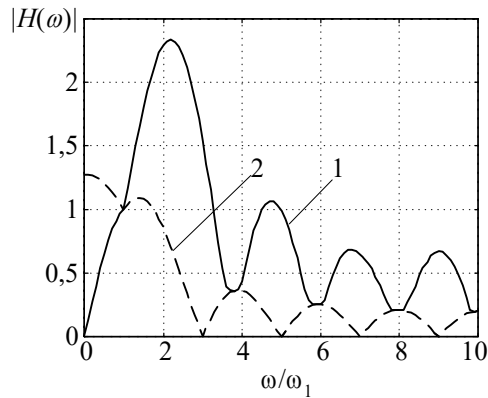
Przebieg niektórych sygnałów tworzonych w algorytmie pokazany jest na rys. 5.25. Współczynniki $p_{11}(k), \dots, p_{22}(k)$, które są stosowane w końcowej korekcji (5.68) mają formę odpowiednio przesuniętych sygnałów



Rys. 5.25. Sygnały tworzone w półokresowym algorytmie adaptacyjnym; $N=20$

sinusoidalnych o częstotliwości drugiej harmonicznej. Charakterystyka częstotliwościowa algorytmu półokresowego jest pokazana na rys. 5.26. Widać, że w tym przypadku tłumienie sygnałów w zakresie niskiej częstotliwości odbywa się kosztem wzmocnienia w pozostałym paśmie. Można również zauważyć, że charakterystyka estymatora adaptacyjnego jest identyczna z charakterystyką algorytmu, w którym przesunięta została funkcja impulsowa kosinus w celu eliminacji składowej stałej (rys. 3.19).

Struktura algorytmów pełno- i półokresowego jest bardzo podobna. Sumując powyższe wywody można podać następujący algorytm estymacji składowych ortogonalnych sygnału zakłóconego tłumioną składową stałą. W



Rys. 5.26. Charakterystyka częstotliwościowa półokresowego algorytmu adaptacyjnego (1) oraz Fouriera (2); $N = 20$

nawiasach klamrowych podano stosowne odniesienia dla algorytmu półokresowego.

Algorytm 5.1. *Pełnookresowa {półokresowa} estymacja składowych ortogonalnych w obecności zakłócającej składowej aperiodycznej.*

- Na etapie projektowania algorytmu: dla przyjętej częstotliwości próbkowania określić współczynniki równania (5.78), które powinny aproksymować funkcje (5.39) {(5.53)}.
- Stosując w kolejnym kroku próbkowania pełnookresowy {półokresowy} algorytm Fouriera obliczyć składowe ortogonalne $X_r(k)$, $X_i(k)$ jak w (5.33) {(5.73)}.
- Obliczyć kolejną wartość funkcji $X_\Sigma(k)$ (5.34) {półokresowej transformaty Walsh $X_w(k)$ (5.75)}. Jeśli $X_\Sigma(k-1) < \varepsilon_a$ { $\text{abs}(X_w(k-1) - X_w(k-2)) < \varepsilon_a$ }, (ε_a - założona minimalna wartość powyżej której należy prowadzić korekcję składowej aperiodycznej), to przyjąć, że $X_c(k) = X_r(k)$ oraz $X_s(k) = X_i(k)$ i przejść na koniec algorytmu.
- W następujących krokach obliczyć wartości współczynników $d_c(k)$ i $d_s(k)$:
 - określić parametr r zgodnie z (5.43) {(5.77)} wraz z odpowiednią korekcją (5.44);
 - na podstawie (5.78) określić współczynniki p_c i p_s ;
 - określić wartość $d_c(k)$ oraz $d_s(k)$ zgodnie z (5.38) {(5.52)}.
- Pominąć {obliczyć współczynniki $p_{11} - p_{22}$ (5.68) oraz $X_p(k)$ i $X_q(k)$ (5.69)}.
- Określić skorygowane wartości składowych ortogonalnych $X_c(k)$, $X_s(k)$ na podstawie (5.35) {(5.64)}. □

Poniższy przykład ilustruje właściwości przedstawionego algorytmu.

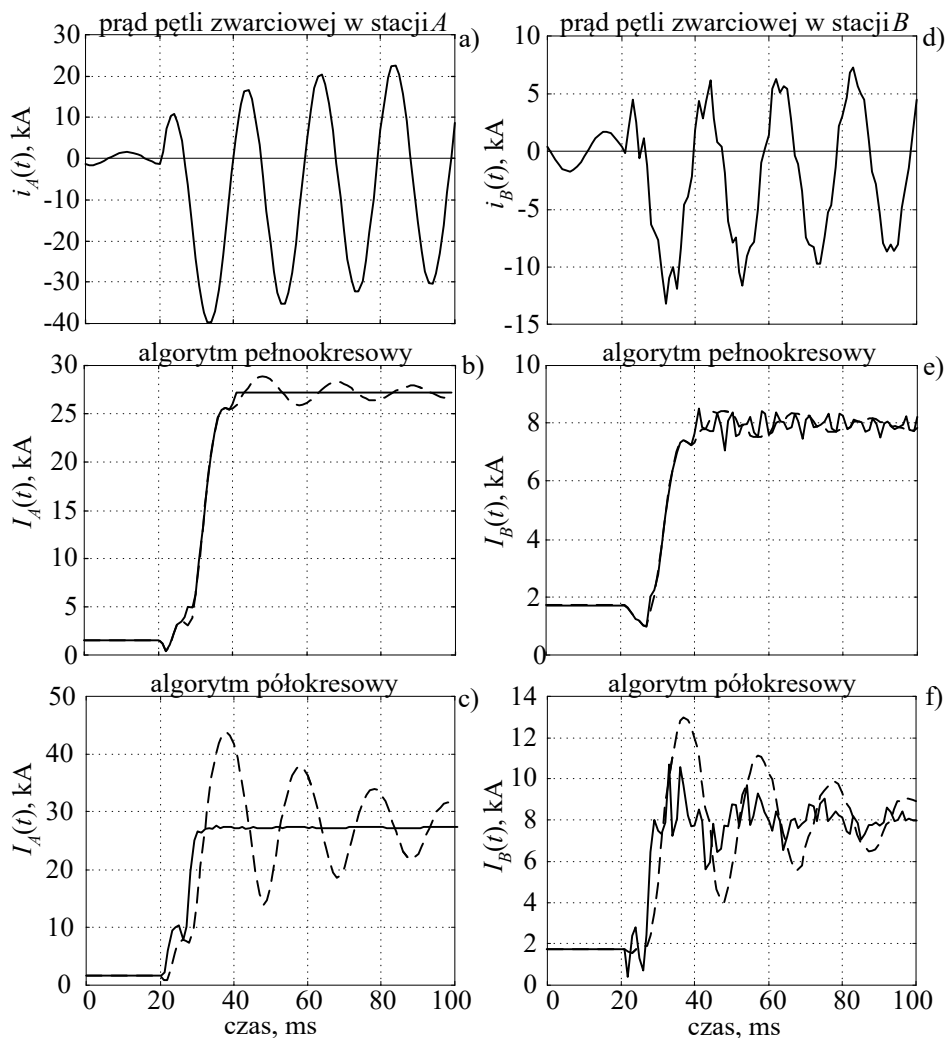
Przykład 5.3. W systemie 400 kV, 50 Hz, pokazanym na rys. 1.3 zostało zamodelowane zwarcie dwufazowe L1-L2 w odległości 20 km od stacji A; rezystancja zwarcia $R_f = 0,01\Omega$. Sygnały prądowe są próbkowane z częstotliwością 1000 Hz w stacji A oraz B. W torze pomiarowym zastosowano filtry odcinające $f_c = 350\text{Hz}$. Do estymacji składowych ortogonalnych prądu pętli zwarcio-owych w stacji A oraz B zastosować przedstawione algorytmy z korekcją składowej aperiodycznej.

Przebiegi prądów w pętlach zwarcio-owych: $i_A(t) = i_{AL1}(t) - i_{AL2}(t)$ oraz $i_B(t) = i_{BL1}(t) - i_{BL2}(t)$ są pokazane odpowiednio na rys. 5.27a,d. Rezultaty estymacji amplitudy za pomocą algorytmów pełnookresowych przedstawione są na rys. 5.27b,e. Linia kreskowana odnosi się do standardowego algorytmu Fouriera, natomiast linią ciągłą zaznaczono wyniki uzyskane z zastosowania algorytmu adaptacyjnego. Analogicznie, rezultaty stosowania algorytmów półokresowych są pokazane na rys. 5.27c,f.

Można zauważyć następujące prawidłowości:

- w przypadku sygnału zawierającego składową podstawową, składową aperiodyczną oraz nieznaczne udziały wyższych harmoniczných (rys. 5.27a), korzyści stosowania przedstawionego algorytmu adaptacyjnego są ewidentne: zarówno w wersji pełnookresowej (5.27b), jak i w wersji półokresowej (5.27c);
- nieco gorsze są właściwości omawianego algorytmu w przypadku występowania w sygnale zakłóceń o wysokich częstotliwościach (rys. 5.27d) – jednak również w tym przypadku uzyskuje się wynik dokładniejszy od stosowania klasycznego podejścia. □

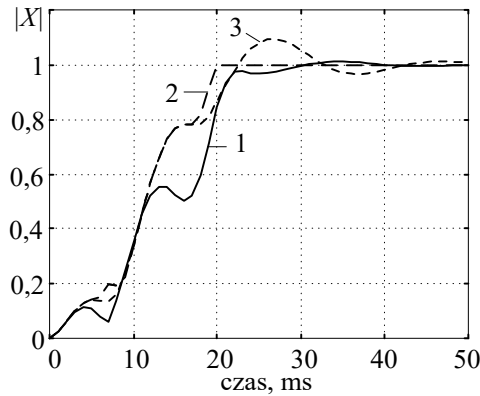
W wielu zastosowaniach czas odpowiedzi estymatora składowych ortogonalnych nie jest bardzo krytyczny. Można wówczas użyć bardzo prostej metody eliminacji wpływu składowej aperiodycznej na wynik pomiaru. Odpowiednia procedura jest realizowana w dwóch krokach: - korelacja sygnału z funkcją typu kosinus (algorytm pełnookresowy z oknem o szerokości N próbek), - utworzenie drugiej składowej ortogonalnej przez opóźnienie uzyskanego wyniku o liczbę próbek odpowiadającą kątowemu $\pi/2$ ($N/4$ próbek) [17], [18]. Algorytm przyjmuje zatem następującą postać:



Rys. 5.27. Wynik pomiarów amplitudy prądu I_{L1-L2} w stacji A oraz B (rys. 1.3) za pomocą pełnokresowego (b, e) oraz półokresowego (c, f) algorytmu Fouriera; ciągłą linią zaznaczono rezultat korekcji składowej aperiodycznej; $N = 20$

$$x_c(k) = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \cos(ai)y(k-i),$$

$$x_s(k) = x_c\left(k - \frac{N}{4}\right).$$
(5.79)



Rys. 5.28. Odpowiedzi algorytmów pomiaru amplitudy: 1 - z przesunięciem sygnału (5.79), 2 - algorytmu adaptacyjnego (5.35), 3 - pełnookresowego algorytmu Fo-

Procedura (5.79) daje dobre tłumienie składowej aperiodycznej, szczególnie gdy stała czasowa zanikania T_a jest bliska okresowi składowej podstawowej T_1 . Na rys. 5.28 pokazano rezultaty estymacji amplitudy sygnału za pomocą trzech prezentowanych metod. Należy zauważyć, że estymator (5.79) wprowadza dodatkowe opóźnienie o wartości $N/4$ próbek. Charakterystyka częstotliwościowa estymatora jest pokazana na rys. 4.14.

5.5 Błędy wynikające ze zmiany częstotliwości sygnału

W większości rozpatrywanych procedur pomiarowych zakłada się, że częstotliwość wejściowych sygnałów prądu i napięcia jest stała, równa częstotliwości znamionowej. To założenie nie zawsze jest spełnione, a odchyłka częstotliwości od założonej wartości prowadzi do błędów estymacji. Analizę tych błędów można prowadzić na podstawie charakterystyki częstotliwościowej użytego algorytmu. Z praktycznego punktu widzenia ważne jest poszukiwanie algorytmów, które eliminują lub redukują błędy wynikające ze zmiany częstotliwości sygnału. Można wyróżnić następujące sposoby postępowania (zakłada się, że celem pomiaru jest określenie składowych sygnału zespolonego):

- włączenie nieznannej częstotliwości do modelu sygnałowego procesu, co pozwala uwzględnić aktualną wartość częstotliwości w estymatorze sygnału zespolonego;
- stosowanie oddzielnego pomiaru częstotliwości i odpowiednia korekta uzyskanych wyników pomiaru składowych ortogonalnych prądu i napięcia;
- synteza algorytmów, w których wpływ częstotliwości jest wyeliminowany lub istotnie zredukowany.

Naturalnym sposobem eliminacji rozpatrywanego problemu jest przyjęcie częstotliwości w charakterze parametru estymacji. Prowadzi to jednak do złożonych algorytmów, takich jak nieliniowa metoda najmniejszych kwadratów (p. 3.4.4) lub rozszerzony filtr Kalmana (p. 3.6.2), których stosowanie jest często niemożliwe ze względu na ograniczenia sprzętowe. Problemem może być także stabilność wspomnianych algorytmów jeśli mogą wystąpić gwałtowne zmiany częstotliwości.

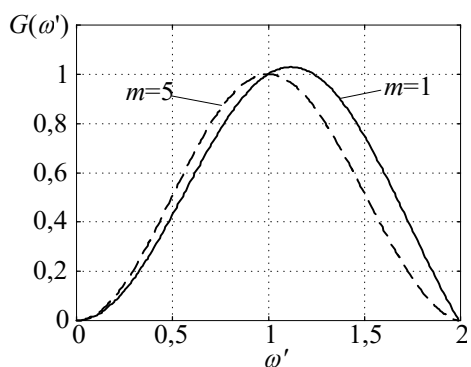
Bezpośrednia korekcja wyników estymacji sygnału zespolonego w zależności od zmian częstotliwości może być bardzo kłopotliwa. Pokazują to równania (4.19) oraz (4.23) przedstawiające ogólną postać estymat sygnałów zespolonych uzyskanych, odpowiednio, na drodze filtracji lub korelacji. Zależność od częstotliwości jest wyrażona funkcją uwikłaną, co utrudnia wykorzystanie informacji o wartości częstotliwości ω' . Poniżej analizowane są te problemy dla estymatorów wybranych wielkości kryterialnych.

5.5.1 Błędy pomiaru amplitudy

Algorytmy pomiaru amplitudy są analizowane przy okazji estymacji sygnału zespolonego w p. 4.3. Zależność wartości amplitudy mierzonego sygnału od częstotliwości jest określona przez charakterystykę częstotliwościową estymatora zgodnie z (4.27):

$$|X(\omega')| = YG(\omega'),$$

gdzie: $G(\omega')$ określa wzmocnienie estymatora i najczęściej zależy od chwilowej fazy sygnału, jak w (4.28). To znacznie utrudnia korekcję.



Rys. 5.29. Charakterystyka częstotliwościowa estymatora amplitudy dla dwóch różnych wartości opóźnień m

Wady tej pozbawiony jest estymator amplitudy (4.26), którego charakterystyka częstotliwościowa (4.31) nie zależy od fazy sygnału wejściowego (rys. 4.8). Przebieg tej charakterystyki w przedziale $\omega' = (0..2)$ dla dwóch różnych wartości przesunięcia m w (4.26) jest pokazany na rys. 5.29.

Znajomość tej charakterystyki w postaci zależności (4.50) bezpośrednio prowadzi do następującego estymatora amplitudy, w

szerokim zakresie odpornego na zmiany częstotliwości [5]:

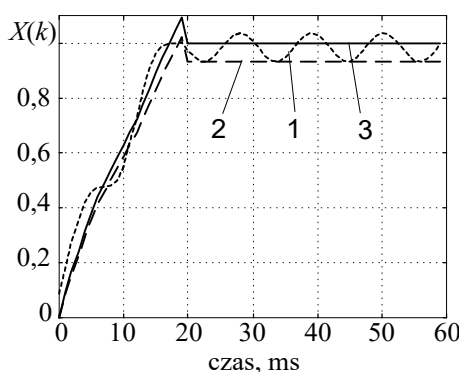
$$X_k(k, \omega') = X_k(\omega') = \frac{1}{G(\omega')} \sqrt{\frac{x_s(k)x_c(k-m) - x_c(k)x_s(k-m)}{\sin(\omega'_0 am)}}, \quad (5.80)$$

gdzie: $G(\omega')$ – wzmacnienie estymatora (4.50), ω'_0 – częstotliwość, dla której estymator został zaprojektowany.

Składowe ortogonalne w (5.80) należy określić zgodnie z algorytmem filtracyjnym lub korelacyjnym z przesuwającymi się funkcjami bazowymi. Na przykład, w przypadku pełnookresowego algorytmu Fouriera, należy stosować procedury (3.36) lub (3.40). Jeśli do estymacji składowych ortogonalnych stosowany jest algorytm korelacyjny z przesuwającym się oknem czasowym (co może być uzasadnione ze względu na jego prostą postać rekursywną (3.60)), to estymator (4.26) należy zastąpić odpowiednio procedurą (4.34).

Stosowanie zależności (5.80) wymaga bieżącego pomiaru częstotliwości ω' , na podstawie której obliczana jest wartość funkcji $G(\omega')$. Procedurę tę można znacznie uprościć, jeśli funkcja $G(\omega')$ zostanie wcześniej obliczona i zapisana w postaci tablicy w pamięci komputera. Funkcję tę można także zapisać w postaci dogodniejszej do obliczeń przez aproksymację według algorytmu MNK.

Efekt korekcji błędu pomiaru amplitudy od zmian częstotliwości jest pokazany na rys. 5.30. Rysunek przedstawia przebiegi amplitud uzyskane przy pomiarze sygnału sinusoidalnego o częstotliwości względnej $\omega' = 0,9$ i amplitudzie równej 1 według trzech różnych metod: klasycznego algorytmu (4.27) – linia kropkowana, algorytmu (4.26) z przesunięciem $m = 1$ – linia kreskowa oraz tego samego algorytmu z korekcją zgodnie z (5.80) – linia ciągła.



Rys. 5.30. Odpowiedź estymatorów amplitudy na sygnał o częstotliwości $\omega' = 0,9$:
1 – estymator (4.27), 2 – estymator (4.26),
3 – estymator (5.80)

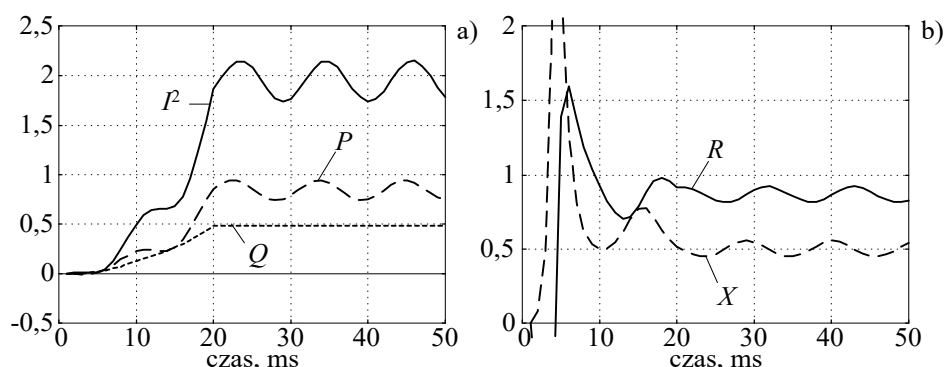
We wszystkich rozpatrywanych przypadkach składowe ortogonalne zostały wyznaczone według pełnookresowego filtracyjnego algorytmu Fouriera. Widać, że w ostatnim przypadku poprawny pomiar stabilizuje się po czasie równym sumie okresu

składowej podstawowej i jednej próbki przesunięcia. W przypadku stosowania klasycznego algorytmu wyznaczenia modułu sygnału zespolonego (krzywa 1) wynik oscyluje z częstotliwością zbliżoną do drugiej harmonicznej. Amplituda tych oscylacji jest określona przez wartości górnej ($A(\omega')$) i dolnej ($B(\omega')$) obwiedni charakterystyki częstotliwościowej estymatora dla analizowanej częstotliwości (rys. 4.5).

5.5.2 Błędy pomiaru mocy i impedancji

W celu analizy wpływu zmian częstotliwości na pomiar składowych impedancji zostaną rozpatrzone estymatory (4.87). Można zauważyć, że wpływ zmian częstotliwości na dokładność pomiaru impedancji zależy od podatności na te zmiany algorytmów pomiaru amplitudy prądu oraz mocy czynnej P i biernej Q . Przebieg tych wielkości w przypadku zastosowania klasycznego pełnookresowego algorytmu Fouriera do estymacji składowych ortogonalnych jest pokazany na rys. 5.31. Wejściowe sygnały prądu i napięcia są takie, jak w (4.84), przy czym, $\omega' = 0,9$. Widać, że przebiegi kwadratu prądu i mocy czynnej wykazują oscylacje, co jest zgodne z ich charakterystykami częstotliwościowym. Estymator mocy biernej ma charakterystykę niezależną od fazy w całym zakresie zmian częstotliwości (rys. 4.17b), więc również odpowiedź na rys. 5.31a jest niezmienna w stanie ustalonym. Ostatecznie, rezystancja i reaktancja jest mierzona z błędem, którego wartość ma charakter oscylacyjny (rys. 5.31b).

W celu stabilizacji odpowiedzi i korekcji błędów estymatorów można stosować odpowiednio zmodyfikowane algorytmy pomiaru amplitudy



Rys. 5.31. Odpowiedź estymatora impedancji na sygnał o częstotliwości $\omega' = 0,9$: sygnały składowe estymatora (a) oraz zmierzone wartości rezystancji i reaktancji (b)

prądu - zgodnie z (5.80), natomiast do pomiaru mocy czynnej można użyć równania (4.71) z odpowiednim przesunięciem. W ten sposób wszystkie elementy estymatorów (4.87) mają stałe wartości po ustaleniu się odpowiedzi. Pozostaje jeszcze korekcja ich wartości w zależności od aktualnej częstotliwości.

Niech, na przykład, do estymacji składowych ortogonalnych prądu i napięcia w (4.71) zastosowane będą jednakowe, pełnookresowe filtracyjne algorytmy Fouriera. Charakterystykę częstotliwościową estymatora mocy można uzyskać przez podstawienie do (4.71) sygnałów prądu i napięcia poddanych filtracji w odpowiednich filtrach o transmitancji (3.43). Wejściowe sygnały prądu (4.84), zgodnie z (4.10), można przedstawić następująco:

$$\begin{aligned} i_c(k) &= I |H_c(j\omega')| \cos(\omega' ak + \beta - \varphi + \gamma_c(\omega')), \\ i_s(k) &= I |H_s(j\omega')| \cos(\omega' ak + \beta - \varphi + \gamma_s(\omega')) \end{aligned} \quad (5.81)$$

i podobnie dla napięcia:

$$\begin{aligned} u_c(k) &= U |H_c(j\omega')| \cos(\omega' ak + \beta + \gamma_c(\omega')), \\ u_s(k) &= U |H_s(j\omega')| \cos(\omega' ak + \beta + \gamma_s(\omega')), \end{aligned} \quad (5.82)$$

gdzie: $H_c(j\omega') = |H_c(j\omega')| e^{j\gamma_c(\omega')}$, $H_s(j\omega') = |H_s(j\omega')| e^{j\gamma_s(\omega')}$ - transmitancje filtrów, jak w (3.43).

Po podstawieniu (5.81), (5.82) do (4.71) i dokonaniu niezbędnych przekształceń otrzymuje się następującą postać skorygowanego estymatora (należy zauważyć, że $\gamma_s(\omega') - \gamma_c(\omega') = \pi/2$):

$$P_k(k, \omega') = P_k(\omega') = \frac{P(k)}{G_p(\omega')}, \quad (5.83)$$

gdzie:

$$G_p(\omega') = (G(\omega'))^2 = \left| \frac{\sin a \sin(\omega' a) \sin(\omega' am)}{\sin(am)} \right| \left(\frac{\sin(\pi\omega')}{N \sin((\omega'+1)a/2) \sin((\omega'-1)a/2)} \right)^2$$

$P(k)$ - estymator mocy przed korekcją (4.71),

przy czym, $G(\omega')$ ma postać jak w (4.50). Zatem, estymator (4.71) ma charakterystykę częstotliwościową taką samą, jak szeregowo połączone estymatory prądu i napięcia określone zgodnie z (4.26).

Podobną korekcję można przeprowadzić w odniesieniu do estymatora mocy biernej (4.76). W rezultacie, otrzymuje się:

$$Q_k(k, \omega') = Q_k(\omega') = \frac{Q(k)}{G_Q(\omega')}, \quad (5.84)$$

gdzie:

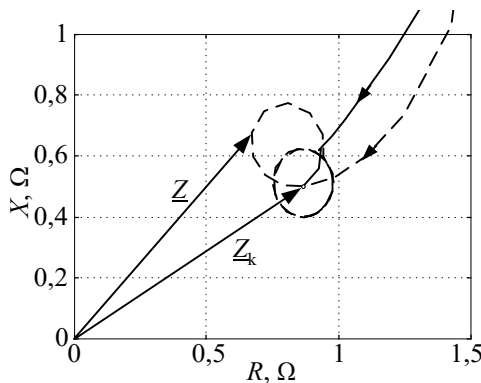
$$G_Q(\omega') = \sin a \sin(\omega' a) \left(\frac{\sin(\pi \omega')}{N \sin((\omega'+1)a/2) \sin((\omega'-1)a/2)} \right)^2 = \frac{\sin(am) G_P(\omega')}{\sin(\omega' am)}.$$

Widać stąd, że jeśli do pomiaru impedancji zastosować estymatory (4.87), w których moc czynna będzie określana zgodnie z (4.71), to używany estymator rezystancji jest całkowicie niewrażliwy na zmianę częstotliwości (ponieważ $G_P(\omega') = (G(\omega'))^2$). Estymator reaktancji należy korygować zgodnie z zależnością:

$$X(k, \omega') = X_k(\omega') = \frac{2Q_k(\omega')}{I_k^2(\omega')} = X(k) \frac{G^2(\omega')}{G_Q(\omega')} = X(k) \frac{\sin(am)}{\sin(\omega' am)}, \quad (5.85)$$

gdzie: $X(k)$ - reaktancja określona na podstawie (4.87).

Na rys. 5.32 pokazane są trajektorie impedancji bezpośrednio przed ustaleniem się i w stanie ustalonym algorytmów: z korekcją od zmian częstotliwości (\underline{Z}_k - krzywa ciągła) oraz bez korekcji (\underline{Z} - krzywa przerywana); sygnały wejściowe prądu i napięcia jak w (4.84), $\omega' = 0,9$. Widać, że w przypadku algorytmu bez korekcji, w stanie ustalonym trajektoria zatacza elipsę wyznaczoną przez błędy pomiaru rezystancji i reaktancji. Przebiegi skorygowanych wielkości są opóźnione o m próbek w związku ze stosowaniem opóźnienia w algorytmach korekcji mocy czynnej i amplitudy.



Rys. 5.32. Trajektoria impedancji dla częstotliwości $\omega' = 0,9$: \underline{Z} - bez korekcji, \underline{Z}_k - z korekcją od zmian częstotliwości

W celu analizy wpływu zmian częstotliwości na estymację impedancji na podstawie równania różniczkowego modelu obwodu zwarciovego (4.91), należy podstawić do (4.94) harmoniczne sygnały prądu i napięcia zgodnie z (4.84). Łatwo pokazać, że otrzymana rezystancja obwodu R nie zależy od częstotliwości, jeśli tylko w zależności (4.95) (i podobnie w (4.99))

sposób aproksymacji napięcia i prądu będzie jednakowy. Błąd estymacji reaktancji $X = \omega L$ zmienia się wraz z częstotliwością według zależności:

$$X(\omega') = \frac{L}{G_L(\omega')}, \quad (5.86)$$

gdzie: $G_L(\omega') = \frac{a}{2\text{tg}\left(\frac{a\omega'}{2}\right)}$, L – indukcyjność określona z równania (4.96)

lub (4.104).

Powyższa analiza pokazuje, że korekcja błędów od zmian częstotliwości może być niekiedy bardzo prosta. Przy wyborze określonego algorytmu warto więc przeprowadzić analizę jego odporności na to zakłócenie.

5.6 Podsumowanie

Większość metod pomiarowych stosowanych w automatyce elektroenergetycznej bazuje na założeniu, że obserwowane sygnały prądu lub napięcia mogą być reprezentowane w postaci modelu sygnału zespolonego. Z tego punktu widzenia, pomiar sprowadza się do estymacji składowych ortogonalnych wektora określonej harmonicznej prądu lub napięcia. Takie podejście daje możliwość wykorzystania znanych zależności definiujących podstawowe wielkości elektryczne, które najczęściej występują także w charakterze wielkości kryterialnych automatyki (amplituda, faza, impedancja, moc itp.).

Pomimo dobrze znanych, klasycznych metod pomiaru tych wielkości, istnieją duże trudności w uzyskaniu dostatecznie dobrych wyników w czasie krótszym niż jeden okres składowej podstawowej napięcia sieci. Nawet ten przedział nie jest łatwo osiągnąć, jeśli w obserwowanym sygnale występują określone zakłócenia. To sprawia, że w dalszym ciągu poszukuje się nowych metod zarówno pomiaru wielkości elektrycznych, jak i oceny stanu nadzorowanego procesu. W tym rozdziale przedstawiono wybrane sposoby skrócenia czasu pomiaru lub eliminacji wpływu niektórych zakłóceń.

Omawiane procedury pomiarowe są określane w rezultacie analizy źródeł błędów pomiarowych. Ze względu na charakter stosowanych algorytmów, rozróżnia się dwie grupy tych błędów:

- błędy ustalonego stanu pomiaru,
- błędy dynamiczne.

Dobrym sposobem oceny algorytmu w stanie ustalonym jest analiza jego charakterystyki częstotliwościowej. W przypadku procedur o stałym oknie pomiarowym, kształt charakterystyki częstotliwościowej w podstawowym stopniu zależy od długości tego okna (a zatem i od opóźnienia pomiaru). Obserwuje się tu znaną sprzeczność, że skrócenie czasu pomiaru prowadzi do uwydatnienia wpływu zakłóceń na jego dokładność - i odwrotnie. Pewien kompromis może być uzyskany w rezultacie stosowania wstępnej filtracji mierzonych sygnałów (ang. *pre-filtering*), a także wygładzania wyników pomiaru (ang. *post-processing*). W tym ostatnim przypadku dobrym rozwiązaniem może być stosowanie filtrów nieliniowych, jak na przykład, filtrów medianowych.

Różne są sposoby skracania długości stanu przejściowego algorytmu pomiarowego. W rozdziale przedstawiono dwa podstawowe podejścia:

- skrócenie okna pomiarowego, co w ogólnym przypadku prowadzi do algorytmu ze zmienną długością okna pomiarowego;
- korekcja stanu przejściowego, w której wykorzystuje się niezależność odpowiedzi proponowanej metody na zmianę fazy mierzonego sygnału.

Ważnym rodzajem zakłóceń w sygnałach wejściowych układów automatyki elektroenergetycznej jest składowa aperiodyczna, która może być szczególnie wydatna w prądach zwarciovych. W niniejszym rozdziale podano oryginalny algorytm pomiaru składowych ortogonalnych sygnału, który jest całkowicie niewrażliwy na występowanie tego typu zakłócenia, niezależnie od amplitudy i stałej czasowej zanikania. Przeprowadzono również szczegółową analizę proponowanej metody.

Przedstawiona jest również krótka analiza wpływu zmiany częstotliwości systemu na dokładność pomiaru podstawowych wielkości kryterialnych. Problem wrażliwości metod pomiarowych na zmianę częstotliwości podstawowej może mieć istotne znaczenie w przypadku znacznych lokalnych zmian częstotliwości sieci (na przykład, przy wydzielonej pracy systemu).

5.7 Literatura

- [1] Adamiak M.G., Alexander G.E., Premerlani W.: *A new approach to current differential protection for transmission lines*. Texas A&M University Conference for Protective Relay Engineers, College Station, Texas, April 5-8, 1998.

- [2] Benmouyal G.: *Removal of DC-offset in current waveforms using digital mimic filtering*. IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 10, No 2, April 1995, ss. 621-628.
- [3] Iżykowski J., Kasztenny B., Rosołowski E, Saha M.M., Hillstrom B.: *Dynamic compensation of capacitive voltage transformers*. IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 13, No 1, January 1998, ss. 116-122.
- [4] Johnes A.T., Salman S.K.: *Digital Protection for Power Systems*. Peter Peregrinus Ltd. IEE Power Series 15, London 1995.
- [5] Kasztenny B., Rosołowski E.: *Two new measuring algorithms for generator and transformer relaying*. IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 13, No 4, October 1998, ss. 1053-1059.
- [6] Li K.K.: *An adaptive window length algorithm for accurate high speed digital distance protection*. Electrical Power & Energy Systems, Vol. 19, No 6, 1997, ss. 375-383
- [7] Łukowicz M., Rosołowski E., Iżykowski J.: *Zastosowanie sztucznych sieci neuronowych do kompensacji błędów pojemnościowych przekładników napięciowych*. Przegląd Elektrotechniczny, R. LXXV 9/1999, ss. 224-229.
- [8] Mitra S.K., Kaiser J.F. (ed.): *Handbook for digital signal processing*. John Wiley & Sons, Inc. New York 1993.
- [9] Phadke A.G., Thorp J.S.: *Computer Relaying for Power Systems*. Research Studies Press Ltd. Taunton, Somerset 1994.
- [10] Rosołowski E.: *Analiza algorytmów cyfrowych zabezpieczeń elektroenergetycznych*. Prace Naukowe Instytutu Energoelektryki Pol. Wr. nr 88. Wydawnictwo Pol. Wr., Wrocław 1992.
- [11] Rosołowski E., Szafran J.: *Fast estimation of protection criterion values using dynamical correction*. Proceedings of the Eleventh Power Systems Computation Conference, Avignon, France, August 30 -September 3, 1993, Vol. II, ss. 805-811.
- [12] Rosołowski E., Szafran J.: *Dynamically Corrected Fast Estimators of Current and Voltage Magnitude*. IEE Proc.-Gener. Transm. Distrib., Vol. 142, No 3, May 1995, ss. 310-316.
- [13] Rosołowski E., Szafran J.: *Cyfrowe metody szybkiej estymacji amplitudy sygnału z korekcją stanu przejściowego*. Archiwum Elektrotechniki, tom XLIII, zeszyt 3, ss. 561-575.
- [14] Rosołowski E.: *Rekursywny algorytm eliminacji składowej aperiodycznej w sygnale zabezpieczeniowym*. Archiwum Elektrotechniki, tom XL, 1991, zeszyt 3/4, ss. 517-531.
- [15] Rosołowski E.: *Adaptacyjny algorytm eliminacji składowej aperiodycznej w sygnale zabezpieczeniowym*. Przegląd Elektrotechniczny, R. LXXVI 3/2000, ss. 57-61.
- [16] Rosołowski E., Iżykowski J., Kasztenny B.: *Adaptive measuring algorithm suppressing a decaying DC component for digital protective relay*. Electric Power System Research, 60 (2001), ss. 99-105.

- [17] Schweitzer E.O., Hou D.: *Filtering for protective relays*. 19th Annual Western Protective Relay Conference. Spokane, Washington 1992.
- [18] Szafran J.: *Rozpoznawanie sygnałów w cyfrowej automatyce zabezpieczeniowej*. Prace Naukowe Instytutu Energoelektryki Pol. Wr. nr 83. Wydawnictwo Pol. Wr., Wrocław 1990.
- [19] Szafran J., Rebizant W.: *Estymatory składowych impedancji niewrażliwe na wahania częstotliwości*. Przegląd Elektrotechniczny, R. LXXIV 4/1998, ss. 92-95.
- [20] Winkler W., Wiszniewski A.: *Automatyka zabezpieczeniowa w systemach elektroenergetycznych*. WNT. Warszawa 1999.
- [21] Wiszniewski A.: *New Algorithm of Calculating Current and Voltage Phasors for Fast Protection*. IEE Proc., Pt. C, Vol. 134, No 1, January 1987, ss. 87-88.
- [22] Wiszniewski A.: *Algorytmy pomiarów cyfrowych w automatyce elektroenergetycznej*. WNT. Warszawa 1990.
- [23] Wiszniewski A.: *Przekładniki w elektroenergetyce*. WNT. Warszawa 1995.
- [24] Wiszniewski A.: *Digital High-Speed Calculation of the Distorted Signal Fundamental Component*. IEE Proc., Vol. 137, Pt. C, nr 1, January 1990, ss. 19-24.
- [25] Xia Y.Q., Li K.K.: *Development and Implementation of a Variable-Window Algorithm for High-Speed and Accurate Digital Distance Protection*. IEE Proc.-Gener. Transm. Distrib., Vol. 141, No 4, July 1994, ss. 383-389.

Rozdział 6

METODY SZTUCZNEJ INTELIGENCJI W AUTOMATYCE ELEKTROENERGETYCZNEJ

6.1 Wstęp

W wielu zagadnieniach technicznych występują zjawiska lub relacje, które są trudne do opisanego w postaci jednoznacznych, dokładnych zależności funkcyjnych, przydatnych do ich analizy. Typowe przykłady związane są z problemami interpretacji zarejestrowanych przebiegów lub zdjęć lotniczych. Pozostając w obszarze elektroenergetyki wiadomo, jak przemyślne niekiedy muszą być stosowane numeryczne metody określania momentu wystąpienia zwarcia lub identyfikacji jego rodzaju, podczas gdy rzut oka doświadczonego inżyniera na zarejestrowane przebiegi prądów i napięć pozwala mu łatwo ocenić zdarzenie. Próba odtworzenia procesów myślowych zachodzących w mózgu oraz ogólnie obowiązujących w przyrodzie ożywionej doprowadziła do powstania różnorodnych technik celowego przetwarzania informacji, które objęte są wspólną nazwą *metod sztucznej inteligencji*. Należy podkreślić, że pomimo tej bardzo ekscytującej nazwy, związane z nią metody są zazwyczaj stosowane do rozwiązywania bardzo prozaicznych zagadnień technicznych. W tym też znaczeniu algorytmy sztucznej inteligencji są stosowane w automatyce elektroenergetycznej [81], [95].

Zakres technik składających się na pojęcie 'metody sztucznej inteligencji' bywa różnie definiowany. W odniesieniu do zastosowań w elektroenergetyce przyjęło się wyróżniać następujące metody i algorytmy sztucznej inteligencji [26], [95]:

- Systemy Ekspertowe (SE),
- Systemy Rozmyte (SR),
- Sztuczne Sieci Neuronowe (SSN),
- Algorytmy Genetyczne (AG).

Każda z tych metod stanowi oddzielne, obszerne zagadnienie w zakresie teorii i praktyki projektowania odpowiednich algorytmów, ich weryfikacji oraz aplikacji. W niniejszym rozdziale problemy te zostaną jedynie zarysowane i podane będą wybrane ich zastosowania do rozwiązywania zagadnień związanych z przetwarzaniem informacji oraz podejmowaniem decyzji w układach automatyki elektroenergetycznej. Pominęto AG, które należą do metod optymalizacyjnych i w automatyce mają zastosowanie do syntezy odpowiednich algorytmów oraz określania ich nastaw, a rzadziej w samym procesie sterowania. Czytelnicy zainteresowani poszerzeniem wiadomości w zakresie podstawowym oraz w odniesieniu do rozpatrywanych tu zastosowań mogą znaleźć bliższe informacje w obszernej literaturze, której ważniejsze pozycje zamieszczono na końcu rozdziału.

Wraz z pojawieniem się pierwszych zastosowań metod sztucznej inteligencji w technice zauważono, że mogą one skutecznie przyczynić się do poprawy funkcjonowania automatyki elektroenergetycznej, a w szczególności do usprawnienia procesu podejmowania decyzji przez zabezpieczenia elektroenergetyczne [82], [83]. Podstawą tej przesłanki jest widoczne każdemu specjalście stosunkowo małe wykorzystanie przez tradycyjne układy automatyki zabezpieczeniowej informacji zawartej w mierzonych sygnałach prądu i napięcia. Nie pozwalają na to 'sztywne' metody pomiarowe oraz 'ostra', dwuwartościowa logika stosowana w członach decyzyjnych. W rezultacie, działanie tradycyjnego przekaźnika jest zbliżone do funkcjonowania czujnika dwupołożeniowego, co ogranicza wykorzystanie informacji zawartej w obserwowanych przebiegach prądu i napięcia oraz utrudnia prawidłowe rozpoznanie zakłócenia. Może to prowadzić do błędnego funkcjonowania zabezpieczenia, które objawia się zbędnymi działaniami, zaniechaniem działania lub działaniem opóźnionym.

Funkcjonowanie układów automatyki zabezpieczeniowej może być znacznie poprawione (w sensie nakładanych na nie wymagań), jeśli w procesie przetwarzania informacji zastosowane zostaną reguły sztucznej inteligencji. Zwykle łączy się to z rozszerzeniem cech klasycznych układów o następujące elementy [85], [88], [100]:

- ostateczna decyzja przekaźnika jest podejmowana na podstawie wielu kryteriów oceny wystąpienia zagrożenia,
- poszczególne wielkości kryterialne powinny być wyznaczone z uwzględnieniem stopnia niepewności informacji w stanie przejściowym, po wystąpieniu zakłócenia,

- nastawy układu (przełącznika) powinny być adaptowane do zmian w nadzorowanym obiekcie oraz do stopnia niepewności informacji dostarczanej przez człon pomiarowy,
- proces podejmowania decyzji powinien uwzględniać konsekwencje błędnej decyzji, co wyrażane jest przez czynnik sprzyjający wyłączeniu lub blokowaniu wyłączenia,
- wprowadzenie opóźnienia działania układu automatyki powinno uwzględniać stopień pewności wyznaczonych wielkości kryterialnych.

Dziedzina wiedzy związana z metodami sztucznej inteligencji jest gałęzią informatyki zajmującą się metodami i środkami, które pozwalają odwzorować niektóre elementy ludzkiej inteligencji w postaci algorytmów i programów komputerowych. Wykorzystuje się w tym celu różne klasyczne techniki przetwarzania, jak metody numeryczne czy cyfrowe przetwarzanie sygnałów oraz nowe metody, które wykorzystują takie środki, jak zasady logiki wielowartościowej, przetwarzanie równoległe, odwzorowanie reguł wnioskowania i inne. W tym rozdziale przedstawiono podstawowe zagadnienia związane z zastosowaniem tych nowych metod w automatyce elektroenergetycznej.

6.2 Systemy ekspertowe

6.2.1 Wprowadzenie

Decyzja podejmowana przez przełącznik jest określana na podstawie porównania zmierzonej wielkości kryterialnej z odpowiednią nastawą. To lakoniczne stwierdzenie pomija cały proces projektowania zabezpieczenia, w trakcie którego została określona odpowiednia wielkość kryterialna, sposób jej pomiaru oraz wartość progu stanowiącego nastawę przełącznika. W tradycyjnym rozwiązaniu wszystkie te parametry są określone w rezultacie dokładnej analizy zjawisk w nadzorowanym obiekcie w różnych warunkach jego pracy i wybrane jako końcowe rozwiązanie, najlepsze z punktu widzenia spełnienia wymagań poprawnego działania całego urządzenia. Do oceny poprawności działania przyjmuje się zazwyczaj takie warunki, w których zła decyzja przełącznika prowadzi do najbardziej niekorzystnych skutków. Takie podejście sprawia, że w praktyce bardzo rzadko mogą wystąpić warunki, które projektant przewidział jako 'wzorcowe', co zwykle sprawia, że przełącznik musi

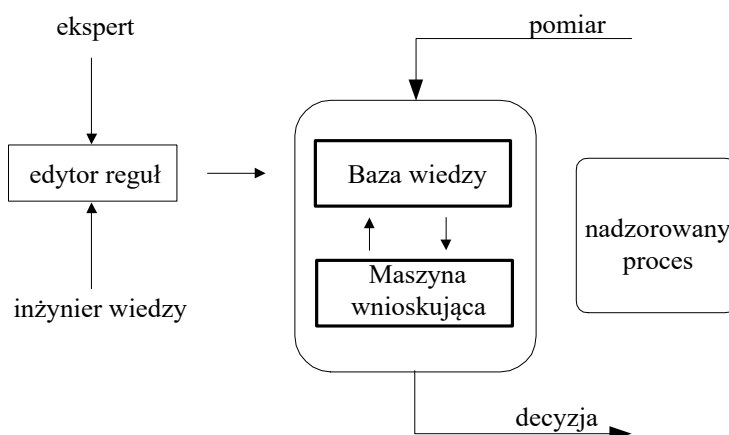
mieć przesadnie wygórowane parametry (a więc jest drogi), lub jego działanie może być niepoprawne.

System ekspertowy zastosowany w układzie automatyki przewiduje inne, bardziej elastyczne wykorzystanie wiedzy projektanta i inżyniera (a więc ekspertów). W miejsce jednego sztywnego rozwiązania układu pomiarowego i decyzyjnego proponuje się zastosowanie kilku rozwiązań (układ wielokryterialny), a wybór pomiędzy nimi (lub zmiana odpowiednich parametrów) odbywa się na zasadzie wykorzystania uprzednio zgromadzonej i odpowiednio zapisanej wiedzy pochodzącej od ekspertów.

6.2.2 Struktura systemu ekspertowego

Przez system ekspertowy rozumie się zazwyczaj program komputerowy, który symuluje zachowanie się eksperta podczas rozwiązywania przez niego problemu, związanego z jego dziedziną wiedzy [69]. Program ten musi mieć dostęp do odpowiednio sporządzonej bazy wiedzy, na podstawie której, poprzez wykonanie określonych operacji logicznej dedukcji, rozwiązuje postawiony problem. W ogólnym przypadku SE odtwarza wiedzę eksperta w zakresie podejmowania decyzji w wybranej, ściśle określonej dziedzinie. SE jest określony przez bazę wiedzy oraz maszynę wnioskującą (rys. 6.1).

Baza wiedzy odwzorowuje wiedzę eksperta w zakresie faktów, obiektów, ich atrybutów, oraz reguł wnioskowania i kojarzenia odpowiednich faktów, które razem pozwalają rozwiązywać problemy związane z przetwarzaniem danych dostarczanych przez układ pomiarowy. *Baza wiedzy*



Rys. 6.1. Struktura systemu ekspertowego

związana z faktami i obiektami jest zbiorem pewników obowiązujących w rozważanym procesie lub obiekcie, natomiast *baza reguł wnioskowania* jest zbiorem zasad logicznych uzależnień pomiędzy występującymi zjawiskami, obiektami lub danymi, na przykład, w postaci reguł: **jeżeli** <a> **to** . Informacja zapisana w bazie wiedzy pochodzi z dwóch źródeł: - są to pewniki lub fakty, określone na podstawie zasad fizyki oraz - dane subiektywne, 'heurystyki', które są odbiciem doświadczenia i praktycznej wiedzy eksperta.

Baza wiedzy jest tworzona na etapie syntezy systemu ekspertowego, a także w procesie jego uczenia. Powstaje ona w wyniku współpracy *inżyniera wiedzy z ekspertem*. Należy zauważyć, że baza wiedzy istotnie różni się od bazy danych, która jest znana z systemu przetwarzania danych.

System ekspertowy jest utworzony w postaci programu komputerowego, który może być napisany z użyciem dowolnego języka programowania, jednak powstały języki komputerowe, które szczególnie się do tego nadają: PROLOG oraz LISP [69]. Mają one logiczne konstrukcje, pozwalające w łatwy sposób formować relacje oraz zależności pomiędzy elementami bazy wiedzy. Należy podkreślić, że tworzenie bazy wiedzy oraz odpowiednich relacji i ich weryfikacja jest najbardziej uciążliwym etapem tworzenia systemu ekspertowego.

Maszyna wnioskująca przeprowadza logiczne przetwarzanie faktów pochodzących z nadzorowanego procesu oraz wiedzy zawartej w bazie wiedzy. Odbywa się to w drodze interpretowania zawartości bazy wiedzy w kontekście zdarzeń wejściowych (pochodzących z pomiarów lub zadawanych przez użytkownika), którego celem jest osiągnięcie odpowiedniej konkluzji w postaci decyzji wyjściowej. Maszyna wnioskująca określa, które zależności zgromadzone w bazie wiedzy powinny być interpretowane i w jakiej kolejności. Utworzenie odpowiednich strategii przetwarzania wiedzy w postaci łańcuchów wnioskowania w dużym stopniu decyduje o efektywności systemu ekspertowego. Stosowana jest przy tym jedna z dwóch następujących strategii:

- wnioskowanie progresywne (ang. *forward chaining*), w którym proces podejmowania decyzji przebiega na drodze kolejnego rozpatrywania faktów i generowania kolejnej, wynikającej z tego konkluzji, a następnie uwzględnianie tej konkluzji jako przesłanki do kolejnej reguły, aż do uzyskania ostatecznej odpowiedzi;
- wnioskowanie regresywne (ang. *backward chaining*) prowadzi przez odwrotne postępowanie: określany jest cel ostateczny lub cele poszczególnych etapów (hipotezy) i następnie te hipotezy są

konfrontowane z dostępnymi danymi wejściowymi oraz zawartością bazy wiedzy.

W niektórych rozwiązaniach stosuje się również strategie mieszane. Należy przy tym zapewnić usuwanie konfliktów oraz możliwość uzyskania rozwiązania w każdej sytuacji. SE powinien mieć możliwość gromadzenia 'doświadczenia' przez pozyskiwanie wiedzy podczas rozwiązywania bieżących zadań [6], [69].

Metody stosowane w systemach ekspertowych podlegają ciągłemu doskonaleniu. Rozwój systemów rozmytych, którym poświęcona jest kolejna część niniejszego rozdziału, spowodował pojawienie się nowych technik przetwarzania informacji zawartej w bazie wiedzy. Stosowane tam zasady wnioskowania logicznego oraz tworzenie relacji zachodzących pomiędzy odpowiednimi obiektami logicznymi zostanie przedstawione w dalszej części rozdziału, przy okazji omawiania systemów rozmytych. Poniżej przedstawiono jedynie wybrane przykłady zastosowań systemów ekspertowych w automatyce elektroenergetycznej.

6.2.3 Przykłady zastosowań

System ekspertowy w ograniczonym zakresie jest stosowany w wielu współczesnych rozwiązaniach układów automatyki elektroenergetycznej, zwłaszcza w układach działających w oparciu o zasadę wielokryterialną. Układ decyzyjny w takich urządzeniach określa wielkość wyjściową na zasadzie przetwarzania cząstkowych wielkości logicznych (decyzyjnych) w oparciu o sztywne reguły logiczne. Nie ma tu jednak typowej dla systemu ekspertowego maszyny wnioskującej, a jedyna analogia związana jest z tym, że układy takie są budowane w oparciu o wiedzę i doświadczenie ekspertów.

Różne czynniki natury technicznej, a często również psychologicznej sprawiają, że rzadko podejmuje się próby zbudowania przekaźnika w oparciu o system ekspertowy. Systemy takie są natomiast szeroko stosowane w elektroenergetyce do przetwarzania informacji i podejmowania decyzji w sytuacjach, gdy nie ma zbyt wygórowanych wymagań czasowych. Poniżej podane są niektóre z typowych zastosowań w automatyce elektroenergetycznej.

- **System diagnostyki zwarciowej** (ang. *fault diagnosis*). Przeznaczeniem takiego systemu jest zbieranie informacji na temat rodzaju występujących zwarć w poszczególnych nadzorowanych obiektach lub nadzorowanym obszarze i sporządzanie raportów z odpowiednim doradztwem dla obsługującego personelu lub systemu nadzorczego [19], [52], [55], [56], [108]. W zależności od przeznaczenia, system taki może

służyć do doradztwa dyspozytorskiego w zakresie bieżącego sterowania nadzorowanym obszarem lub do diagnostyki uszkodzeń. W tym ostatnim przypadku decyzje mogą dotyczyć zaleceń co do wymiany lub remontu elementów systemu.

- **Obsługa alarmów** (ang. *alarm handling*). System taki jest przeznaczony do sterowania obiektem (stacją elektroenergetyczną, elektrownią) lub obszarem (systemem zasilania zakładu przemysłowego, systemem dyspozycji mocy) w stanach awaryjnych, które zwykle są związane z wystąpieniem zwarcia lub z innym zdarzeniem powodującym gwałtowny deficyt mocy. Zadanie musi być adresowane do bardzo specyficznych sytuacji i wówczas baza wiedzy systemu ekspertowego zawiera reguły działania, które skrótowo można zapisać w postaci następujących przykładowych logicznych sekwencji:

jeżeli <zanik napięcia na szynach A > **to** <przełącz odbiór P na szyny B >

jeżeli <zwarcie w obszarze Q > **to** <wyłącz generator G > i podobnie.

System ekspertowy do obsługi alarmów może być projektowany z przeznaczeniem do autonomicznego działania (w przypadku zawężonego zakresu decyzji) lub jako system doradztwa dyspozytorskiego [24], [95].

- **Koordinacja nastaw zabezpieczeń** (ang. *relay setting and co-ordination*). Poprawne określenie nastaw zabezpieczeń elektroenergetycznych oraz ich wzajemna koordynacja w określonej strefie w dużym stopniu decyduje o ich skuteczności, szczególnie w przypadku złożonych zwarć prowadzących do rozwijającej się awarii. Procedura określania nastaw zabezpieczeń jest często związana z koniecznością wielu obliczeń symulacyjnych i wymaga dużej praktycznej wiedzy inżynierskiej oraz znajomości wielu charakterystyk i parametrów stosowanych przekładników, które mogą pochodzić od różnych producentów. Jednocześnie, ogólne zasady określania nastaw w przypadkach szczególnych są znane, co ułatwia stworzenie określonej bazy wiedzy SE [18], [36], [95].
- **Analiza zarejestrowanych przebiegów zwiarcowych** (ang. *evaluation of disturbance recordings*). Współczesne układy automatyki instalowane w stacjach elektroenergetycznych pozwalają w łatwy sposób rejestrować przebiegi prądów i napięć oraz informacje o zdarzeniach w nadzorowanym systemie. Dzięki systemom transmisji danych te informacje są szybko dostępne w systemie nadzoru stacji lub w punkcie dyspozytorskim. Przetworzenie i racjonalne wykorzystanie tej informacji wymaga zastosowania specjalizowanego systemu ekspertowego. Są przynajmniej dwa różne kierunki wykorzystania analizy

zarejestrowanych przebiegów: - analiza rozwoju awarii i określenie środków zaradczych oraz - analiza poprawności funkcjonowania zabezpieczeń [7], [17], [52]. W tym ostatnim przypadku specjalizowany SE może określić przyczyny nieprawidłowego działania zabezpieczenia (zła nastawa, błędny pomiar, źle skoordynowane nastawy itp.). Obiecujące są także rezultaty zastosowania SE do klasyfikacji zakłóceń w systemach nadzoru i kontroli jakości energii elektrycznej [28].

Nowoczesne rozwiązania systemów ekspertowych charakteryzują się zastosowaniem również innych narzędzi sztucznej inteligencji, w szczególności reguł rozmytego wnioskowania, czy rozmytej logiki, a także sztucznych sieci neuronowych.

6.3 Systemy rozmyte

6.3.1 Wprowadzenie

Logika rozmyta (ang. *fuzzy logic*), w odróżnieniu od ostrej logiki dwuwartościowej (ang. *crisp logic*), określa relacje pomiędzy obiektami lub zdarzeniami na zasadzie wyrażania stopnia podobieństwa, przynależności, czy też aproksymacji, w miejsce ostrych, jednoznacznych relacji *tak - nie*. Podstawą systemów logiki rozmytej jest *teoria zbiorów rozmytych*, gdzie, w odróżnieniu od ściśle określonych wielkości lub obiektów, występują zbiory, których granice nie muszą być ostro zdefiniowane (a więc są rozmyte). Przynależność w teorii zbiorów rozmytych nie jest, w ogólności, określana na zasadzie (*prawda - fałsz*) lub ($1 - 0$), a raczej przez podanie stopnia przynależności. Z tego punktu widzenia, zasady logiki dwuwartościowej są szczególnym przypadkiem zasad logiki rozmytej.

Reguły logiki rozmytej stanowią próbę odzwierciedlenia zasad wyrażanych w języku naturalnym, gdzie bardzo rzadko używane są ściśle określenia do wyrażania stanów lub opisu zdarzenia. Mówi się zatem zazwyczaj, że ktoś 'uczy się dobrze', że 'jest ciepło', mam 'blisko do pracy', oni mają 'wygodne mieszkanie', to znaczy, używając tak zwanych *zmiennych lingwistycznych*, zamiast używania ścisłych numerycznych lub funkcyjnych zależności, typu: 'on ma średnią ocen 4,26', 'temperatura wynosi 22,1°C' i tak dalej. Widać, że przenikają się tu dwie dziedziny rzeczywistości postrzeganej z punktu widzenia *wiedzy obiektywnej*, gdzie odpowiednie wskaźniki są wyrażone w wartościach bezwzględnych lub *wiedzy subiektywnej*, gdy informacja jest wyrażona w postaci określeń lub

relacji, które nie udaje się zapisać językiem tradycyjnej matematyki. Te dwa podejścia mogą być konsekwencją interpretacji postrzeganej rzeczywistości, która jest dostępna poprzez pomiar. Wiadomo, że mierząc te same parametry procesu można uzyskać nieco inne rezultaty, co zależy od wielu czynników, jak na przykład, od rodzaju użytego czujnika pomiarowego, zakłóceń, stanu obserwowanego procesu itd. Odmiennie niż w przypadku 'poważnego' traktowania każdej cyfry wyniku pomiaru (czyli tradycyjnego podejścia 'ostrego'), w interpretacji rozmytej z góry zakłada się pewną rezerwę do uzyskiwanych danych liczbowych.

Przechodząc do zastosowań obu przedstawionych sposobów opisu obserwowanego procesu w automatyce, można zauważyć, że w konsekwencji otrzymuje się dwa różne sposoby projektowania układów sterowania i regulacji oraz realizacji ich algorytmów funkcjonowania:

- synteza w oparciu o matematyczny model procesu: 'obiektywna' informacja jest w tym przypadku reprezentowana w postaci ścisłych zależności matematycznych, z których wywodzą się odpowiednie reguły sterowania;
- projektowanie w oparciu o opis dostępny w postaci zmiennych lingwistycznych (lub ich odpowiedników w teorii zbiorów rozmytych) i odpowiednich relacji pomiędzy nimi.

Możliwe są również rozwiązania mieszane, gdy układ sterowania projektowany jest w oparciu o reguły rozmyte na podstawie znanego modelu matematycznego procesu.

Jest wiele powodów uzasadniających stosowanie systemów rozmytych w automatyce elektroenergetycznej. Oto niektóre z nich:

- procesy przejściowe wywołane zwarciami w systemie elektroenergetycznym mają charakter losowy, a w czasie pomiaru nie jest możliwe odtworzenie wszystkich czynników mających wpływ na ich przebieg; zatem doskonalenie tradycyjnych metod w niewielkim stopniu może poprawić identyfikację stanu systemu;
- pomiar wielkości kryterialnych układu automatyki w stanie przejściowym jest obciążony dużym błędem; ilość informacji o stanie obiektu podczas dużego zakłócenia jest znacznie ograniczona, a zatem stosowanie sztywnych reguł podejmowania na tej podstawie decyzji nie jest uzasadnione;
- do poprawy selektywności działania zabezpieczeń coraz częściej stosuje się przekaźniki wielokryterialne; stosowanie reguł rozmytych jest naturalnym sposobem podejmowania decyzji w takim układzie.

Poniżej podane są podstawowe pojęcia teorii zbiorów rozmytych oraz rozmytego wnioskowania, po czym pokazano niektóre zastosowania tego narzędzia w automatyce elektroenergetycznej.

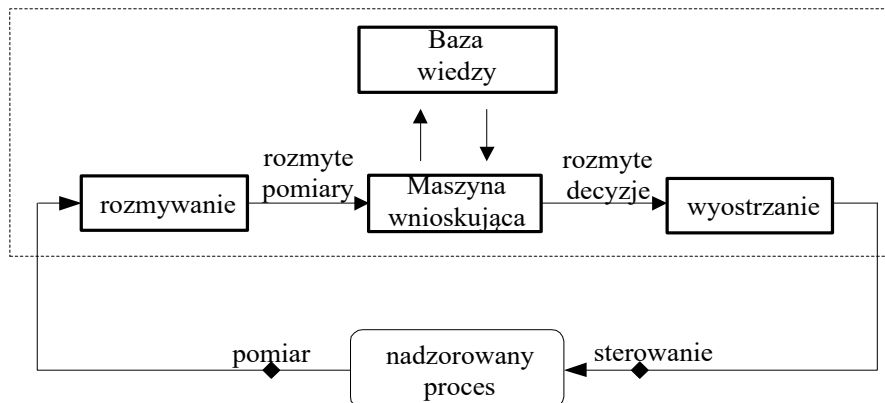
Klasycznymi obszarami zastosowania systemów rozmytych są problemy regulacji oraz podejmowania decyzji. W zakresie automatyki elektroenergetycznej rozmyte regulatory mogą mieć zastosowanie do regulacji wzbudzenia oraz prędkości obrotowej generatorów [20], [31], [43], [61], regulacji napięcia za pośrednictwem transformatorów z odczepami [51] lub w charakterze stabilizatorów systemowych [76]. W odniesieniu do zabezpieczeń przekaźnikowych obiecujące są propozycje zastosowań do podejmowania decyzji w zabezpieczeniach wielokryterialnych [54], [83], a także realizacji zadań pomocniczych, jak lokalizacja miejsca zwarcia w liniach elektroenergetycznych [39] oraz klasyfikacja rodzaju zwarcia [14], [29], [80]. Czynione są także próby syntezy rozmytych algorytmów identyfikacji parametrów sygnałów elektrycznych [13], [90].

System rozmyty funkcjonuje na zasadzie przetwarzania wielkości i zależności przybliżonych, dzięki czemu jest tolerancyjny na niedokładności w zakresie danych wejściowych oraz parametrów procesu. W przypadku rozmytego systemu decyzyjnego, sygnał wyjściowy ma zazwyczaj cechy związane z dziedziną logiki dwuwartościowej: *tak-nie*. Wartość tego sygnału jest natomiast określana na drodze wnioskowania rozmytego na podstawie rozpatrywania wielu hipotez cząstkowych.

6.3.2 Struktura systemu rozmytego

Ogólna struktura rozmytego systemu jest pokazana na rys. 6.2. Układ taki przetwarza wejściowe sygnały uzyskane z pomiaru, określone w tradycyjnej, 'ostrej' dziedzinie, w sygnały wyjściowe, które są także rozumiane w konwencjonalny sposób. Samo przetwarzanie odbywa się według zasad stosowanych w klasycznych systemach ekspertowych, z tym, że zarówno reguły, jak i obiekty przetwarzania mają charakter rozmyty. W związku z tym, charakterystyczną cechą systemów rozmytych są dwa bloki łączące system rozmyty z rzeczywistym otoczeniem, w którym obowiązują tradycyjne, 'ostre' reguły opisu zdarzeń i związanych z nimi danych [22], [79].

Blok rozmywania służy do przyporządkowania każdej wielkości wejściowej odpowiednich cech, określających stopień jej przynależności do wielkości, które wskazują. Ponieważ śledzenie wielkości wejściowych odbywa się za pośrednictwem ich pomiaru, więc proces rozmywania można często interpretować jako określanie stopnia wiarygodności mierzonych



Rys. 6.2. Struktura systemu rozmytego

danych. W tym sensie dane są bardziej wiarygodne (większy jest stopień przynależności do wskazywanych wartości), jeśli obserwowany proces jest zbliżony do założonego modelu lub też, jeśli zakres mierzonych wartości mieści się w oczekiwanym obszarze.

Baza wiedzy zawiera informacje z zakresu rozważanej dyscypliny, które pozwalają rozwiązywać każdy problem związany z funkcjami nadzorowania danego procesu. Podobnie jak w systemie ekspertowym, baza wiedzy zawiera *bazę danych* z definicjami odpowiednich parametrów związanych z funkcjonowaniem bloku rozmywania, bloku wyostrzania i algorytmu sterowania oraz *bazę reguł*, których przetwarzanie prowadzi do realizacji celów sterowania obiektem.

Maszyna wnioskująca jest sercem systemu rozmytego. Tutaj, za pośrednictwem przetwarzania odpowiednich łańcuchów reguł wnioskowania rozmytego, odbywa się symulacja rozumowania eksperta w rozpatrywanej dziedzinie. Celem tych działań jest osiągnięcie określonych parametrów sterowania lub nadzoru danego procesu. Rezultatem wnioskowania rozmytego są również rozmyte decyzje.

Blok wyostrzania ma na celu zamianę reprezentacji sygnałów w konwencji przyjętej w dziedzinie rozmytej do dziedziny rzeczywistej. Następuje tu zatem proces odwrotny niż w bloku rozmywania, dzięki czemu decyzyjne zmienne logiczne przyjmują ostre (dokładne) wartości 'tak' - 'nie', a zmienne lingwistyczne - ostre wartości numeryczne.

Jak widać, struktura systemu rozmytego jest zbliżona do struktury systemu ekspertowego. W wielu zastosowaniach używa się nawet pojęcia 'rozmyty system ekspertowy', co podkreśla zbieżne podejście do projektowania obu tych narzędzi.

W zakresie systemów rozmytych stosowane są specyficzne pojęcia i reguły przetwarzania, których zrozumienie jest niezbędne do badania i projektowania tych układów. Poniżej podany jest przegląd podstawowych pojęć i zależności dotyczących zbiorów rozmytych i logiki rozmytej. Należy podkreślić, że zasady wnioskowania rozmytego są rozszerzeniem podobnych zasad stosowanych w odniesieniu do tradycyjnych reguł logiki dwuwartościowej. Zatem, przy odpowiednich zawężających założeniach, poniższe wywody pozostają w mocy również w odniesieniu do systemów logiki dwuwartościowej.

6.3.3 Zbiory rozmyte i rozmyte relacje

Za pomocą zbiorów rozmytych określa się formalnie pojęcia nieprecyzyjne, przybliżone, wyrażone w postaci zmiennych lingwistycznych (czyli opisu słownego). Jeśli, na przykład, ktoś mówi: ‘w pomieszczeniu jest ciepło’, to w celu jego formalnego opisu należy najpierw uzgodnić *obszar rozważań* lub *dziedzinę*, do której odnosi się to określenie. Z kontekstu wynika, że chodzi tu o zmienną, która odnosi się do temperatury θ w pomieszczeniu, przy czym, rozważany zakres zmian tej temperatury jest z pewnością niewielki, na przykład, $(10.25)^\circ\text{C}$. Z kolei, aby umożliwić stopniowanie określenia ‘jest ciepło’, należy wprowadzić funkcję $\mu(\theta)$, która powinna odzwierciedlać stopień spełnienia tego subiektywnego odczucia. Dla wygody, funkcja ta może przyjmować wartości z przedziału $[0, 1]$ (co oznacza, że jest to funkcja unormowana), przy czym, w rozpatrywanej sytuacji $\mu(\theta_1) = 0$ oznacza: ‘nie jest ciepło’, natomiast $\mu(\theta_2) = 1$ oznacza, że temperatura θ_2 w pełni satysfakcjonuje pytanego o stan ogrzania pomieszczenia. Opis ten formalizuje reprezentację zmiennej lingwistycznej za pomocą zbioru rozmytego. Można to zapisać w postaci ogólnej.

Zbiór rozmyty F w przestrzeni rozważań (w obszarze rozważań) X jest określony za pomocą funkcji przynależności $\mu_F(x)$, która przyjmuje wartości z przedziału $[0, 1]$. Funkcja przynależności $\mu_F(x)$ jest miarą stopnia podobieństwa danego elementu X do zbioru rozmytego, co określa się następująco [75], [79]:

$$F = \{(x, \mu_F(x)); x \in X\}. \quad (6.1)$$

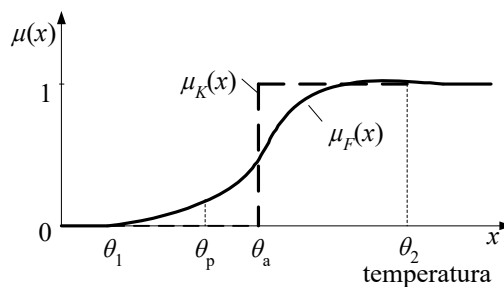
Przestrzeń X oznacza rozważany zakres zmian argumentu x , dla którego określana jest funkcja $\mu_F(x)$. Nietrudno tę formalną definicję odnieść

do rozważanego powyżej przykładu. Można rozszerzyć te rozważania w celu wyjaśnienia działań na zbiorach rozmytych oraz relacji zachodzących między nimi.

Przykład 6.1. Sformalizować pojęcie ‘w biurze jest ciepło’ za pomocą zbioru rozmytego F (6.1).

Funkcję przynależności $\mu_F(x)$, gdzie \mathcal{X} oznacza temperaturę, można określić na drodze ankietyzacji pracowników biura. W ten sposób z pewnością można określić temperaturę $x_1 = \theta_1$, poniżej której wszyscy powiedzą, że ‘nie jest ciepło’ oraz temperaturę $x_2 = \theta_2$, którą wszyscy uznają za wystarczającą do przyjęcia, że ‘jest ciepło’. Funkcję przynależności w przedziale $\langle \theta_1, \theta_2 \rangle$ można określić ze stosunku liczby osób, które uznają daną temperaturę za dostateczną do liczby wszystkich pracowników biura. W ten sposób, po aproksymacji, otrzymuje się funkcję przynależności $\mu_F(x)$ jak na rys. 6.3. Z tego wykresu można odczytać, że przy temperaturze θ_p w biurze jest ciepło w stopniu 0,2.

Można zauważyć, że przy postawieniu pytania: ‘czy w biurze jest ciepło?’, odpowiedzią jest wartość funkcji przynależności $\mu_F(x)$ dla danej temperatury $x = \theta_x$. Ma ona zatem sens wartości logicznej. Przebieg zmian tej wartości logicznej w przypadku rozważanego zbioru rozmytego jest, w ogólnym przypadku, inna niż w klasycznych zagadnieniach rządzonych regułami ‘ostrej’ logiki dwuwartościowej. Kontynuując przykład można założyć, że kierownik biura, po zapoznaniu



Rys. 6.3. Przykład funkcji przynależności zbioru rozmytego ($\mu_F(x)$) oraz ostrego ($\mu_K(x)$)

się z ankietą wśród pracowników przyjął, że w celu zapewnienia odpowiedniego komfortu pracy wystarczy utrzymywać temperaturę pomieszczenia na poziomie θ_a (rys. 6.3). Ta decyzja oznacza, że dla kierownika problem ‘czy w biurze jest ciepło?’ został sprowadzony do logiki dwuwartościowej:

$$\mu_K(x) = \begin{cases} 0 & x < \theta_a, \\ 1 & x \geq \theta_a. \end{cases} \quad \square$$

Zbiory rozmyte mogą być określone w przestrzeni ciągłej – jak w powyższym przykładzie – lub w przestrzeni dyskretnej. W tym ostatnim przypadku funkcja przynależności jest często definiowana przez bezpośrednie podanie jej wielkości dla dyskretnych wartości z obszaru rozważań. Na przykład, zapis: $\mu_A(x) = \{0,2/8 \ 0,8/9 \ 1/10 \ 0,8/11 \ 0,2/12\}$ oznacza, że zbiór A jest określony w

obszarze rozważań $\{8, 9, 10, 11, 12\}$, natomiast jego funkcja przynależności ma następujące wartości: $\mu_A(8) = 0,2$, $\mu_A(9) = 0,8$ i tak dalej.

Podstawowe działania na zbiorach rozmytych są definiowane podobnie, jak w odniesieniu do zbiorów dwuwartościowych. Niech zbiory rozmyte A oraz B będą określone przez odpowiednie funkcje przynależności $\mu_A(x)$ oraz $\mu_B(x)$. Podstawowe operacje na tych zbiorach są określone następująco [40], [68], [75]:

- suma zbiorów rozmytych (ang. *fuzzy union*) daje rezultat w postaci zbioru $A \cup B$, którego funkcja przynależności jest określona za pomocą następującej relacji:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)); \quad (6.2)$$

- przecięcie zbiorów rozmytych (ang. *fuzzy intersection*) daje rezultat w postaci zbioru $A \cap B$, którego funkcja przynależności jest określona za pomocą następującej relacji:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)); \quad (6.3)$$

- dopełnienie zbioru rozmytego A (ang. *fuzzy complement*) daje rezultat w postaci zbioru \bar{A} , którego funkcja przynależności jest określona następująco:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x). \quad (6.4)$$

Należy podkreślić, że w literaturze znane są również inne definicje operacji sumy i przecięcia zbiorów rozmytych [75], [79]. W celu ujednoczenia odpowiednich określeń wprowadzono pojęcia T -normy (oznaczanej symbolem $*$), odnoszącej się do przekroju – iloczynu zbiorów, oraz S -normy (oznaczanej symbolem \oplus), odpowiadającej uogólnionej operacji sumy zbiorów. Zatem, w miejsce określeń (6.2) oraz (6.3) można stosować ich ogólne definicje:

$$\mu_{A \cup B}(x) = S(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \oplus \mu_B(x), \quad (6.5)$$

$$\mu_{A \cap B}(x) = T(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) * \mu_B(x), \quad (6.6)$$

co oznacza, że zapis: $\min(\mu_A(x), \mu_B(x)) = T(\mu_A(x), \mu_B(x))$ jest przykładem działania T -normy, natomiast: $\max(\mu_A(x), \mu_B(x)) = S(\mu_A(x), \mu_B(x))$ jest z kolei przykładem działania S -normy.

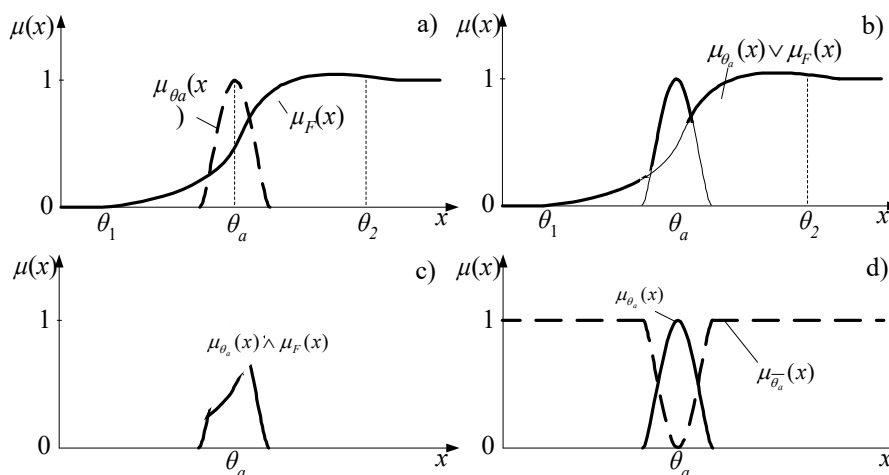
Powyższe działania na zbiorach rozmytych można zilustrować kontynuując poprzedni przykład.

Przykład 6.2. W sytuacji przedstawionej w Przykładzie 6.1 pomieszczenie biurowe było ostatnio remontowane i wiszący na ścianie

termometr został częściowo pomalowany farbą, co utrudnia dokładny odczyt temperatury.

To sprawia, że temperatura θ_a , przyjęta przez kierownika jako graniczna wartość na określenie 'jest ciepło', jest odczytywana 'z pewną dokładnością'. Do odwzorowania odczytu tej temperatury można się posłużyć zbiorem rozmytym o funkcji przynależności $\mu_{\theta_a}(x)$ - rys. 6.4a. Należy zauważyć, że być może skala termometru nie jest jednorodnie zniszczona, a więc inne zakresy temperatury mogą być odczytane bardziej dokładnie. Wpłyne to na szerokość (a być może także na kształt) pola zakreślonego przez funkcję przynależności $\mu_{\theta}(x)$. Ilustruje to sposób odwzorowania warunków pomiaru, a także ilości informacji zawartej w pomiarze za pomocą zbiorów rozmytych. Jest to także przykład rozmywania danych uzyskanych z pomiaru, który zachodzi na wejściu systemu rozmytego (rys. 6.2).

Wykonując działania (6.2)-(6.4) na zbiorach rozmytych F oraz θ_a otrzymuje się rezultaty pokazane na rys. 6.4b-d. \square



Rys. 6.4. Funkcje przynależności zbiorów rozmytych: a - oryginalne, b - powstałe w rezultacie sumowania, c - powstałe w rezultacie przecięcia oraz d - dopełnienia zbioru θ_a

Analizując rezultaty uzyskane w Przykładzie 6.2 można sformułować następujące wnioski:

- operacje sumy i przecięcia zbiorów rozmytych zachowują te same właściwości, co w przypadku tradycyjnych ostrych zbiorów logicznych (choć tym razem wynik jest także zbiorem rozmytym);
- w wyniku operacji dopełnienia zbioru rozmytego uzyskuje się zbiór, którego funkcja przynależności może być różna od zera także w tym

obszarze, gdzie funkcja przynależności zbioru oryginalnego jest różna od zera; nie są zatem spełnione prawa dopełnienia obowiązujące w odniesieniu do zbiorów ostrych:

$$\begin{aligned} A \cap \bar{A} &\neq 0, \\ A \cup \bar{A} &\neq V, \end{aligned} \quad (6.7)$$

gdzie: V jest obszarem rozważań dla zbioru A .

Zbiór θ_a w Przykładzie 6.2 w rzeczywistości reprezentuje liczbę rozmytą. W celu uproszczenia działań na liczbach rozmytych wprowadza się pewne ich ujednoczenie przez zdefiniowanie lewostronnego (L) oraz prawostronnego (P) odwzorowania funkcji przynależności [79]. W ten sposób liczba rozmyta typu $L-P$ jest określona za pomocą trzech parametrów:

$$A = (m_A, \alpha_A, \beta_A)_{LP}, \quad (6.8)$$

gdzie: m_A jest średnią wartością liczby rozmytej A , dla której $\mu_A(m) = 1$; α_A , β_A są odpowiednio lewostronnym i prawostronnym rozrzutem.

Funkcja przynależności liczby rozmytej typu $L-P$ jest określona następująco:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{\alpha}\right) & \text{jeśli } x \leq m, \\ P\left(\frac{x-m}{\beta}\right) & \text{jeśli } x \geq m. \end{cases} \quad (6.9)$$

W charakterze funkcji L , P często stosuje się następujące zależności:

$$\begin{aligned} L(x) = P(x) &= \max\left(0, 1 - |x|^p\right), \\ L(x) = P(x) &= e^{-|x|^p}, \\ L(x) = P(x) &= \frac{1}{1 + |x|^p}, \quad p = 1, 2, 3, \dots \\ L(x) = P(x) &= \left(\frac{1}{1 + |x|}\right)^p, \end{aligned} \quad (6.10)$$

Przykład funkcji przynależności liczby rozmytej typu $L-P$ jest podany w Przykładzie 6.3.

Działania na zbiorach rozmytych są odzwierciedlone w odpowiednich operacjach na ich funkcjach przynależności. Ważną grupą tych działań są

modyfikacje zbiorów rozmytych (ang. *fuzzy hedge*) w celu sformalizowania odpowiednich form zmiennych lingwistycznych wyrażanych przez stopniowanie, na przykład: 'jest ciepło', 'jest mniej ciepło', 'jest bardziej ciepło'. Podstawowe operacje z tej grupy to *rozcieńczanie* oraz *koncentracja*, które są definiowane następująco [68]:

- rozcieńczanie (ang. *dilation*) zbioru rozmytego $A \subseteq V$ jest oznaczane operacją $\text{dil}(A)$ i sprowadza się do wykonania następującego działania na funkcji przynależności $\mu_A(x)$:

$$\mu_{\text{dil}(A)}(x) = (\mu_A(x))^{1/2}; \quad (6.11)$$

- koncentracja (ang. *concentration*) zbioru rozmytego $A \subseteq V$ jest oznaczana operacją $\text{con}(A)$ i oznacza wykonanie następującego działania na funkcji przynależności $\mu_A(x)$:

$$\mu_{\text{con}(A)}(x) = (\mu_A(x))^2. \quad (6.12)$$

Stosowane są także inne niż w powyższych definicjach wykładniki do modyfikacji funkcji przynależności i mówi się wówczas o *sztucznej modyfikacji* (ang. *artificial hedge*), co oznacza się odpowiednio przez *plus* lub *minus* [68]. Na przykład: $\mu_{\text{plus}(A)}(x) = (\mu_A(x))^{1,4}$, $\mu_{\text{minus}(A)}(x) = (\mu_A(x))^{0,8}$.

Wymienione powyżej działania na zbiorach rozmytych i ich modyfikacje pozwalają odwzorowywać złożone zmienne lingwistyczne. Pokazuje to poniższy przykład.

Przykład 6.3. Niech zbiór A oznacza określenie 'temperatura wynosi około 18°C ', a jego funkcja przynależności ma następującą formę

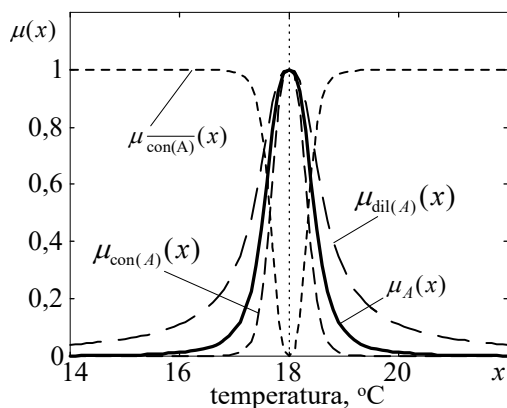
$$\mu_A(x) = \frac{0,1}{0,1 + |x - 18|^3}.$$

Wyznaczyć funkcje przynależności dla zbiorów:

- $\text{con}(A) \leftrightarrow$ 'z pewnością jest 18°C ',
- $\text{dil}(A) \leftrightarrow$ 'być może jest około 18°C ',
- z pewnością nie $A \leftrightarrow$ 'z pewnością nie jest około 18°C '.

Przebiegi funkcji przynależności $\mu_A(x)$, $\mu_{\text{con}(A)}(x)$, $\mu_{\text{dil}(A)}(x)$ oraz $\mu_{\text{z pewnością nie con}(A)}(x) = \mu_{\text{con}(A)}(x) = 1 - \mu_{\text{con}(A)}(x)$ są pokazane na rys. 6.5. Można zauważyć, że zbiór A przedstawia liczbę typu $L-P$ z następującymi parametrami: $m=18$, $\alpha = \beta = 0,1$. \square

Z praktycznego punktu widzenia ważne są relacje rozmyte zachodzące pomiędzy zbiorami rozmytymi. Relacja rozmyta jest określana w



Rys. 6.5. Modyfikacje funkcji przynależności do Przykładu 6.3

których każdy jest określony w specyficznym (swoim) obszarze rozważań. Powstaje zatem pytanie, w jakim obszarze rozważań określony jest wynik relacji? Odpowiedź daje następująca definicja.

Relacja rozmyta R między dwoma niepustymi zbiorami rozmytymi $x \in V$, $y \in U$ jest zbiorem rozmytym $R(V, U)$, który jest określony na iloczynie kartezjańskim $V \times U$, co zapisuje się następująco (patrz (6.1)):

$$R(V, U) = \{(x, y), \mu_R(x, y)\}; (x, y) \in V \times U\}, \quad (6.13)$$

przy czym, przez zapis $V \times U$ należy rozumieć obszar, którego współrzędne są określone przez pary elementów ze zbiorów V oraz U , natomiast $\mu_R(x, y)$ jest funkcją przynależności do zbioru R .

Poniższy przykład ilustruje pojęcie relacji rozmytej dla przypadku, w którym oba zbiory są określone w obszarach dyskretnych.

Przykład 6.4. Mierzone są napięcia dwóch sygnałów stałoprądowych. Wyniki obu pomiarów są podane w postaci liczb rozmytych $a \in A = \{8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12\}$ oraz $b \in B = \{10 \ 11 \ 12 \ 13 \ 14\}$, z funkcjami przynależności odpowiednio

$$\mu_a(x) = \{0,2/8 \ 0,8/9 \ 1/10 \ 0,8/11 \ 0,2/12\} \text{ oraz}$$

$$\mu_b(y) = \{0,4/10 \ 0,8/11 \ 1/12 \ 0,8/13 \ 0,3/14\} \text{ (rys. 6.6a,b).}$$

Zilustrować relację rozmytą: ' a jest prawie równe b ', której funkcja przynależności jest określona w postaci następujących zależności:

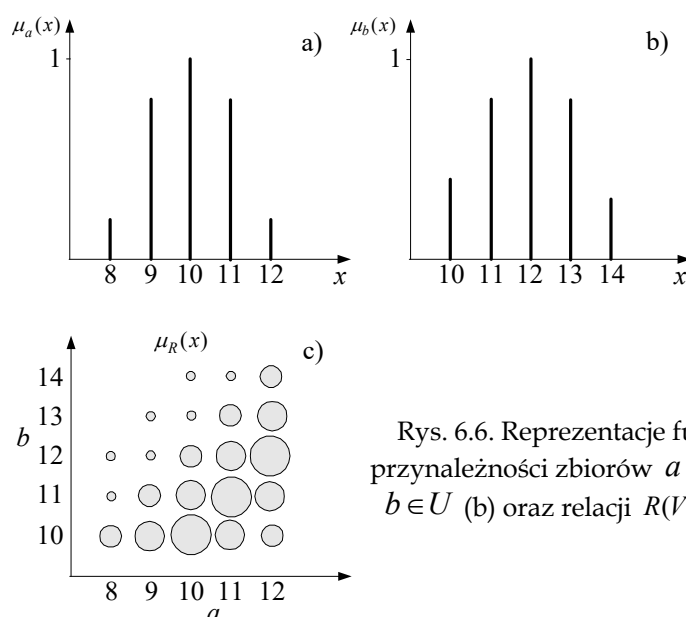
postaci stopnia występowania wspólnych cech, wzajemnego oddziaływania lub wzajemnego powiązania (lub ich braku) dwóch lub więcej zbiorów rozmytych. Takie relacje są określane w języku potocznym gdy, na przykład, mówi się: ' x jest dużo większe niż y ' lub ' $\text{proces } A \text{ jest mniej gwałtowny niż proces } B$ '. Można zauważyć, że relacje takie dotyczą dwóch lub większej liczby zbiorów, z

$$\mu_R(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } |x - y| \leq 0,5 \\ 0,8 & \text{jeśli } 0,5 < |x - y| \leq 1 \\ 0,6 & \text{jeśli } 1 < |x - y| \leq 2 \\ 0,2 & \text{jeśli } 2 < |x - y| \leq 4 \\ 0 & \text{jeśli } 4 < |x - y| \end{cases}$$

Na podstawie opisu sposobu formowania funkcji przynależności relacji $R(A, B)$ można utworzyć następującą macierz przynależności:

$$\mu_R(y, x) = \begin{array}{c} y \setminus x \\ \begin{array}{c} 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12 \\ 14 \\ 13 \\ 12 \\ 11 \\ 10 \end{array} \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0,2 & 0,6 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 & 0,8 & 1 \\ 0,2 & 0,6 & 0,8 & 1 & 0,8 \\ 0,6 & 0,8 & 1 & 0,8 & 0,6 \end{bmatrix}$$

Powyższa funkcja może być także reprezentowana w postaci graficznej jak na rys. 6.6c, gdzie średnice punktów są proporcjonalne do wartości funkcji przynależności. □



Rys. 6.6. Reprezentacje funkcji przynależności zbiorów $a \in V$ (a), $b \in U$ (b) oraz relacji $R(V, U)$ (c)

Można zauważyć, że funkcja przynależności relacji jest zdefiniowana niezależnie od funkcji przynależności zbiorów wchodzących w daną relację. Relacja rozmyta jest zatem rozszerzeniem pojęcia zbioru rozmytego na przypadek (obszar rozważań) wielowymiarowy. Zatem, jeśli relacje $R(x, y)$ oraz $Q(x, y)$ są zdefiniowane w tej samej przestrzeni rozważań $V \times U$, to ich przecięcie i suma są zdefiniowane podobnie, jak (6.5), (6.6):

$$\mu_{R \cup Q}(x, y) = \mu_R(x, y) \oplus \mu_Q(x, y), \quad (6.14)$$

$$\mu_{R \cap Q}(x, y) = \mu_R(x, y) * \mu_Q(x, y). \quad (6.15)$$

I wreszcie, w celu pełnego opisu relacji zachodzących między zbiorami, należy sformułować związki zachodzące między relacjami o różnych obszarach rozważań, które są połączone wspólnymi zbiorami, na przykład, gdy są rozważane złożenia relacji $P(V, U)$ oraz $Q(U, W)$. Tego typu złożenie relacji tworzy nowy zbiór rozmyty $R(V, W)$ i jest oznaczane następującym symbolem:

$$R = P \circ Q, \quad (6.16)$$

przy czym, istnieje przynajmniej jeden element $u \in U$, taki, że $(v, u) \in P$ oraz $(u, w) \in Q$ [68]. Rezultat tego złożenia jest określony w przestrzeni $(v, w) \in R$.

Jeśli określić funkcje przynależności relacji $P(V, U)$: $\mu_P(v, u) \in [0, 1]$ oraz $Q(U, W)$: $\mu_Q(u, w) \in [0, 1]$, to wynik złożenia (6.16) jest zbiorem rozmytym o funkcji przynależności $\mu_{P \circ Q}(v, w) \in [0, 1]$, która jest określona następująco [68]:

$$\mu_{P \circ Q}(v, w) = \sup_{u \in U} (\mu_P(v, u) * \mu_Q(u, w)), \quad (6.17)$$

gdzie operacja $\sup(D)$ oznacza określenie górnej granicy zbioru D i w przypadku zbioru dyskretnego oznacza tyle co $\max(D)$.

Jeśli T -norma w powyższym związku jest określona jako operacja *minimum*, to złożenie (6.17), przy założeniu, że zbiór U jest dyskretny (policzalny), sprowadza się do złożenia typu *max-min* o postaci:

$$\mu_{P \circ Q}(v, w) = \max_{u \in U} [\min(\mu_P(v, u), \mu_Q(u, w))]. \quad (6.18)$$

Natomiast, gdy T -norma w (6.17) jest reprezentowana operacją mnożenia, to w przypadku dyskretnego zbioru U , uzyskuje się złożenie typu *max-iloczyn* (ang. *max-product*):

$$\mu_{P \circ Q}(v, w) = \max_{u \in U} [\mu_P(v, u) \cdot \mu_Q(u, w)]. \quad (6.19)$$

Poniższy przykład ilustruje te zależności.

Przykład 6.5. Określić funkcję przynależności $\mu_{R \circ Q}(x, z)$ złożenia relacji $R(A, B)$ z Przykładu 6.4 z relacją $Q(B, C)$ odpowiadającą zmiennej logistycznej ' C jest dużo większe od b' . Porównywane liczby rozmyte są określone w następującej przestrzeni rozważań: $b \in B = \{10 \ 11 \ 12 \ 13 \ 14\}$ - jak w Przykładzie 6.4 oraz $c \in C = \{13 \ 14 \ 15 \ 16\}$. Relacja $Q(B, C)$ ma funkcję przynależności $\mu_Q(z, y)$, która jest określona w postaci następującej macierzy

$$\mu_Q(z, y) = \begin{matrix} z \setminus y & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 16 & \begin{bmatrix} 1 & 0,8 & 0,6 & 0,4 & 0,4 \end{bmatrix} \\ 15 & \begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 & 0,4 & 0,4 & 0,2 \end{bmatrix} \\ 14 & \begin{bmatrix} 0,6 & 0,4 & 0,4 & 0,2 & 0 \end{bmatrix} \\ 13 & \begin{bmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

W wyniku złożenia relacji $R(A, B)$: ' a jest prawie równe b' z relacją $Q(B, C)$: ' c jest dużo większe od b' otrzymuje się zbiór rozmyty $R \circ Q$: ' a jest prawie równe b i c jest dużo większe od b' , którego funkcja przynależności typu *max-min* jest określona zgodnie z (6.18)

$\mu_{R \circ Q}(z, x) = \max_{y \in B} [\min(\mu_R(y, x), \mu_Q(y, z))]$, co wyraża się następującą macierzą przynależności:

$$\mu_{R \circ Q}(z, x) = \begin{matrix} z \setminus x & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 16 & \begin{bmatrix} 0,6 & 0,8 & 1 & 0,8 & 0,8 \end{bmatrix} \\ 15 & \begin{bmatrix} 0,6 & 0,8 & 0,8 & 0,8 & 0,6 \end{bmatrix} \\ 14 & \begin{bmatrix} 0,6 & 0,6 & 0,6 & 0,6 & 0,6 \end{bmatrix} \\ 13 & \begin{bmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,4 & 0,4 & 0,4 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Na przykład, sposób obliczania elementów w drugim wierszu jest następujący:

$$\mu_{R \circ Q}(15, 8) = \max_{y \in B} [\min(0,6; 0,8), \min(0,2; 0,6), \min(0,2; 0,4), \min(0; 0,4), \min(0; 0,4)] = 0,6$$

$$\mu_{R \circ Q}(15, 9) = \max_{y \in B} [\min(0,8; 0,8), \min(0,6; 0,6), \min(0,2; 0,4), \min(0,2; 0,4), \min(0; 0,2)] = 0,8$$

$$\mu_{R \circ Q}(15, 10) = \max_{y \in B} [\min(1; 0,8), \min(0,8; 0,6), \min(0,6; 0,4), \min(0,2; 0,4), \min(0,2; 0,2)] = 0,8$$

$$\mu_{R \circ Q}(15, 11) = \max_{y \in B} [\min(0,8; 0,8), \min(1; 0,6), \min(0,8; 0,4), \min(0,6; 0,4), \min(0,2; 0,2)] = 0,8$$

$$\mu_{R \circ Q}(15, 12) = \max_{y \in B} [\min(0,6; 0,8), \min(0,8; 0,6), \min(1; 0,4), \min(0,8; 0,4), \min(0,6; 0,2)] = 0,6$$

W przypadku złożenia typu *max-iloczyn*, operacje *min* w powyższych związkach należy zastąpić operacjami mnożenia, co prowadzi do następującej macierzy przynależności:

$$\mu_{R \circ Q}(z, x) = \begin{array}{c} z \setminus x \\ 16 \\ 15 \\ 14 \\ 13 \end{array} \begin{array}{ccccc} 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \left[\begin{array}{ccccc} 0,60 & 0,80 & 1 & 0,80 & 0,64 \\ 0,48 & 0,64 & 0,80 & 0,64 & 0,48 \\ 0,36 & 0,48 & 0,60 & 0,48 & 0,40 \\ 0,24 & 0,32 & 0,40 & 0,40 & 0,32 \end{array} \right] \end{array}$$

Widać, że w tym przypadku funkcja przynależności ma więcej różnych stanów i jest w ten sposób bardziej gładka. \square

6.3.4 Wnioskowanie rozmyte

Przedstawione powyżej określenia i definicje pozwalają zapisać zmienne lingwistyczne w postaci zbiorów rozmytych oraz sformalizować zachodzące pomiędzy nimi relacje. Przetwarzanie tych zmiennych odbywa się na drodze wnioskowania logicznego (rozmytego). Odbywa się to w bloku wnioskowania, którego zadanie i organizacja są podobne do maszyny wnioskującej w systemie ekspertowym, przy czym, w tym przypadku zarówno przetwarzane obiekty, jak reguły przetwarzania należą do dziedziny rozmytej.

Reguły wnioskowania rozmytego mają swoje źródło w regułach tradycyjnego wnioskowania w przestrzeni logiki dwuwartościowej. Są one tworzone według następującego schematu:

- 1) Przesłanka,
- 2) Implikacja,
- 3) Wniosek.

Wnioskowanie logiczne jest procesem kolejnego wykonywania powyższej reguły, co w konsekwencji prowadzi do końcowego wniosku, który jest odpowiedzią na zadaną kwestię w postaci pierwszej przesłanki. We wnioskowaniu przybliżonym (rozmytym) najważniejszą rolę pełni tak zwana reguła *modus ponens* [68], [79].

Reguła *modus ponens* jest określona przez następujący schemat wnioskowania:

- 1) Przesłanka: ' x jest A ',
- 2) Implikacja: 'jeżeli x jest A to y jest B ',
- 3) Wniosek: ' y jest B '.

Gdzie: x , y są nazwami obiektów, a A oraz B - ich właściwościami.

Regułę tę krótko określa się implikacją: $A \rightarrow B$. Innymi słowy, przy danej przesłance można sformułować wniosek, jeżeli spełniony jest warunek określony przez implikację. Jeśli implikacja jest określona w postaci

ogólnej relacji R , to wówczas mówi się o *złożeniowej regule wnioskowania*, której ogólna forma jest następująca [22]:

- 1) ' x **jest** A ',
- 2) ' x R y ',
- 3) ' y **jest** B '.

gdzie: ' x R y ' należy odczytywać w ten sposób, że x jest w relacji R z y .

Reguła *modus ponens* jest podstawowym schematem wnioskowania stosowanym w systemach ekspertowych i systemach rozmytych. W tym ostatnim przypadku zdanie **jeżeli - to**: '**jeżeli** u **jest** A , **to** v **jest** B ', gdzie $u \in U$ oraz $v \in V$, jest wnioskowaniem rozmytym, którego rezultatem jest zbiór rozmyty o funkcji przynależności $\mu_{A \rightarrow B}(x, y)$, przy czym $\mu_{A \rightarrow B}(x, y) \in [0, 1]$. Ta funkcja przynależności określa stopień prawdziwości relacji implikacji pomiędzy zmiennymi numerycznymi x i y .

W praktyce, na podstawie znajomości funkcji przynależności $\mu_A(x)$ oraz $\mu_B(y)$, rezultat wnioskowania rozmytego (czyli funkcję przynależności $\mu_{A \rightarrow B}(x, y)$) można uzyskać na wiele sposobów [73], [79]. W zastosowaniach inżynierskich najczęściej używane są reguły typu *minimum* oraz *iloczyn*, co zapisywane jest w następującej postaci [68]:

- reguła typu *minimum*:

$$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y)); \quad (6.20)$$

- reguła typu *iloczyn*:

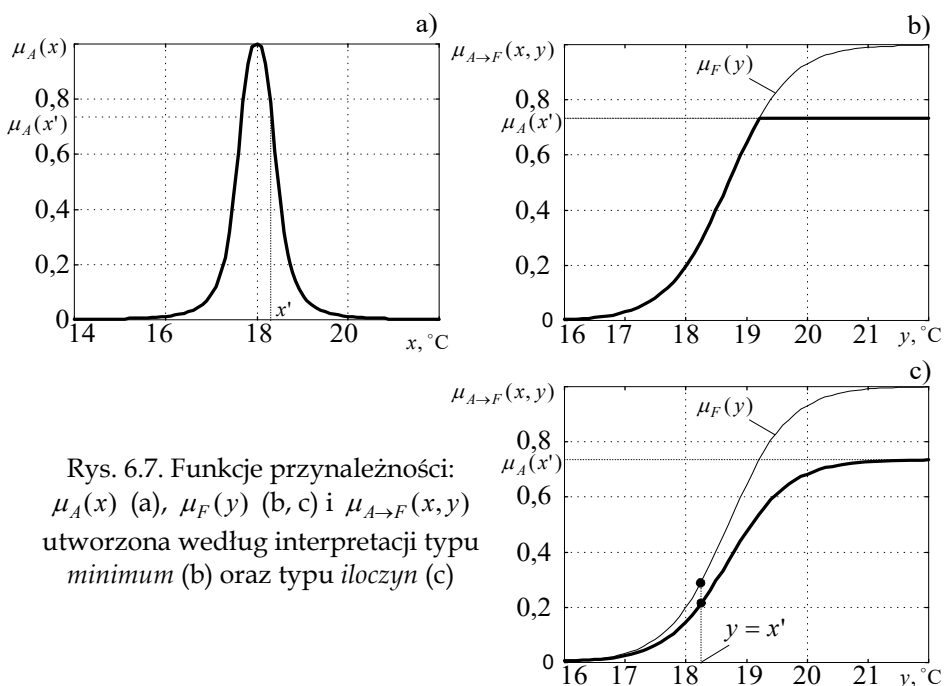
$$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \mu_A(x)\mu_B(y). \quad (6.21)$$

Ich popularność jest z pewnością uzasadniona prostotą obliczeniową. Sposób stosowania tych reguł wyjaśnia poniższy przykład.

Przykład 6.6. Nawiązując do problemu ogrzewania biura zbadać następującą regułę rozmytej implikacji:
jeśli temperatura wynosi około 18°C **to** w biurze jest ciepło.
 Określić funkcję przynależności tej reguły według interpretacji typu *minimum* oraz typu *iloczyn*.

Funkcja przynależności $\mu_A(x), x \in X$ zbioru A : temperatura wynosi około 18°C jest określona w Przykładzie 6.3, a jej przebieg jest pokazany na rys. 6.5. Podobnie, funkcja przynależności $\mu_F(y), y \in Y$ zbioru F : w biurze jest ciepło jest określona w Przykładzie 6.1. W celu określenia numerycznego zakresu zmian funkcji

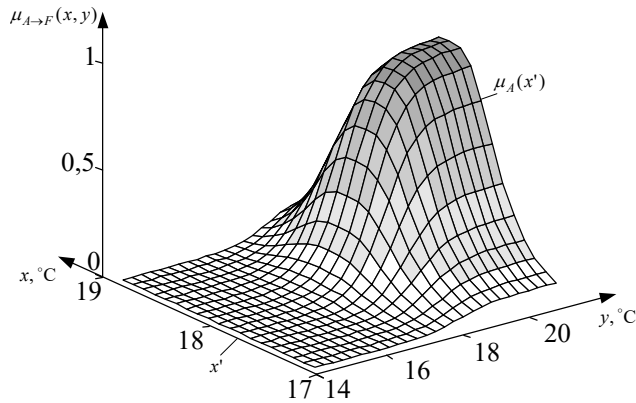
$\mu_F(y)$ można przyjąć, że $\theta_1 = 17^\circ\text{C}$, natomiast $\theta_2 = 22^\circ\text{C}$. Przebieg funkcji przynależności $\mu_A(x)$ oraz $\mu_F(y)$ dla tego przypadku pokazano na rys. 6.7



Rys. 6.7. Funkcje przynależności: $\mu_A(x)$ (a), $\mu_F(y)$ (b, c) i $\mu_{A \rightarrow F}(x, y)$ utworzona według interpretacji typu *minimum* (b) oraz typu *iloczyn* (c)

Analizowana reguła jest określona na zbiorze $A \rightarrow F$, w przestrzeni $X \times Y$. Funkcja przynależności $\mu_{A \rightarrow F}(x, y)$ zależy od aktualnej wartości $\mu_A(x)_{x=x'}$. Według interpretacji typu *minimum* ma ona następującą postać: $\mu_{A \rightarrow F}(x, y) = \min(\mu_A(x'), \mu_F(y))$, natomiast według reguły *iloczynu*: $\mu_{A \rightarrow F}(x, y) = \mu_A(x') \mu_F(y)$. Sposób uzyskania funkcji przynależności $\mu_{A \rightarrow F}(x, y)$ przy stosowaniu obu tych reguł jest wyjaśniony na rys. 6.7b,c.

W ogólnym przypadku funkcja $\mu_{A \rightarrow F}(x, y)$ jest reprezentowana powierzchnią, która jest ograniczona od góry przez wartość $\mu_A(x)$. Jej postać dla reguły typu *iloczyn* jest pokazana na rys. 6.8. Boczne ściany tej powierzchni w przekrojach $0-x$ mają kształt funkcji $\mu_A(x)$, natomiast w przekrojach $0-y$ - funkcji $\mu_F(y)$. Analizując otrzymany wynik w postaci funkcji przynależności $\mu_{A \rightarrow F}(x, y)$ można zauważyć, że jej przebieg zbliża się do przebiegu oryginalnej funkcji $\mu_F(y)$ w miarę tego, jak temperatura jest bliższa wartości 18°C . Wówczas jednak zmienna 'w biurze jest ciepło' może być 'zaakceptowana' jedynie ze współczynnikiem 0,2 (rys. 6.7b). Przy wzroście temperatury do wartości $x' = 18,3^\circ\text{C}$ funkcja przynależności $\mu_{A \rightarrow F}(x, y)$ badanej implikacji zmienia się, przy czym, w



Rys. 6.8. Powierzchnia określająca funkcję przynależności $\mu_{A \rightarrow F}(x, y) = \mu_A(x)\mu_F(y)$

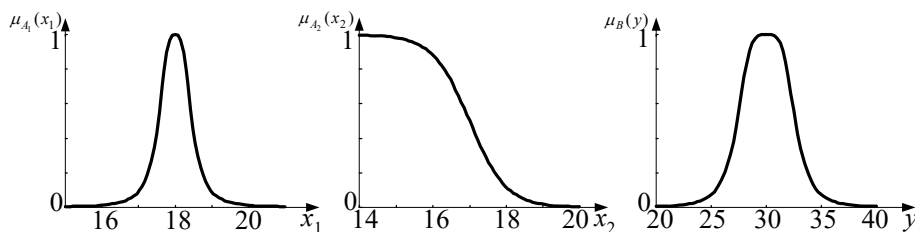
przypadku reguły typu *iloczyn* zmienia się również jej kształt (rys. 6.7c). Można zauważyć, że przy dalszym wzroście temperatury funkcja $\mu_{A \rightarrow F}(x, y)$ będzie się obniżać, co oznacza, że coraz trudniej będzie można ocenić, czy 'jest ciepło'. Ten paradoksalny wniosek wypływa z faktu, że mierząc wartość temperatury na poziomie 18°C (co jest założone w analizowanej implikacji) zmniejsza się dokładność oszacowania wartości temperatury w innych przedziałach. □

Powyższy przykład wskazuje na to, że reguły wnioskowania rozmytego powinny być poprawnie sformułowane, z uwzględnieniem celu, który należy osiągnąć. Ponadto, reguły te powinny pokrywać cały zakres zmian śledzonych zmiennych fizycznych, co wymaga stosowania reguł złożonych.

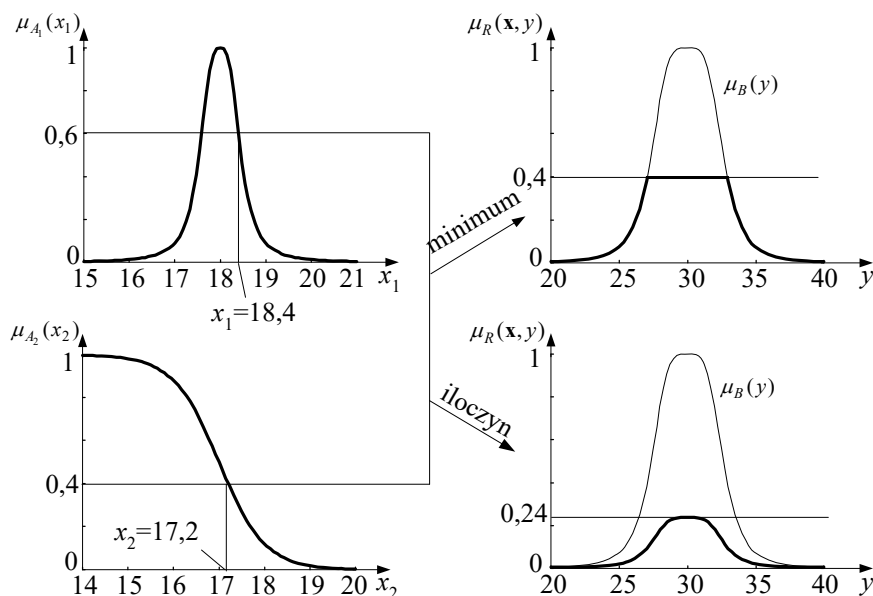
W przypadku złożonych reguł implikacji przedstawione zasady tworzenia funkcji przynależności należy stosować w odniesieniu do każdej rozmytej relacji. Można to pokazać na przykładzie następującej reguły wnioskowania:

R: **jeżeli** (x_1 jest A_1) \wedge (x_2 jest A_2) **to** (y jest B),

gdzie funkcje przynależności $\mu_{A_1}(x_1)$, $\mu_{A_2}(x_2)$ oraz $\mu_B(y)$ mają postać jak na rys. 6.9. Zasada tworzenia funkcji przynależności $\mu_R(\mathbf{x}, y)$, gdzie $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]$, jest pokazana na rys. 6.10.



Rys. 6.9. Funkcje przynależności zbiorów tworzących implikację



Rys. 6.10. Sposób tworzenia funkcji przynależności złożonej implikacji

W ten sposób można przetwarzać dowolnie złożoną listę warunków określających schemat rozmytego wnioskowania, uzyskując pośrednie i końcowe wnioski w postaci zbiorów rozmytych o określonych funkcjach przynależności. Warto zauważyć, że jeśli w jednej regule występują relacje typu: **lub** \leftrightarrow **∨**, to można je rozdzielić na łańcuch reguł dzielonych w tych właśnie miejscach, na przykład, relacja

R: **jeżeli** $(x_1 \in A_1) \wedge (x_2 \in A_2) \vee (x_3 \in A_3) \wedge (x_4 \in A_4) \vee (x_5 \in A_5)$ **to** (y jest B)

może być zastąpiona następującym ciągiem relacji cząstkowych:

R1: **jeżeli** $(x_1 \in A_1) \wedge (x_2 \in A_2)$ **to** (y jest B),

R2: **jeżeli** $(x_3 \in A_3) \wedge (x_4 \in A_4)$ **to** (y jest B),

R3: **jeżeli** $(x_5 \in A_5)$ **to** (y jest B).

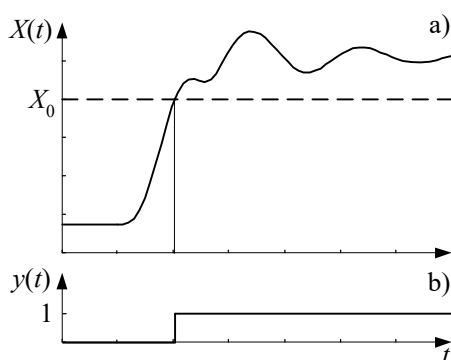
Struktura i zasady organizacji systemu rozmytego różnią się zazwyczaj w zależności od jego przeznaczenia. W zastosowaniach technicznych wyróżnia się zazwyczaj układy rozmytej regulacji oraz układy podejmowania decyzji, które często mają zastosowanie w rozpatrywanych tu układach.

6.3.5 Rozmyte sygnały i nastawy

Sygnały występujące w układach automatyki zabezpieczeniowej mają różny stopień przetworzenia, któremu są poddawane w przekaźniku. Są to więc sygnały wejściowe (po wstępnej filtracji), sygnały kryterialne (na wyjściu układu pomiarowego), sygnały logiczne (które są wynikiem porównania sygnałów kryterialnych z nastawami) oraz sygnały decyzyjne – na wyjściu całego układu (rys. 1.16). W omawianej tu dziedzinie systemy rozmyte są zazwyczaj stosowane do realizacji funkcji decyzyjnych. Realizacja pomiarów za pomocą systemów rozmytych ma, jak dotąd, ograniczone zastosowanie. Dalej przedstawiona zostanie problematyka rozmytej realizacji członu decyzyjnego zabezpieczenia.

Przekaźnik zabezpieczeniowy, rozumiany jako układ pomiarowo-decyzyjny, jest typowym przykładem systemu, którego celem jest klasyfikacja stanu nadzorowanego obiektu do jednej z dwóch kategorii, co wiąże się z podjęciem jednego z następujących działań:

1. - brak zagrożenia → nie podejmuj działań,
2. - wystąpiło zagrożenie → podejmij stosowne działania.



Rys. 6.11. Porównanie wielkości kryterialnej z wartością progową (nastawą) (a) oraz jej wynik (b)

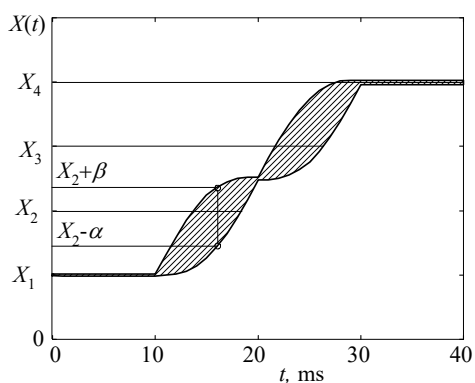
W klasycznym przypadku, sygnał wyjściowy układu decyzyjnego powstaje w wyniku porównania sygnału kryterialnego z nastawą (rys. 6.11). Projektowanie takiego układu musi uwzględniać stan przejściowy pomiaru (w wyniku którego mogą się pojawić dynamiczne przekroczenia zadanej nastawy) oraz charakter zdarzeń w nadzorowanym systemie, które mogą utrudniać rozpoznanie zwarcia.

Podejmowanie decyzji może być uwiarygodnione przez zastosowanie następujących dodatkowych rozwiązań:

- wprowadzenie wielu kryteriów, które mogą bardziej dokładnie odwzorować różne objawy stanów pracy nadzorowanego obiektu (każde kryterium będzie sprawdzane przez porównanie z odpowiednim progiem);
- zastosowanie rozmytego systemu podejmowania decyzji.

Pierwszy z tych środków jest powszechnie stosowany we współczesnych przekaźnikach lub systemach zabezpieczeniowych z różnymi typami przekaźników. Drugie z wymienionych rozwiązań stało się możliwe dzięki rozwojowi teorii systemów rozmytych. Połączenie obu rozwiązań prowadzi do *wielokryterialnego przekaźnika rozmytego*.

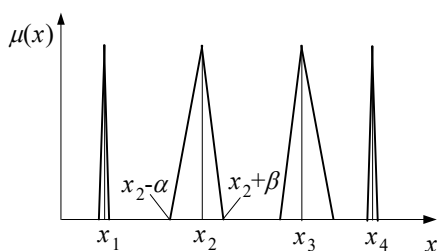
W celu przybliżenia interpretacji fizycznej pojęcia 'rozmyty sygnał kryterialny' można analizować przypadek pomiaru amplitudy sygnału z zastosowaniem pełnokresowego algorytmu Fouriera (3.37). Odpowiedź algorytmu w stanie przejściowym nie jest jednoznaczna ze względu na nieznajomość aktualnej fazy sygnału (rys. 5.1). To oznacza, że zmierzona



Rys. 6.12. Stan przejściowy pomiaru amplitudy sygnału

w tym okresie wartość sygnału nie wskazuje jednoznacznie na określony stan nadzorowanego obiektu. W warunkach rzeczywistego pomiaru, obserwowaną wielkość kryterialną (amplitudę) mogą także zakłócać inne czynniki, jak obecność składowych przejściowych lub odchyłka częstotliwości od wartości znamionowej. Na rys. 6.12 jest pokazany obszar zmian wartości amplitudy w stanie przejściowym pomiaru, gdy oprócz nieznaney

fazy sygnału, jego częstotliwość może się zmieniać w zakresie $\pm 1,5$ Hz od wartości znamionowej. Mierzone wielkości mogą być reprezentowane w postaci liczb rozmytych, których funkcje przynależności są kształtowane przez wysokość zakreślonego obszaru. Zatem, ponieważ wiarygodność pomiaru w stanie ustalonym jest duża, to odpowiednie funkcje przynależności są strome i zakreślają wąskie przedziały zmian (rys. 6.13). Natomiast w stanie przejściowym wiarygodność informacji przekazywanej przez wartość mierzonej wielkości jest mała, co jest odzwierciedlone przez szeroki obszar zakreślany przez funkcję przynależności.



Rys. 6.13. Funkcje przynależności wielkości związanych z pomiarem amplitudy sygnału

Z kolei pojęcie ‘rozmyta nastawa’ (wartość progowa) w przekaźnikach zabezpieczeniowych jest związane ze zbiorem rozmytym określającym wartość nastawy przekaźnika. Funkcja przynależności tego zbioru odzwierciedla stopień pewności założonej wartości progowej. Jak widać na rys. 6.11, w tradycyjnym ‘ostrym’ podejściu, dwustanowy sygnał decyzyjny jest określany przez porównanie wielkości kryterialnej z dokładną wartością progową. Ustalenie wartości progowej odbywa się w drodze analizy różnych zdarzeń wewnątrz zabezpieczanej strefy i w jej otoczeniu. Wartość progę jest dobierana z punktu widzenia poprawnego i jednoznacznego rozdzielenia wszystkich możliwych stanów pracy nadzorowanego systemu na dwa obszary, przy czym, w jednym z nich muszą się znaleźć wszystkie te zdarzenia, które wymagają interwencji przekaźnika. Wiadomo jednak, że decydująca o selektywności zabezpieczenia wartość progowa nie zawsze może być jednoznacznie określona, gdyż różne czynniki losowe, jak na przykład, wartość rezystancji zwarcia lub odmienny od założonego stan nadzorowanego systemu (co może być rezultatem zmiany obciążenia lub konfiguracji sieci), zmieniają założone warunki pracy systemu.

Inne czynniki, które mogą mieć wpływ na wartość nastawy, są natury ekonomicznej lub szerszej – systemowej. Chodzi tu o wzięcie pod uwagę konsekwencji błędnej decyzji przekaźnika, co wyraża się w takim ustawieniu wartości progowej, która przy niepełnej informacji sprzyja wyłączeniu lub blokowaniu wyłączenia.

Jak widać, nastawa przekaźnika jest określana przez eksperta, który bierze pod uwagę różne czynniki związane z warunkami pracy zabezpieczanego obiektu, jego otoczenia, możliwych zakłóceń oraz skutków błędnej decyzji. Wygodnie jest w takim przypadku nastawę przekaźnika odzwierciedlać w postaci zbioru rozmytego G , którego funkcja przynależności dzieli całą przestrzeń rozważań na dwa obszary, jak na rys. 6.14a [45]. Można ją przedstawić w postaci liczby rozmytej typu $L - P$ (6.9), określonej następująco [84]:

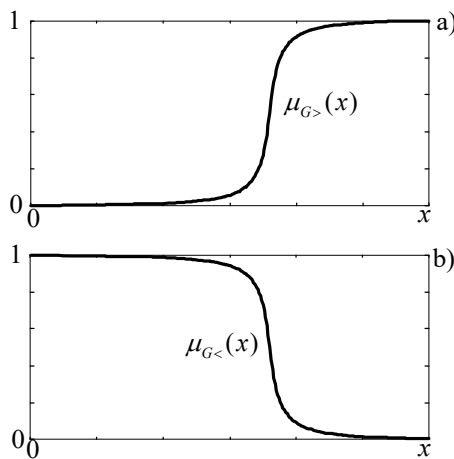
$$\mu_{G>}(x) = \begin{cases} 0,5L\left(\frac{m-x}{\alpha}\right) & \text{jeśli } x \leq m, \\ 1 - 0,5P\left(\frac{x-m}{\beta}\right) & \text{jeśli } x \geq m, \end{cases} \quad (6.22)$$

gdzie parametry m , α , β mają znaczenie jak w (6.9).

Wartość progowa $G >$ związana z funkcją przynależności o postaci (6.22) odnosi się do kryterium sprawdzenia przewyższenia wartości (kryterium

nadmiarowe), na przykład, kryterium nadprądowego. W przypadku kryterium niedomiarowego $G <$ (na przykład, kryterium podnapięciowe), funkcja przynależności może być określona następująco (rys.6.14b)

$$\mu_{G<}(x) = 1 - \mu_{G>}(x). \quad (6.23)$$

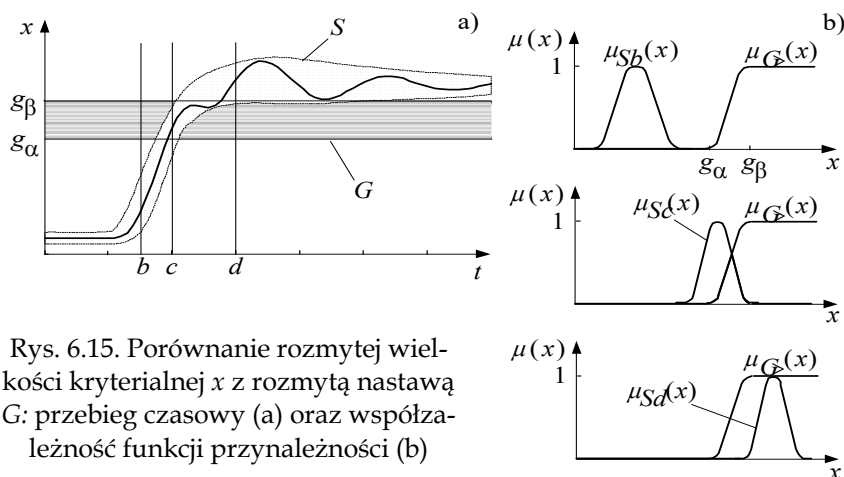


Rys. 6.14. Funkcja przynależności wielkości progowej przekaźnika z kryterium nadmiarowym (przekroczenia nastawy od dołu) - (a) oraz niedomiarowym (obniżenie) - (b)

Nastawa przekaźnika może być zatem rozpatrywana jako typowy parametr rozmyty, którego funkcja przynależności może uwzględniać różne czynniki systemowe. Jeśli rozpatrywane kryterium jest jednoznaczne (często tak jest w przypadku kryterium różnicowego), to wartość progowa może być reprezentowana liczbą rozmytą o funkcji przynależności ze stromą charakterystyką przejścia pomiędzy wartościami 0 i 1. Natomiast w przypadku, gdy użyte kryterium nie może zapewnić jednoznacznej oceny miejsca wystąpienia zwarcia (często ma to miejsce w przypadku kryterium

nadprądowego, gdy mogą wystąpić duże zakłócenia), wartość progowa powinna być reprezentowana liczbą 'bardziej' rozmytą, o mniej stromej funkcji przynależności.

Przykłady porównania rozmytej wielkości kryterialnej z rozmytą nastawą są przedstawione na rys. 6.15. Na rys. 6.15a pokazane są obszary związane z rozmytą nastawą G (zacięzione pole odpowiada przedziałowi zmiany funkcji przynależności $\mu_{G>}(x)$) oraz rozmytym sygnałem kryterialnym S . Wzajemne położenie funkcji przynależności sygnału i wielkości progowej dla trzech różnych czasów b, c, d są pokazane na rys. 6.15b. Powstaje pytanie, w jaki sposób określić rezultat porównania tych dwóch liczb: S i G , gdy są one reprezentowane zbiorami rozmytymi.



Rys. 6.15. Porównanie rozmytej wielkości kryterialnej x z rozmytą nastawą G : przebieg czasowy (a) oraz współzależność funkcji przynależności (b)

W tradycyjnej logice dwuwartościowej porównywanie dwóch wielkości: sygnału, o ostrej wartości s z nastawą, określoną przez ostrą wartość progową g , jest dokonywane zgodnie z operacją logiczną: $r = (s \geq g)$, przy czym $r = 1$ jeśli $s \geq g$ oraz $r = 0$ - w przeciwnym przypadku (porównaj (1.1)). To samo można zapisać używając operacji odejmowania: $r = (s - g)$, przy czym $r = 1$ gdy $s - g \geq 0$ oraz $r = 0$ - w przeciwnym przypadku. Można zauważyć, że wynik porównania określony przez wartość r pełni tu tę samą rolę, co funkcja przynależności w relacji rozmytej, to znaczy, określa stopień spełnienia warunku porównania (porównaj p. 1.5).

W przypadku porównywania rozmytego sygnału kryterialnego S z rozmytą wielkością progową (nastawą) G można skorzystać z operacji odejmowania liczb rozmytych

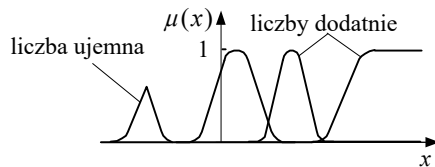
$$R = (S \ominus G). \quad (6.24)$$

Kryterium przekroczenia wartości progowej (kryterium nadmiarowe): $S \geq G$ jest spełnione, gdy zachodzi zależność: $R \geq 0$, natomiast kryterium obniżenia wartości (kryterium niedomiarowe) jest określone przez warunek: $R < 0$. W celu wykorzystania zależności (6.24) można odwołać się do teorii liczb rozmytych.

Rezultatem odejmowania liczb rozmytych S i G (6.24) jest zbiór R , którego funkcja przynależności jest określona następująco [79]:

$$\mu_R(y) = \sup_{\substack{x_S, x_G \\ y = x_S - x_G}} \min\{\mu_S(x_S), \mu_G(x_G)\}. \quad (6.25)$$

W praktyce oznacza to, że do określenia funkcji $\mu_R(y)$ należy wziąć maksymalne wartości funkcji przynależności przecięcia zbiorów odpowiadających obu odejmowanym liczbom. Rezultat odejmowania określony jest w nowym obszarze rozważań: $y = (x_S - x_G) \in Y$, który powstaje z odejmowania argumentów rozpatrywanych liczb. W obszarze tym istotne jest określenie przedziału, dla którego wynik odejmowania jest dodatni (ujemny), co decyduje o spełnieniu odpowiedniego kryterium. Obszar ten wynika bezpośrednio z definicji rozmytej liczby dodatniej (ujemnej). Otóż, liczba R jest dodatnia (ujemna), jeżeli $\mu_R(y) = 0$ dla wszystkich $y < 0$ ($y > 0$) [79]. W przeciwnym przypadku liczba nie jest

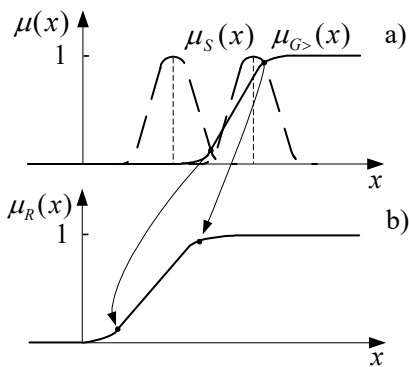


Rys. 6.16. Funkcje przynależności różnych liczb rozmytych

ani dodatnia, ani ujemna (rys. 6.16). Spełnienie kryterium $R = (S \ominus G) \geq 0$ oznacza, że funkcja przynależności $\mu_R(y)$ narasta poczynając od zera w kierunku dodatnich wartości w obszarze rozważań $y \in Y$. Zasadę tę ilustruje rys. 6.17. Porównywane

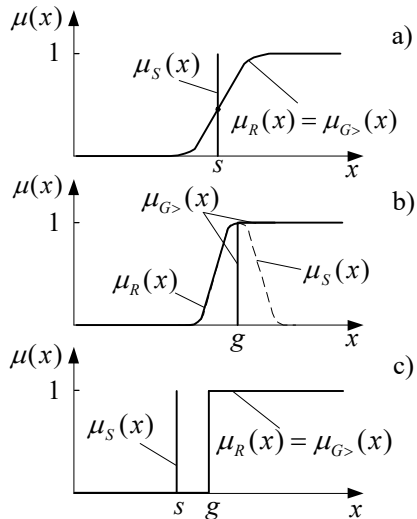
wielkości (sygnał kryterialny i nastawa) mogą być reprezentowane w postaci ostrej lub rozmytej. Sposób uzyskiwania wyniku porównania przy różnych zestawieniach tych wielkości jest pokazany na rys. 6.18.

Należy podkreślić, że zależność (6.25) nie jest jedynym sposobem określania funkcji przynależności rezultatu porównania sygnału z nastawą. W pracach [45], [47] proponuje się zastąpienie funkcji $\sup(\cdot)$ ($\min(\cdot)$) przez iloraz odpowiednich pól zawartych pod funkcjami przynależności: przecięcia zbiorów: $\min\{\mu_S(x), \mu_G(x)\}$ oraz sygnału - $\mu_S(x)$. Tego typu operacje są również stosowane w celu wyostrzania, czyli zamiany wielkości rozmytych na wielkości ostre.



Rys. 6.17. Ilustracja sposobu określania funkcji przynależności rezultatu porównania rozmytego sygnału S z rozmytą nastawą G

W przypadku kryterium niedomiarowego, funkcja przynależności nastawy ma przebieg jak na rys. 6.14b, natomiast kryterium jest sformułowane zgodnie z następującą



Rys. 6.18. Funkcje przynależności rezultatu porównania: ostrego sygnału z rozmytą nastawą (a), rozmytego sygnału z ostrą nastawą (b) oraz ostrego sygnału z ostrą nastawą (c)

relacją: $R = (S \ominus G) \leq 0$. Występują tu podobne zależności, jak w kryterium nadmiarowym, z tym, że wynik porównania jest ujemny (jeśli kryterium jest spełnione), a funkcja przynależności $\mu_R(y)$ rośnie wraz ze zmniejszaniem się wartości argumentu w obszarze rozważań $y \in Y$.

Układ decyzyjny przekaźnika klasyfikuje wszystkie zdarzenia na jego wejściu na dwie kategorie, które objawiają się w postaci decyzji 'wyłącz' lub 'blokuj' (nie wyłączaj). Można zauważyć, że przy powyższych założeniach, zbiór R (6.24) przedstawia liczbę rozmytą, której funkcja przynależności ma charakter logicznej zmiennej wskazującej na działanie typu 'wyłącz': $\delta_W = \mu_R(y)$. Wartość $\delta_W = 1$ oznacza pełne poparcie tej decyzji,

natomiast przypadek, gdy $\delta_W = 0$ odpowiada odmowie poparcia tej decyzji lub pełnemu poparciu decyzji 'blokuj'. Stopień blokowania oznacza się zmienną logiczną δ_B . Odpowiada ona wartości funkcji przynależności $1 - \mu_R(y)$ określającej liczbę rozmytą \bar{R} . Zmienne logiczne δ_W oraz δ_B określają cały obszar decyzyjny przekaźnika.

W ten sposób, przestrzeń decyzyjna przekaźnika może być określona jako zbiór charakteryzujący decyzje 'wyłącz' oraz 'blokuj', którego funkcja przynależności jest określona następująco:

$$\mu_D = \{\mu_R / W, \mu_{\bar{R}} / B\}, \quad (6.26)$$

gdzie: W oraz B oznacza odpowiednio obszar decyzji 'wyłącz' lub 'blokuj'.

Argumenty funkcji w (6.26) obejmują cały obszar decyzyjny przekaźnika. Zgodnie z przyjętą konwencją, obie decyzje (W / B) zajmują ten sam obszar rozważań i w przypadku pojedynczego kryterium są one wzajemnie dopełnieniami.

Wielokryterialna zasada podejmowania decyzji polega na zastosowaniu kilku kryteriów, spośród których część może sprawdzać warunki działania przekaźnika (decyzja: 'wyłącz'), a inne mogą sprawdzać warunki blokowania działania (decyzja: 'blokuj'). W takim przypadku należy wprowadzić jakąś zasadę przetwarzania decyzji cząstkowych, która pozwoli określić ostateczną decyzję przekaźnika. Można tu zastosować metodę agregacji ważonej [45], [109]. W tym celu każde z kryteriów należy rozpatrywać jako zbiór rozmyty R_k , $k = 1, \dots, p$, p - liczba kryteriów, uzyskany w wyniku porównania sygnału z nastawą, tworzący przestrzeń decyzyjną związaną odpowiednio z decyzją typu 'wyłącz' (W) oraz 'blokuj' (B). Tak więc $D = \{W, B\}$ jest przestrzenią decyzyjną wyniku porównania (ma ona dwa elementy, które związane są z dwoma możliwymi stanami przekaźnika). Z decyzją 'wyłącz' k -tego kryterium jest związana funkcja przynależności μ_{Wk} , natomiast z decyzją 'blokuj' - funkcja μ_{Bk} , przy czym $\mu_{Bk} = 1 - \mu_{Wk}$. Rozpatrywane k -te kryterium może być zatem określone przez funkcje przynależności μ_{Wk} oraz μ_{Bk} tworzące zbiór w formie (6.26), który można uważać za k -te kryterium decyzyjne rozpatrywanego przekaźnika [109]:

$$C_k = \{\mu_{Wk} / W, \mu_{Bk} / B\}. \quad (6.27)$$

Metoda ważonej agregacji p kryteriów polega na określeniu wyjściowej decyzji na podstawie ważonej sumy wszystkich kryteriów cząstkowych, przy czym współczynniki wagowe w_1, \dots, w_p spełniają warunek [40], [103]:

$$\sum_{k=1}^p w_k = 1. \quad (6.28)$$

Ostateczne poparcie decyzji 'wyłącz', wyrażone w postaci zbioru δ_W jest zatem określane następującą sumą:

$$\delta_W = w_1 \mu_{W1} + w_2 \mu_{W2} + \dots + w_p \mu_{Wp} \quad (6.29)$$

i podobnie dla decyzji 'blokuj' δ_B . Jeśli przyjąć, że obie decyzje są oceniane za pomocą tych samych wag, to: $\delta_B = 1 - \delta_W$.

Waga w_k określa ważność k -tego kryterium w podejmowaniu decyzji i może być wyznaczona na drodze doświadczalnej z udziałem ekspertów lub w wyniku zastosowania odpowiedniej procedury samoczynnego skalowania algorytmu (ang. *self-adjusting*) [47], [50]. Aby jednak w sposób racjonalny można było porównywać wagi różnych kryteriów, muszą one

dotyczyć podobnych zjawisk w nadzorowanym systemie. W tym celu, w układzie wielokryterialnym można odpowiednio grupować kryteria, wprowadzając rozgałęziony układ decyzyjny. Będzie to dalej pokazane na przykładzie zabezpieczenia transformatora.

W przypadku, gdy rezultat porównania wielkości kryterialnej z nastawą jest wykorzystywany w charakterze wielkości wyjściowej przekaznika, to uzyskana wielkość rozmyta musi być interpretowana w postaci jednoznacznego sygnału, który jest określony w logice dwuwartościowej $[0, 1]$. Przetwarzanie wartości rozmytych w odpowiadające im wielkości w dziedzinie rzeczywistej odbywa się w bloku wyostrzania (rys. 6.2).

6.3.6 Rozmywanie i wyostrzanie

Zgodnie ze schematem blokowym systemu rozmytego (rys. 6.2), układ rozmytego wnioskowania jest połączony z obiektem za pośrednictwem układu rozmywania pomiarów (na wejściu) oraz układu wyostrzania (na wyjściu). Łączą one dwie różne dziedziny reprezentacji wielkości fizycznych.

Blok rozmywania (ang. *fuzzification*) ma na celu zamianę obserwowanych konkretnych wielkości wejściowych w odpowiadające im liczby (zbiory) rozmyte. Formalnie oznacza to przyporządkowanie ostrej wartości określonej w przestrzeni n -wymiarowej $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T \in \mathbf{X}$ odpowiedniego zbioru rozmytego $A^* \subseteq \mathbf{X} = \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \times \dots \times \mathbf{X}_n$. Sposób tego przyporządkowania zależy od charakteru sygnału i jego zastosowania.

W zagadnieniach regulacji najczęściej stosuje się operację rozmywania typu *singleton* (jedna karta w danym kolorze). W tym przypadku funkcja przynależności liczby A^* jest określona następująco:

$$\mu_{A^*}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } \mathbf{x} = \mathbf{x}', \\ 0 & \text{jeżeli } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}'. \end{cases} \quad (6.30)$$

Jeśli dane wejściowe są odkształcone przez zakłócenia, to powyższe przyporządkowanie może nie być adekwatne. Wówczas stosuje się rozmywanie typu *nonsingleton*, w którym funkcja przynależności jest równa: $\mu_{A^*}(\mathbf{x}') = 1$, jak w (6.30) i maleje w miarę oddalania się \mathbf{x} od punktu \mathbf{x}' , co może być określone w postaci następującej funkcji:

$$\mu_{A^*}(\mathbf{x}) = \exp\left(-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\sigma^2}\right), \quad (6.31)$$

gdzie: parametr $\sigma > 0$.

W przypadku zabezpieczeń przekąźnikowych, system rozmyty jest zazwyczaj stosowany do podejmowania decyzji (ang. *fuzzy decision making*). W takim przypadku danymi wejściowymi są wielkości kryterialne, które są uzyskiwane z członu pomiarowego przekąźnika (rys. 1.16). Jak to już pokazano w poprzednim punkcie, stopień rozmycia sygnału można połączyć z wiarygodnością pomiaru, co często jest związane z jego dynamiką: sygnał ustalony lub wolnozmienny można mierzyć dokładniej niż sygnał szybkozmienny. Jest to efekt nie tylko użytej procedury pomiarowej, ale również obecności zakłóceń.

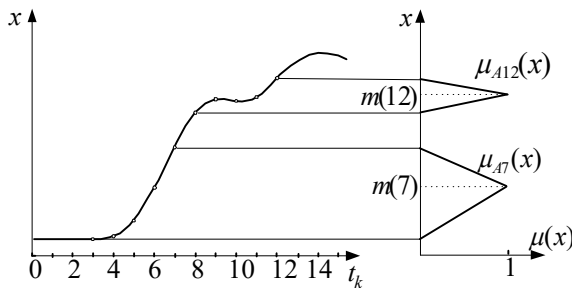
Zakłada, że sygnał dyskretny $x(k)$ jest obserwowany w oknie o szerokości M próbek: $x(k), x(k-1), \dots, x(k-M+1)$. Jeśli wynik transformacji rzeczywistych wartości mierzonych do dziedziny rozmytej przedstawić w postaci liczby typu $L-P$, to jej parametry mogą być określone następująco [45]:

$$m(k) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M x(k-i+1), \quad (6.32a)$$

$$\alpha(k) = m(k) - \min_{i=1, \dots, M} \{x(k-i+1)\}, \quad (6.32b)$$

$$\beta(k) = \max_{i=1, \dots, M} \{x(k-i+1)\} - m(k). \quad (6.32c)$$

W wyniku przekształcenia (6.32) otrzymuje się zbiór rozmyty o postaci (6.8): $A(k) = (m(k), \alpha(k), \beta(k))_{LP}$, którego funkcja przynależności jest określona zgodnie z (6.9)-



(6.10), przy czym $\mu_A(m(k)) = 1$. Ilustracja rozmywania pomiarów zgodnie z procedurą (6.32) dla szerokości okna rozmywania $M = 5$ jest pokazana na rys. 6.19.

Rys. 6.19. Ilustracja sposobu rozmywania danych pomiarowych

Można zauważyć, że stopień rozmycia zbiorów otrzymywanych w

kolejnych krokach pomiarowych jest proporcjonalny do szybkości zmiany sygnału obserwowanego w oknie rozmywania. Zatem, uzyskana wartość jest bardziej rozmyta w przypadku gwałtownej zmiany sygnału, co nie zawsze pokrywa się ze strefą występowania dużych zakłóceń. Jednak bezpośrednio powiązanie procedury rozmywania pomiarów z intensywnością zakłóceń wymagałoby znacznego skomplikowania algorytmu. Rozwiązanie to może być uzasadnione jedynie znacznymi korzyściami płynącymi z zastosowania takiego podejścia.

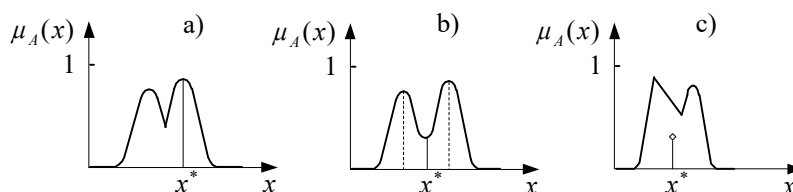
Blok wyostrzania (ang. *defuzzification*) ma na celu zamianę rezultatu wnioskowania rozmytego na odpowiadające mu konkretne wyjściowe wielkości, które mają wymiar parametrów sterujących obiektem. Nie ma jednoznacznej procedury, która pozwalałaby określić sposób zamiany wielkości rozmytej w wartość ostrą przy zachowaniu pełnej o niej informacji. Stosowane są zatem różne praktyczne algorytmy, których ważnym parametrem jest złożoność obliczeniowa. Oto niektóre z nich.

- Wyostrzanie według kryterium maksimum wartości funkcji przynależności [40], [68], [79]. Z obszaru rozważań zbioru rozmytego A w charakterze wielkości wyjściowej wybierana jest ta wartość argumentu x^* , dla której funkcja przynależności $\mu_A(x^*)$ przyjmuje największą wartość:

$$\mu_A(x^*) = \max_{x \in X} \mu_A(x). \quad (6.33)$$

W metodzie tej nie jest uwzględniony kształt funkcji przynależności, co może prowadzić do zaskakujących wyników (rys. 6.20a).

- Wyostrzanie według kryterium wartości średniej z punktów maksymalnych funkcji przynależności [68]. Jeśli funkcja przynależności ma kilka punktów maksymalnych, to odpowiedź jest określana jako wartość średnia z argumentów odpowiadających każdej wartości. Jest to pewna modyfikacja poprzedniej metody, która również może przynosić nieoczekiwane rezultaty (rys. 6.20b).
- Wyostrzanie według kryterium środka ciężkości [68], [103]. W tym przypadku wartość wyjściowa odpowiada argumentowi x^* , w



Rys. 6.20. Ilustracja metod wyostrzania według: kryterium maksimum (a), średniej z maksimum (b) oraz kryterium środka ciężkości (c)

którym obszar określony przez funkcję przynależności $\mu_A(x^*)$ ma punkt ciężkości. W przypadku systemu dyskretnego, w którym obszar rozważań zawiera M kolejnych punktów, jest on określany następującą zależnością:

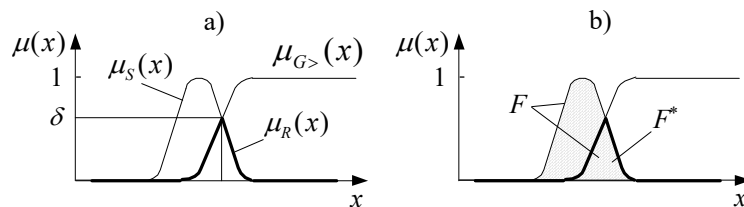
$$x^* = \frac{\sum_{i=1}^M x_i \mu_A(x_i)}{\sum_{i=1}^M \mu_A(x_i)}. \quad (6.34)$$

Ilustracja tej metody jest pokazana na rys. 6.20c.

Należy zauważyć, że w przekaźnikach zabezpieczeniowych wielkość wyjściowa ma charakter dwustanowego sygnału logicznego, który steruje obwodem wyłącznika. Jeśli porównanie sygnału kryterialnego S z nastawą G odbywa się zgodnie z (6.24), to jego wynik charakteryzowany jest nie tyle przez wartość argumentu x^* , dla którego spełnione jest kryterium, lecz przez stopień poparcia decyzji, wyrażony przez wartość funkcji przynależności $\mu_R(y)$, gdzie $y \in Y$ (6.25). Wyjściowy ostry sygnał logiczny $\delta^\#$ może być zatem określony w rezultacie porównania ciąglej zmiennej logicznej δ z zadaniem 'ostrym' progiem Δ :

$$\delta^\# = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } \delta > \Delta, \\ 0 & \text{inaczej.} \end{cases} \quad (6.35)$$

W przypadku przekaźnika z jednym tylko kryterium, wielkość wyjściowa może być określona bezpośrednio w rezultacie porównania sygnału S z progiem G . Wówczas w miejsce operacji odejmowania (6.24) można zastosować operację przecięcia zbiorów o funkcji przynależności: $\mu_R(x) = \min\{\mu_S(x), \mu_G(x)\}$ (rys. 6.21a). Iloraz pól wyznaczonych przez funkcje przynależności sygnału - $\mu_S(x)$ oraz rezultatu porównania -



Rys. 6.21. Wyostrzenie sygnału wyjściowego przekaźnika według kryterium: maksimum (a) oraz ilorazu pól (b)

$\mu_R(x)$ określa funkcję logiczną, która jest proporcjonalna do odpowiedniej decyzji przekaźnika [45] (rys. 6.21b):

$$\delta = \frac{\int_{X_R} \mu_R(x) dx}{\int_{X_S} \mu_S(x) dx} = \frac{F^*}{F}, \quad (6.36)$$

gdzie: F^* , F - pola ograniczone odpowiednimi funkcjami przynależności (rys. 6.21b).

Porównanie zmiennej δ z wartością progową Δ , jak w (6.35), daje rezultat w postaci wyjściowej ostrej zmiennej logicznej $\delta^\#$.

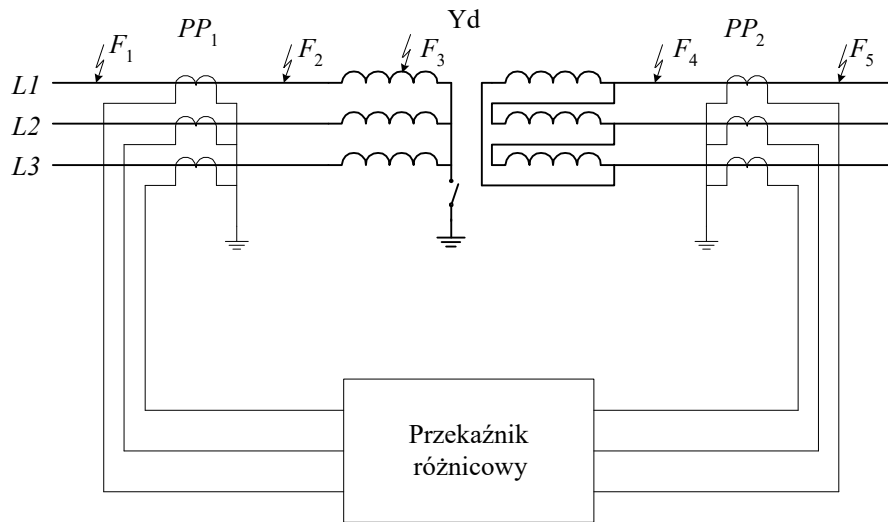
6.3.7 Rozmyte zabezpieczenie różnicowe transformatora

W celu ilustracji powyższych rozważań w odniesieniu do automatyki zabezpieczeniowej zostanie omówiony przykład złożonego zabezpieczenia transformatora elektroenergetycznego.

Zasada zabezpieczenia różnicowego wzdłużnego transformatora. Transformatory elektroenergetyczne nie są łatwymi obiektami do zabezpieczenia przed skutkami zwarć wewnętrznych. Pomimo stosunkowo małej awaryjności transformatorów, nieprawidłowe działanie zabezpieczenia prowadzi do dużych strat zarówno w przypadku działań nadmiarowych, jak i brakujących [93], [98].

Zabezpieczenie różnicowe stosuje się w transformatorach o mocy znamionowej powyżej 5 MVA. Schemat takiego zabezpieczenia w odniesieniu do dwuuzwojeniowego transformatora o grupie połączeń Yd jest pokazany na rys. 6.22 (ogólne kryterium różnicowoprądowe podane jest w p. 1.5.3). Schemat połączeń przekładników po obu stronach transformatora (PP_1 oraz PP_2) odpowiada założeniu, że kompensacja przesunięcia fazowego prądów, wynikająca z określonej grupy połączeń transformatora, odbywa się wewnątrz przekaźnika, co jest powszechnie stosowane w zabezpieczeniach cyfrowych (dotyczy to także wyrównania przekładni transformatora). Pokazany układ odnosi się do zabezpieczenia różnicowego wzdłużnego. W niektórych rozwiązaniach, w charakterze dodatkowej wielkości kryterialnej stosuje się także pomiar napięcia na jednej stronie transformatora.

Istota zabezpieczenia różnicowego polega w tym przypadku na porównaniu prądu różnicowego i_d (1.3) w każdej fazie z zadaną wartością progową. Prąd różnicowy jest określany jako różnica prądów po obu stronach transformatora, z uwzględnieniem przekładni przekładników i



Rys. 6.22. Struktura zabezpieczenia różnicowego transformatora

transformatora oraz odpowiedniego przesunięcia fazowego. Najczęściej kryterium odnosi się do wartości skutecznej tego prądu. Z założenia, prąd ten jest bardzo mały w normalnych warunkach pracy układu oraz przy zwarciach zewnętrznych (F_1 i F_5 na rys. 6.22), natomiast gwałtownie rośnie w przypadku zwarcia wewnątrz zabezpieczanej strefy (F_2 , F_3 i F_4). Niestety, obraz ten ulega zakłóceniu z powodu różnych zjawisk, które mają miejsce w samym transformatorze, jak i w obwodzie pomiarowym, w różnych stanach pracy układu. Powstają wówczas uchybowe prądy różnicowe, których głównymi źródłami są [93], [98]:

- udarowe prądy magnesowania rdzenia transformatora; występują one głównie podczas załączania transformatora;
- błędy przekładników prądowych, głównie spowodowane przez nasycenie się ich rdzeni przy bliskich zwarcjach zewnętrznych;
- duży prąd magnesowania wywołany wzrostem strumienia w rdzeniu transformatora (przy wzroście napięcia);
- zmiana przekładni transformatora w związku z regulacją napięcia przez zmianę położenia zaczeów.

W celu odstrojenia przełącznika od tych zakłóceń stosuje się różne środki zaradcze, spośród których najważniejsze są wymienione poniżej.

- Stosowanie stabilizacji procentowej przełącznika. Czynnikiem stabilizującym jest prąd hamujący wzdłużny i_{st} , określony jako średnia wartość prądów po obu stronach transformatora (1.4). Stabilizacja

procentowa w dużej mierze eliminuje wpływ uchybów pochodzących od przekładni przekładników oraz ich błędów dynamicznych.

- Stabilizacja drugą harmoniczną prądu różnicowego. Duży udział drugiej harmonicznej (powyżej 20%) w prądzie różnicowym wskazuje na to, że źródłem prądu różnicowego jest udarowy prąd magnesowania.
- Stabilizacja piątą harmoniczną prądu różnicowego. Duży udział piątej harmonicznej (powyżej 30%) w prądzie różnicowym występuje podczas stacjonarnego wzrostu strumienia rdzenia transformatora. Ten uchyb jest niekiedy stabilizowany przez dodatkowe kryterium opierające się na estymacji strumienia w rdzeniu transformatora (niezbędny jest wówczas pomiar napięcia).

Ze względu jednak na wzajemne powiązanie zjawisk, ich pełna separacja na podstawie pomiaru prądów (a niekiedy także napięć) przy stosowaniu tradycyjnych technik pomiarowych i decyzyjnych nie jest możliwa. Skonstruowanie dobrego zabezpieczenia transformatora jest nadal dużym wyzwaniem stojącym przed nawet doświadczonym zespołem projektowym.

Wielokryterialny rozmyty przekaźnik różnicowy. Na podstawie powyższych rozważań widać, że w celu zapewnienia dużej czułości i selektywności zabezpieczenia, należy stosować wiele kryteriów, które mogłyby pokryć cały obszar różnych stanów zabezpieczanego transformatora i układu pomiarowego. W takim przypadku duże znaczenie ma określenie odpowiednich algorytmów komparacji (sygnałów kryterialnych z nastawami) oraz przetwarzania logicznych sygnałów decyzyjnych. Poniżej przedstawione jest przykładowe rozwiązanie z wykorzystaniem do tego celu systemu rozmytego [84], [101], [102].

Z punktu widzenia zabezpieczenia, można wyróżnić następujące stany pracy transformatora, które są klasyfikowane przez przekaźnik:

- 1) udarowe nasycenie rdzenia,
- 2) stacjonarny wzrost strumienia magnetycznego w rdzeniu,
- 3) zwarcie zewnętrzne z nasyceniem się rdzeni przekładników prądowych,
- 4) zwarcie zewnętrzne bez nasycenia *PP* ale przy ich niedopasowanych przekładniach w stosunku do przekładni transformatora,
- 5) zwarcie wewnętrzne,
- 6) normalny stan pracy.

Widać, że tylko jeden z wymienionych sześciu stanów powinien prowadzić do zadziałania zabezpieczenia. Zadaniem przekaźnika jest poprawna klasyfikacja tych zdarzeń.

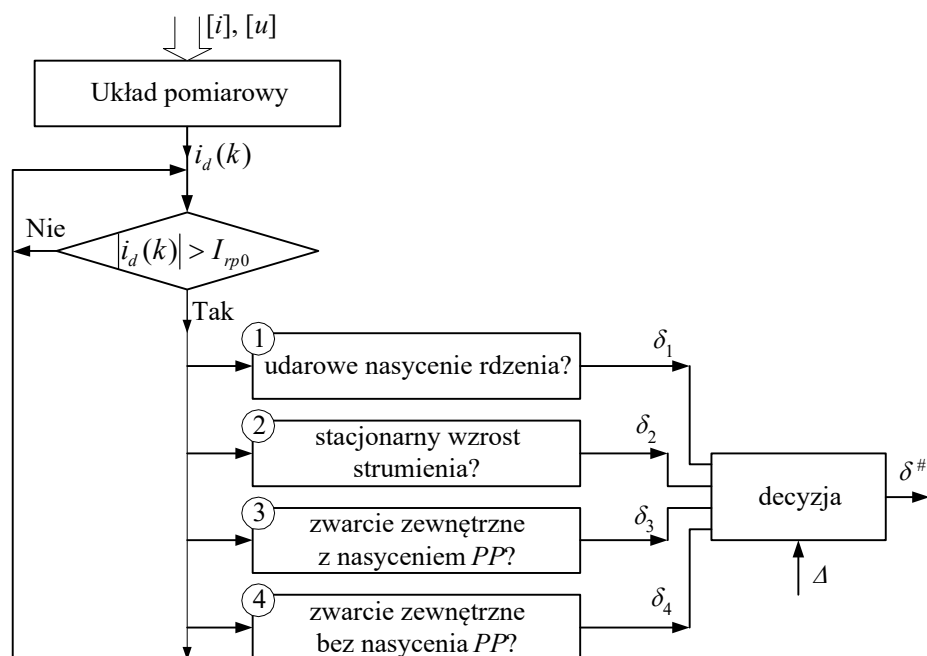
Przełącznik zabezpieczenia różnicowego jest pobudzany wówczas, gdy chwilowa wartość prądu różnicowego $i_d(k)$ przekroczy pewną ustaloną wartość progową I_{rp0} (rys. 1.22). Sygnał pobudzenia przełącznika uruchamia odpowiednie procedury, które kończą się podjęciem decyzji typu 'wyłącz' lub 'blokuj'. Zakładając, że pobudzenie przełącznika jest równoznaczne z zakwalifikowaniem stanu transformatora do grupy innej niż 'stan normalny', można przyjąć, że algorytm zabezpieczenia polega na odrzuceniu hipotezy o zwarciu wewnętrznym. Odrzucenie tej hipotezy powoduje przejście przełącznika do stanu normalnego, co oznacza 'blokuj wyłączenie'. W każdym innym przypadku przełącznik podejmuje decyzję 'wyłącz'. Wartość prądu rozruchowego I_{rp0} wynosi zazwyczaj kilka procent prądu znamionowego transformatora.

W rozpatrywanym przełączniku rozmytym główne założenie o braku zwarcia wewnętrznego jest sprawdzane w drodze równoległej analizy czterech hipotez, które wywodzą się z wymienionych powyżej pierwszych czterech grup (1-4) zjawisk obserwowanych przez zabezpieczenie. Zjawiska te mają źródła inne niż zwarcie wewnętrzne, a zatem nie powinny prowadzić do wyłączenia obiektu. Analiza sprowadza się do oszacowania, zgodnie z zasadami logiki rozmytej, następujących zmiennych lingwistycznych:

- (1) 'nie występuje udarowe nasycenie rdzenia transformatora';
- (2) 'nie ma miejsca stacjonarny wzrost strumienia';
- (3) 'nie występuje zwarcie zewnętrzne przy jednoczesnym nasyceniu rdzeni PP' ';
- (4) 'nie występuje zwarcie zewnętrzne bez nasycenia rdzeni PP' '.

Wartość powyższych zmiennych można określić za pomocą wielkości δ_i , $i = 1, \dots, 4$, które zmieniają się w zakresie $[0, 1]$. Jeśli wartość δ_i zbliża się do jedności, to oznacza, że i -ta zmienna lingwistyczna ma dużą wiarygodność, co sprzyja decyzji o zakwalifikowaniu danego zdarzenia do zwarcia wewnętrznego. Struktura opisywanego układu decyzyjnego jest pokazana na rys. 6.23. Można zauważyć, że przy 'niekwestionowanym' zwarciu wewnętrznym wszystkie wartości δ_i , $i = 1, \dots, 4$ będą bliskie jedności, co ułatwia poprawną decyzję typu 'wyłącz'.

W celu uwiarygodnienia decyzji również w innych stanach pracy transformatora zaproponowano dwanaście następujących kryteriów, które są odpowiednio przyporządkowane do wymienionych czterech grup [46].



Rys. 6.23. Struktura rozmytego przekaźnika różnicowego transformatora

1. Udar prądu magnesującego może być wykluczony jeśli spełnione są następujące kryteria:

Kryterium C₁: wartość prądu różnicowego jest większa od największej oczekiwanej wartości prądu magnesującego G_1 . W charakterze wielkości kryterialnej można rozpatrywać amplitudę pierwszej harmonicznej prądu różnicowego $I_{d1}(k)$, co prowadzi do następującego warunku:

$$S_1 = I_{d1}(k) > G_1, \quad (6.37)$$

który odnosi się do prądu w każdej fazie transformatora.

W powyższym zapisie S_1 oznacza sygnał kryterialny, a G_1 jest wartością progową (nastawą).

Kryterium C₂: w przebiegach prądu różnicowego wszystkich trzech faz transformatora nie ma płaskiego odcinka, w którym wartość prądu i jego pierwszej pochodnej są małe, o długości nie mniejszej od 1/6 okresu. To kryterium może być różnie formalizowane. Na przykład, sygnał kryterialny można określić w następujący sposób:

$$S_2 = \min_{j=0,1,\dots,N-1} \left\{ \max_{\substack{m=0,1,\dots,N/6 \\ f=L1,L2,L3}} |i_{df}(k-j-m)| \right\} > G_2, \quad (6.38)$$

gdzie: N – liczba próbek w okresie podstawowej harmonicznej,
 $f = L1..L3$ – rozpatrywana faza.

W powyższym kryterium stan nasycenia rdzenia jest sprawdzany przez badanie kształtu prądu różnicowego [101].

Kryterium C₃: stosunek wartości amplitudy drugiej harmonicznej prądu różnicowego $I_{d2}(k)$ w odniesieniu do amplitudy pierwszej harmonicznej $I_{d1}(k)$ nie przekracza zadanego progu G_3 :

$$S_3 = \frac{I_{d2}(k)}{I_{d1}(k)} < G_3. \quad (6.39)$$

Kryterium to jest znane jako blokada od drugiej harmonicznej prądu różnicowego.

2. Wzrost strumienia magnetycznego w rdzeniu w warunkach stacjonarnych może być wykluczony, jeśli są spełnione następujące kryteria:

Kryterium C₄: wartość prądu różnicowego jest większa od największej spodziewanej wartości prądu magnesującego. W charakterze wielkości kryterialnej można rozpatrywać amplitudę prądu różnicowego $I_{d1}(k)$ (6.37), co prowadzi do następującego warunku:

$$S_4 = S_1 > G_4, \quad (6.40)$$

który odnosi się do prądu w każdej fazie transformatora.

Kryterium to jest powtórzeniem C_1 , z tym, że wartość G_4 jest zazwyczaj dużo mniejsza od G_1 , co pozwala w wielu przypadkach wykluczyć nasycenie w warunkach stacjonarnych.

Kryterium C₅: wartość strumienia w rdzeniu transformatora nie przekracza pewnej zadanej wielkości G_5 . Odpowiedni warunek można zdefiniować w odniesieniu do całki napięcia $u(k)$ mierzonego na zaciskach jednej strony transformatora. Wówczas kryterium przyjmuje następującą postać:

$$S_5 = \sum_{j=0}^{N/2-1} u(k-j) < G_5, \quad (6.41)$$

Jeśli napięcie nie jest mierzone, to kryterium jest pomijane, a wzrost strumienia w rdzeniu jest kontrolowany przez kryteria C_4 oraz C_6 .

Kryterium C₆: udział piątej harmonicznej w prądzie różnicowym nie przekracza zadanej wartości G_6 . Zwykle bada się w tym celu stosunek amplitud piątej i pierwszej harmonicznej, co prowadzi do następującej relacji:

$$S_6 = \frac{I_{d5}(k)}{I_{d1}(k)} < G_6. \quad (6.42)$$

Kryterium to jest znane jako blokada od piątej harmonicznej prądu różnicowego.

3. Zwarcie zewnętrzne połączone z nasyceniem się rdzeni przekładników prądowych może być wykluczone, jeśli są spełnione następujące kryteria:

Kryterium C₇: duża wartość wzdłużnego prądu stabilizującego i_{st} nie występuje przed pojawieniem się dużej wartości prądu różnicowego [102]. Kryterium to jest zazwyczaj stosowane w odniesieniu do amplitud podstawowej harmonicznej I_{st1} odpowiednich prądów. Polega ono na stwierdzeniu kolejności zdarzeń i może być określone następująco:

$$S_7 = \max_{j=p-N+1, \dots, p} (I_{st1}(j)) < G_7, \quad (6.43)$$

$$\text{gdzie: } p = \begin{cases} r-1 & \text{jeśli } s=0, \\ s-1 & \text{jeśli } s>0, \end{cases} \quad (6.44)$$

r – numer próbki, w której nastąpiło pobudzenie przekaźnika, s – numer próbki, w której prąd różnicowy przekroczył pomocniczą wartość H_7 , która powinna być większa od prądu różnicowego $H_7 > I_{st0}$: $I_{d1} > H_7$ (w przeciwnym przypadku $s=0$).

Kryterium C₈: poziom drugiej harmonicznej prądu różnicowego w stosunku do składowej podstawowej nie przekracza zadanej wartości G_8 :

$$S_8 = S_3 < G_8. \quad (6.45)$$

Jest to kryterium podobne do C_3 , z tym, że wartość G_8 jest tak dobie-rana aby wykluczyć nasycenie się rdzeni PP . Nastawa G_8 jest zazwyczaj większa od G_3 .

Kryterium C₉: prąd różnicowy przekracza wartość oczekiwaną przy zwarcjach zewnętrznych, którym towarzyszy nasycenie rdzeni PP :

$$S_9 = S_1 > G_9. \quad (6.46)$$

4. Obserwowane zdarzenie nie może być zakwalifikowane jako zwarcie zewnętrzne bez wystąpienia nasycenia *PP* jeśli są spełnione następujące kryteria:

Kryterium C₁₀: wartość prądu różnicowego jest dużo większa od wartości stabilizującego prądu wzdłużnego. W przypadku stosowania zasady kontroli przyrostu prądu po zwarcu, kryterium ma następującą postać:

$$S_{10} = \frac{|I_{d1}(k) - I_{d1p}|}{|I_{st}(k) - I_{stp}|} > G_{10}, \quad (6.47)$$

gdzie: indeks *p* wskazuje na odpowiednie wielkości przed wystąpieniem zwarcia.

To kryterium odpowiada sprawdzeniu położenia trajektorii prądu różnicowego na charakterystyce stabilizacji procentowej (ang. *biased differential characteristic*) [98].

Kryterium C₁₁: stosunek amplitud prądu różnicowego i wzdłużnego jest różny dla wszystkich trzech faz transformatora (kontrola niesymetrii – symetryczne trójfazowe zwarcie wewnętrzne jest praktycznie niemożliwe) [102]. W tym celu, dla trzech faz transformatora obliczane są wskaźniki (6.47), na podstawie których określone jest kryterium:

$$S_{11} = |S_{10L1}(k) - S_{10L2}(k)| + |S_{10L1}(k) - S_{10L3}(k)| + |S_{10L2}(k) - S_{10L3}(k)| > G_{11}, \quad (6.48)$$

Kryterium C₁₂: prąd różnicowy przekracza wartość maksymalnego spodziewanego prądu wywołanego bliskim zwarcem zewnętrznym przy maksymalnym niedopasowaniu przekładni *PP*:

$$S_{12} = S_1 > G_{12}. \quad (6.49)$$

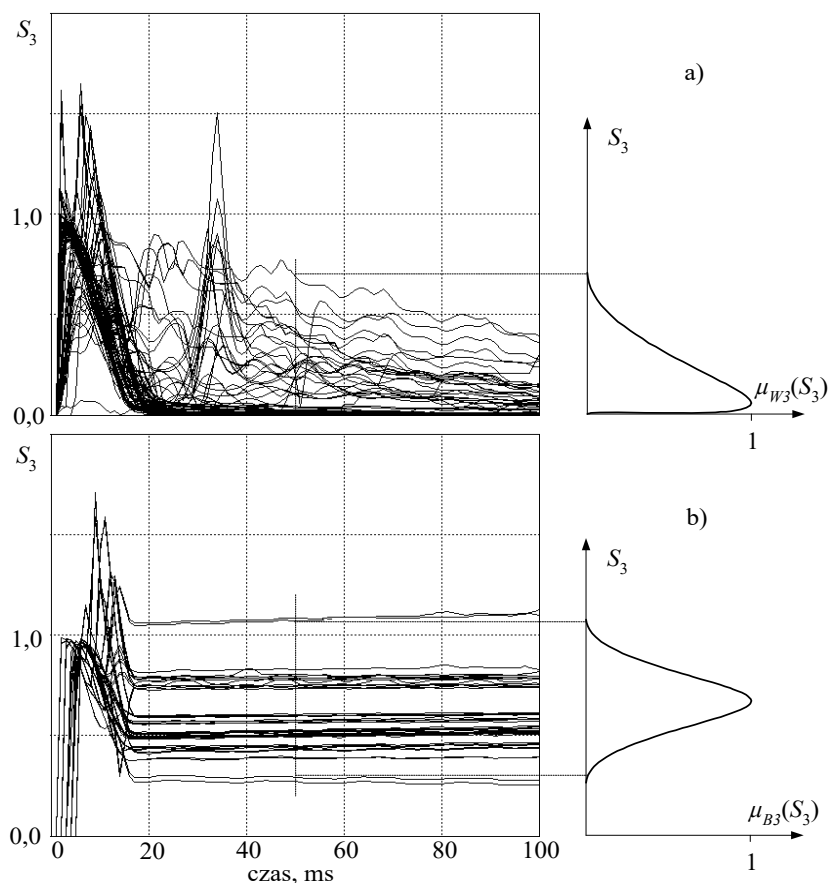
W przypadku przekaźnika z wielokryterialną zasadą podejmowania decyzji kryteria powinny pokrywać cały obszar związany z możliwymi warunkami pracy transformatora. Nie są tutaj szczegółowo wyjaśnione powody stosowania poszczególnych kryteriów oraz ich uzasadnienie. Bliższe szczegóły na ten temat można znaleźć w literaturze specjalistycznej [93], [98]. Przedstawiona lista nie wyczerpuje zbioru różnych kryteriów stosowanych w omawianym typie przekaźnika i jest w dużym stopniu arbitralna. W dalszym ciągu wysuwane są nowe pomysły w tej dziedzinie – zarówno w zakresie metod pomiarowych, jak i stosowanych wielkości kryterialnych [78], [84], [101], [102]. Należy zauważyć, że pomimo na pozór skomplikowanego zapisu wymienionych kryteriów, realizacja odpowiednich pomiarów nie jest złożona, tym bardziej, że niektóre mierzone wielkości są wykorzystywane wielokrotnie.

W rozpatrywanym przekaźniku poszczególne warunki kryterialne mają charakter rozmyte. Dla uproszczenia zakłada się dalej, że jedynie wielkość progowa (nastawa) jest wielkością rozmytą, natomiast sygnał kryterialny jest reprezentowany wielkością 'ostrą'. Na podstawie rozważań prowadzonych w p. 6.3.5 wiadomo, że charakter funkcji przynależności rozmytej nastawy zależy od tego, czy dane kryterium jest nadmiarowe, czy niedomiarowe. Ma tu zatem miejsce kombinacja tych charakterystyk.

Aby stosowanie wymienionych kryteriów dało spodziewaną wysoką selektywność zabezpieczenia należy poprawnie dobrać poszczególne wartości progowe (ich funkcje przynależności). Jest to dosyć złożone zadanie, w którym należy uwzględnić cały zakres zmian wartości sygnału kryterialnego i przyporządkować mu odpowiednie wartości funkcji przynależności nastawy. Zostanie przedstawiony sposób określenia funkcji przynależności wielkości progowej G_3 , stosowanej w kryterium C_3 w celu odróżnienia zwarcia wewnętrznego od innych zakłóceń za pomocą analizy drugiej harmonicznej prądu różnicowego. Z użyciem modelu trójfazowego dwuuzwojeniowego transformatora i fragmentu systemu zasilającego wykonano szereg testów zakładając różnego rodzaju zwarcia zewnętrzne (z nasyceniem oraz bez nasycenia PP), wewnętrzne, warunki stacjonarnego nasycenia rdzenia oraz udaru prądu magnesującego [46].

Uzyskane przebiegi sygnału kryterialnego S_3 są pokazane na rys. 6.24: z wydzieleniem przypadków prowadzących do udaru prądu magnesującego (rys. 6.24a) oraz zwarć wewnętrznych (rys. 6.24b). Pomiar został wykonany za pomocą pełnookresowego algorytmu Fouriera.

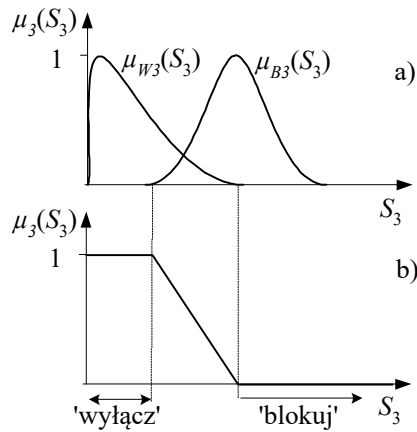
W celu określenia funkcji przynależności kryterium C_3 wprowadza się dwie pomocnicze rozmyte zmienne logiczne, które odpowiadają następującym zmiennym lingwistycznym: 'nie ma zwarcia wewnętrznego, gdyż stwierdzono udar prądu magnesującego' - $B3$ oraz 'jest zwarcie wewnętrzne, gdyż stwierdzono stosunkowo mały udział drugiej harmonicznej w prądzie różnicowym' - $W3$. Funkcje przynależności obu zmiennych: μ_{W3} oraz μ_{B3} można oszacować na podstawie statystycznej analizy zarejestrowanych pomiarów sygnału S_3 (rys. 6.24). Pokazane przebiegi



Rys. 6. 24. Wyznaczanie funkcji przynależności nastawy G_3 : zwarcie wewnętrzne - 'wylączy' (a) oraz udar prądu magnesującego - 'blokuje' (b)

funkcji μ_{W3} , μ_{B3} odpowiadają rozkładowi sygnału kryterialnego dla czasu 50 ms. Analizując te przypadki można określić przedziały wartości sygnału S_3 , w których powinna być podjęta decyzja o blokowaniu lub wylączeniu obiektu. Jak widać, kryterium to nie może być w pełni selektywne, gdyż istnieją takie obszary wartości sygnału S_3 , w których funkcje przynależności decyzji 'blokuje' oraz 'wylączy' nakładają się lub mają małe wartości. Rozszerzając rejon decyzji 'wylączy' na większe wartości S_3 można zwiększyć stopień poprawnych decyzji przy zwarcjach wewnętrznych z nasyceniem się rdzeni *PP*, jednak wówczas transformator będzie zbędnie wyłączany podczas udarów prądu magnesującego.

Funkcję przynależności rozpatrywanego kryterium można oszacować na podstawie analizy przebiegu funkcji μ_{W3} oraz μ_{B3} (rys. 6.25a). W



Rys. 6.25. Formowanie funkcji przynależności nastawy G_3 .

obszarze 'niepewnej' klasyfikacji zdarzenia poszukiwana funkcja μ_3 będzie się zmieniać od wartości 1 (nie występuje udarowy prąd magnesowania, a więc - 'wyłącz') do wartości 0 (występuje udarowy prąd magnesowania, a więc - 'blokuj'). W rezultacie tych rozważań otrzymuje się funkcję przynależności μ_3 , która jest pokazana na rys. 6.25b. Przedstawiono ją w formie uproszczonej do linii prostych, gdyż najczęściej brak jest dostatecznych danych do nakreślenia jej bardziej wiarygodnej postaci. Należy

zauważyć, że wzajemne relacje pomiędzy analizowanymi zjawiskami zmieniają się w czasie, czego przyczyną jest zarówno stan przejściowy obserwowany w mierzonych prądach, jak i błędy dynamiczne pomiaru. W celu uwzględnienia tego faktu można stosować zmienne w czasie nastawy przekaźnika [50].

W złożonym układzie decyzyjnym, jaki ma zastosowanie w rozpatrywanym przekaźniku, poprawny dobór nastaw jest, jak widać, złożonym zadaniem, które może być powierzone tylko doświadczonemu ekspertowi. Znane są również formalne metody określania tych nastaw na podstawie badań symulacyjnych [46], [101], [102]. W rozpatrywanym przypadku istotnym czynnikiem porządkującym proces syntezy nastaw jest podział całego pola decyzyjnego na cztery obszary, które odnoszą się do podobnych zjawisk w nadzorowanym obiekcie. Kryteria przyporządkowane do poszczególnych grup są przetwarzane według metody ważonej agregacji (6.29). Zatem, wielkość logiczna δ_1 , określająca stopień spełnienia hipotezy: 'nie występuje udarowe nasycenie rdzenia transformatora' na podstawie kryteriów C_1 , C_2 oraz C_3 jest określana następująco:

$$\delta_1 = w_1\mu_1 + w_2\mu_2 + w_3\mu_3, \quad w_1 + w_2 + w_3 = 1, \quad (6.50)$$

gdzie: $w_i \in (0,1)$ odzwierciedla stopień ważności kryterium C_i .

Podobnie określone są wielkości logiczne charakteryzujące pozostałe grupy kryteriów:

$$\delta_2 = w_4\mu_4 + w_5\mu_5 + w_6\mu_6, \quad w_4 + w_5 + w_6 = 1, \quad (6.51)$$

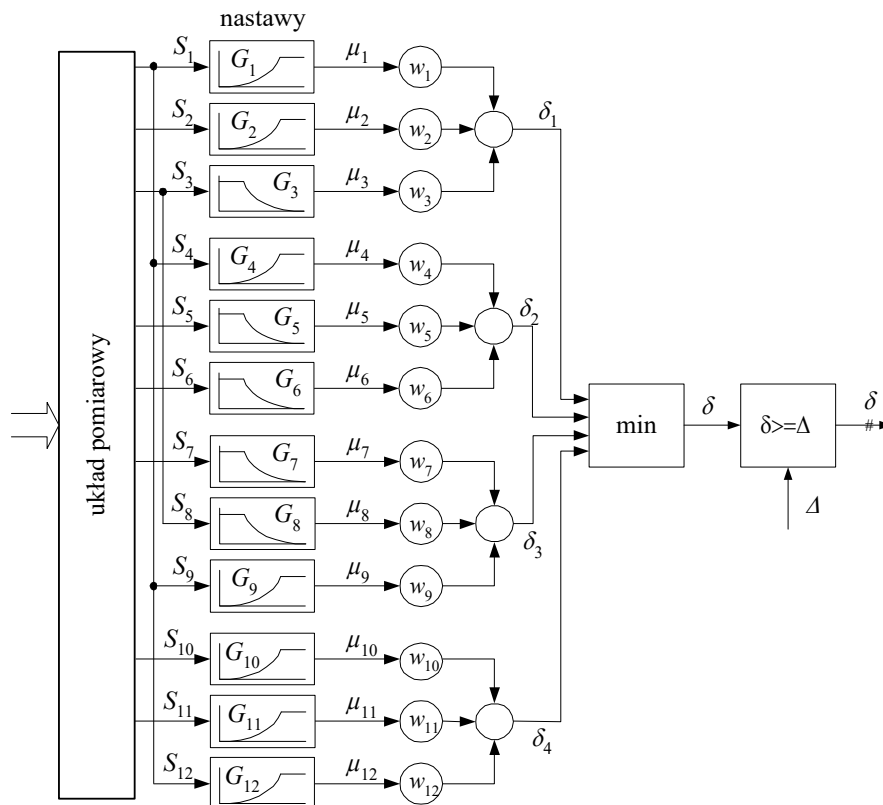
$$\delta_3 = w_7\mu_7 + w_8\mu_8 + w_9\mu_9, \quad w_7 + w_8 + w_9 = 1, \quad (6.52)$$

$$\delta_4 = w_{10}\mu_{10} + w_{11}\mu_{11} + w_{12}\mu_{12}, \quad w_{10} + w_{11} + w_{12} = 1. \quad (6.53)$$

Jeśli wystąpi którekolwiek ze zdarzeń, które wyklucza zwarcie zewnętrzne, to powinna zostać podjęta decyzja o wyłączeniu. Zatem, przetwarzanie wielkości δ_i powinno się odbywać zgodnie z operacją T-normy, odpowiadającej iloczynowi odpowiednich zbiorów. Może ona być reprezentowana następującą funkcją

$$\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4). \quad (6.54)$$

Schemat podejmowania decyzji odpowiadający powyższym rozważaniom jest pokazany na rys. 6.26. Na wyjściu układu rozmytego dokonywana jest operacja wyostrzania zgodnie z (6.35). W blokach odpowiadających porównaniu ostrego sygnału kryterialnego z rozmytą nastawą pokazano charakter funkcji przynależności. Można zauważyć, że w zbiorze



Rys. 6.26. Struktura rozmytego bloku decyzyjnego przekaźnika różnicowego

wielkości, które należy określić na etapie nastawiania zabezpieczenia znajdują się także współczynniki wagowe w_i . Również w stosunku do nich można zastosować odpowiednie procedury samoczynnego określania wartości na drodze symulacyjnych eksperymentów [50].

6.4 Sztuczne sieci neuronowe

6.4.1 Wprowadzenie

Z punktu widzenia sposobu przetwarzania informacji, sztuczne sieci neuronowe (lub po prostu sieci neuronowe) są najbardziej reprezentacyjnym przedstawicielem technik sztucznej inteligencji. Zarówno nazwa, jak i struktury SSN czerpią inspirację z rozwiązań spotykanych w przyrodzie żywej. Sztuczna sieć neuronowa powstaje przez połączenie sztucznych neuronów, które imitują działanie elementów systemu nerwowego żywych istot. W dużym stopniu przejęte zostało również nazewnictwo stosowane w anatomii układu nerwowego, chociaż należy być ostrożnym w doszukiwaniu się zbyt daleko idących analogii pomiędzy SSN a systemem nerwowym znanym z biologii.

Sieć neuronowa jest strukturą złożoną ze wzajemnie połączonych elementów przetwarzających sygnały wejściowe. Elementy przetwarzające pozostają we wzajemnym współdziałaniu, co przy odpowiedniej koordynacji może prowadzić do pożądanego zachowania się całej struktury. Cechą charakterystyczną tej struktury jest zdolność uczenia się, co jest rozumiane jako właściwość programowania w odpowiedzi na pojawiające się wymuszenia. Proces uczenia może się odbywać w trybie normalnej pracy układu lub na etapie go poprzedzającym. W tym sensie SSN może być rozpatrywana jako narzędzie służące do imitacji pracy neuronów w mózgu i rozwiązywania problemów, które są typowe dla mózgu, a więc: identyfikacji, czy też klasyfikacji różnych obiektów lub zjawisk.

Podstawowe właściwości SSN wynikają z dużej zdolności obliczeniowej, która jest zapewniona dzięki zasadzie przetwarzania równoległego, charakterystycznego dla tych struktur oraz dużej redundancji przetwarzania informacji, co czyni taki układ odpornym na zakłócenia i uszkodzenia - również ta cecha ma swoje źródła w oryginale biologicznym. Przy wykorzystaniu odpowiedniego sprzętu staje się możliwe przetwarzanie dużej liczby danych w czasie rzeczywistym.

Prace nad rozwojem i zastosowaniem SSN uległy gwałtownemu przyspieszeniu w połowie lat osiemdziesiątych ubiegłego wieku po

zdefiniowaniu bardzo efektywnego algorytmu uczenia sieci wielowarstwowej znanego dzisiaj jako *algorytm propagacji wstecznej* (ang. *backpropagation algorithm*) [35], [58], [73], [92]. Rozpowszechnienie tego nowego narzędzia przetwarzania informacji było związane z kilkoma czynnikami, wśród których najistotniejsze to: ograniczenia dotychczasowego szeregowego przetwarzania stosowanego w standardowych procesorach, trudności w ograniczeniu błędów związanych z numeryczną reprezentacją złożonych systemów (zwłaszcza w nieliniowym zakresie pracy) oraz rozwój technologii elektronicznej.

Rozwój SSN ma już swoją długą historię, podczas której powstało wiele koncepcji odnośnie do ich struktury, sposobu uczenia i sposobu realizacji algorytmu przetwarzania [33], [35]. Te właśnie parametry charakteryzują właściwości sieci neuronowych.

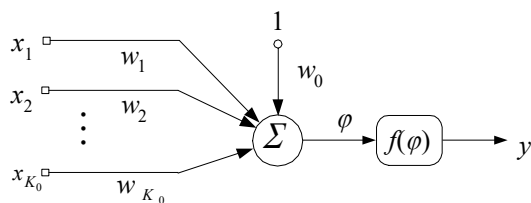
SSN mają kilka istotnych właściwości, które decydują o ich atrakcyjności jako narzędzia przetwarzania sygnałów w automatyce elektroenergetycznej:

- łatwość klasyfikacji zdarzeń,
- zdolność uczenia się (adaptacji do nowych warunków),
- zdolność uogólniania (generalizowania),
- tolerancja na błędy i uszkodzenia.

Te cechy sprawiają, że układy neuronowe są proponowane do realizacji niemal wszystkich funkcji automatyki elektroenergetycznej. W zakresie zabezpieczeń przekaźnikowych odnosi się to do zabezpieczeń linii [9], [12], [32], [42], [105] i realizacji automatyki SPZ [2], [3], zabezpieczeń transformatorów [4], [49], [78], lokalizacji miejsca zwarcia [8], [71], korekcji błędów w torze pomiarowym [48], [65], klasyfikacji rodzaju zwarcia [53], [64], [86], [87], [91], [94], pomiarów wielkości kryterialnych [42], [106] i innych.

6.4.2 Struktury sieci neuronowych

Struktura elementarnego modelu neuronu jest pokazana na rys. 6.27. Model ten zawiera jeden centralny układ przetwarzania



Rys. 6.27. Model neuronu

centralny układ przetwarzania sygnałów dopływających z K_0 wejść. Pojedynczy sygnał wyjściowy jest określany zgodnie z następującą zależnością:

$$y = f(\varphi) = f\left(\sum_{i=0}^{K_0} w_i x_i\right), \quad (6.55)$$

gdzie: x_i – sygnał wejściowy, $i = 1, 2, \dots, K_0$, $x_0 = 1$, w_i – współczynnik wagowy, $i = 0, 1, \dots, K_0$, $w_0 x_0$ – wartość progowa (wielkość odniesienia, polaryzacja), $f(\varphi)$ – funkcja aktywacji neuronu, φ – sygnał wyjściowy sumatora, y – sygnał wyjściowy neuronu.

Funkcja sumatora w (6.55) może być zapisana w postaci wektorowej

$$\varphi = \mathbf{w}^T \mathbf{x}, \quad (6.56)$$

gdzie: $\mathbf{w} = [w_0 \ w_1 \ \dots \ w_{K_0}]$, $\mathbf{x} = [x_0 \ x_1 \ \dots \ x_{K_0}]^T$.

W charakterze funkcji aktywacji neuronu $f(\varphi)$ występują zazwyczaj:

- funkcja skokowa:

$$f(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{gdym } \varphi \geq 0, \\ 0 & \text{gdym } \varphi < 0, \end{cases} \quad (6.57)$$

- funkcja liniowa (z ograniczeniami):

$$f(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{gdym } \varphi > 1, \\ -1 & \text{gdym } \varphi < -1, \\ \varphi & \text{gdym } |\varphi| < 1, \end{cases} \quad (6.58)$$

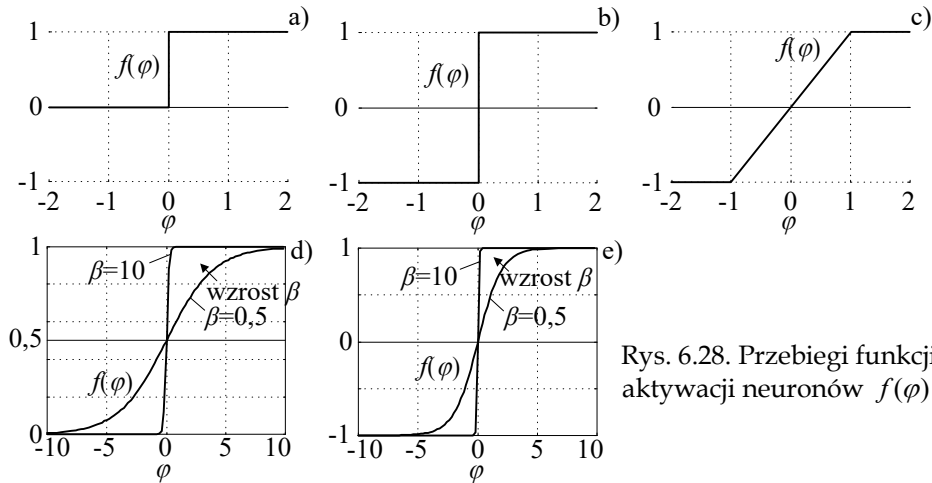
- sigmoidalna funkcja unipolarna:

$$f(\varphi) = \frac{1}{1 + e^{-\beta\varphi}} \quad (6.59)$$

lub bipolarna:

$$f(\varphi) = \tanh(\beta\varphi) = \frac{1 - e^{-2\beta\varphi}}{1 + e^{-2\beta\varphi}}. \quad (6.60)$$

Funkcja skokowa może być także bipolarna (signum) – wówczas wartość funkcji mieści się w zbiorze $(-1, 1)$. Przebiegi tych funkcji są pokazane na rys. 6.28. Wraz ze wzrostem parametru β funkcje sigmoidalne stają się coraz bardziej strome, dążąc do odpowiednich funkcji skokowych. Neuron (6.55) ze skokową funkcją przetwarzania ($\beta \rightarrow \infty$) nazywa się perceptronem [58], [92]. W przeciwnym przypadku jest to neuron sigmoidalny [73]. Często nie czyni się tego rozróżnienia i omawiany model neuronu nazywa się po prostu, perceptronem.

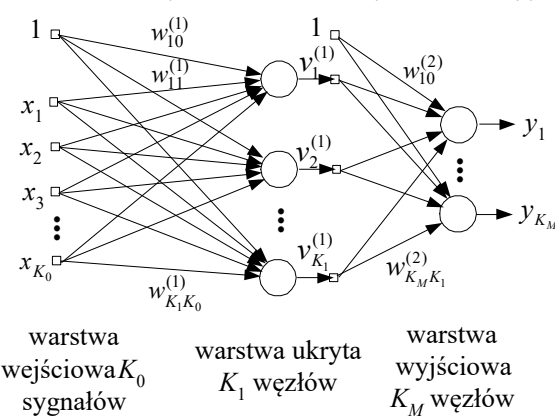


Rys. 6.28. Przebiegi funkcji aktywacji neuronów $f(\varphi)$

Uczenie neuronu z funkcją przetwarzania (6.55) polega na takim doborze współczynników wagowych w_i , aby operacja (6.55) była zgodna z pożądanym przetwarzaniem wektora sygnałów wejściowych x_i w sygnał wyjściowy y .

Sieci jednokierunkowe

Model neuronu z rys. 6.27 można użyć do budowy bardziej złożonych struktur sieci neuronowych. Na rys. 6.29 pokazany jest przykład *sieci jednokierunkowej* z warstwą wejściową, wyjściową oraz jedną warstwą pośrednią.



Rys. 6.29. Struktura dwuwarstwowej sieci jednokierunkowej

Przetwarzanie odbywa się w dwóch ostatnich warstwach, więc jest to sieć dwuwarstwowa. Warstwa pośrednia jest nazywana warstwą ukrytą, gdyż tworzące ją neurony nie mają bezpośredniego powiązania z otoczeniem. Często na schematach sieci neuronowych, dla uproszczenia, pomija się sygnał polaryzacji.

Przetwarzanie sygnałów w i -tej warstwie perceptronu wielowarstwowego odbywa się zgodnie z następującą zależnością

$$\mathbf{v}^{(i)} = f^{(i)}(\mathbf{W}^{(i)} \mathbf{q}^{(i-1)}), \tag{6.61}$$

gdzie:

$\mathbf{v}^{(i)} = [v_1^{(i)} \ v_2^{(i)} \ \dots \ v_{K_i}^{(i)}]^T$ - wektor sygnałów na wyjściu i -tej warstwy,

$$\mathbf{W}^{(i)} = \begin{bmatrix} w_{10}^{(i)} & w_{11}^{(i)} & \dots & w_{1K_{i-1}}^{(i)} \\ w_{20}^{(i)} & w_{21}^{(i)} & \dots & w_{2K_{i-1}}^{(i)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{K_i0}^{(i)} & w_{K_i1}^{(i)} & \dots & w_{K_iK_{i-1}}^{(i)} \end{bmatrix} - \text{macierz wagowa pomiędzy } i-1\text{-szą a}$$

i -tą warstwą,

$$\mathbf{q}^{(i-1)} = \begin{cases} \mathbf{x} & \text{dla } i = 1, \\ \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{v}^{(i-1)} \end{bmatrix} & \text{dla } i = 2, 3, \dots, M, \end{cases}$$

\mathbf{x} - wektor sygnałów wejściowych (6.56), $f^{(i)}(\cdot)$ - funkcja aktywacji neuronów i -tej warstwy, M - liczba warstw przetwarzania w sieci, K_0 , K_M - liczba sygnałów, odpowiednio, na wejściu i na wyjściu sieci.

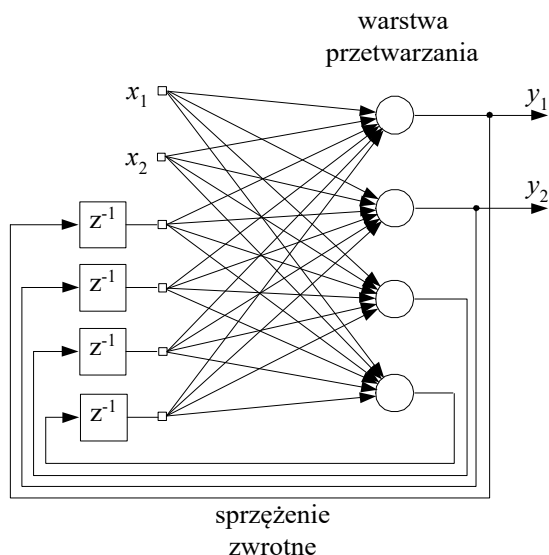
Zakłada się przy tym, że wszystkie neurony i -tej warstwy są jednakowe. Rezultatem przetwarzania w ostatniej warstwie jest wektor sygnałów wyjściowych sieci:

$$\mathbf{y} = \mathbf{v}^{(M)} = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_{K_M}]^T. \quad (6.62)$$

Na bazie perceptronu mogą być budowane złożone, wielowarstwowe sieci jednokierunkowe. Obecnie takie sieci są powszechnie stosowane w zagadnieniach predykcji, filtracji sygnałów, selekcji informacji, podejmowania decyzji. Ich popularność jest związana ze stosunkowo prostą budową oraz dobrze rozpoznany algorytm uczenia [26], [35].

Sieci rekurencyjne

Modyfikacja perceptronu wielowarstwowego polegająca na stworzeniu sprzężenia zwrotnego pomiędzy wyjściem i wejściem sieci prowadzi do *sieci rekurencyjnej*. Sieci tego typu mogą mieć różną strukturę w zależności od sposobu i głębokości połączenia neuronów warstwy wyjściowej (lub ukrytej) z warstwą wejściową. Przykładowa struktura takiej sieci jest pokazana na rys. 6.30. Jest to sieć typu RTRN (ang. *Real-Time Recurrent Network*), która jest szczególnie przydatna do przetwarzania sygnałów w czasie rzeczywistym [33], [73]. W warstwie przetwarzania znajdują się neurony wyjściowe oraz neurony ukryte. Sprzężenie zwrotne jest tworzone przez połączenie neuronów warstwy przetwarzania (wyjściowych lub ukrytych) z warstwą wejściową poprzez linie opóźniające. Warstwa wejściowa jest zbudowana z tych właśnie sygnałów oraz zewnętrznych sygnałów wejściowych.



Rys. 6.30. Struktura rekurencyjnej sieci neuronowej

Istnieje wiele odmian sieci rekurencyjnych zbudowanych na bazie perceptronu. Dzięki sprzężeniu zwrotnemu, układy takie mają swoją wewnętrzną dynamikę, gdyż, ze względu na stosowane opóźnienia i wzajemne połączenia, stan ustalony osiągany jest po wielokrotnym obiegu wymuszenia wewnątrz sieci. Zmiana stanu któregośkolwiek neuronu oddziałuje na całą sieć. Z tego względu sieci rekurencyjne nadają się do analizy i symulacji procesów

dynamicznych. Niestety, ujemną stroną wprowadzonego sprzężenia zwrotnego jest możliwość występowania obszarów niestabilnej pracy tych sieci.

Sieci Hopfielda

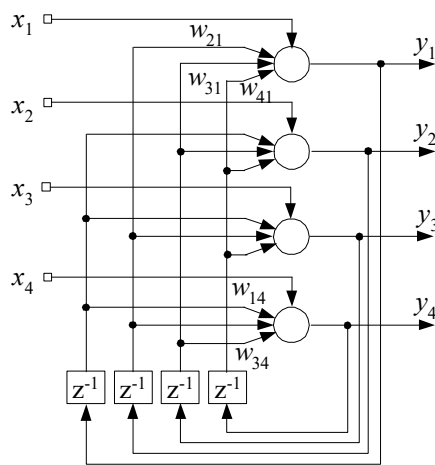
Ważną klasą sieci rekurencyjnych są *sieci Hopfielda*. Z punktu widzenia realizowanych przez nie funkcji można je rozpatrywać jako pamięci asocjacyjne, których podstawowym zadaniem jest ocena stopnia podobieństwa zapamiętanych wzorców z formami (obrazami, wzorcami) prezentowanymi na wejściu. System taki, dzięki sprzężeniu zwrotnemu, ma właściwości dynamicznego poszukiwania zbioru punktów, które zawierają podstawowe informacje o prezentowanym wzorcu i porównania go z zawartością pamięci o wzorcu modelowym (wcześniej wyuczonym).

Schemat przykładowej sieci Hopfielda jest pokazany na rys. 6.31. Sprzężenie zwrotne obejmuje wszystkie wyjścia sieci, przy czym, nie ma sprzężeń własnych ($w_{ii} = 0$). Jest to jeden z warunków stabilności sieci. Drugi z nich wymaga, aby macierz wagowa była symetryczna ($w_{ij} = w_{ji}$) [33]. Przetwarzanie w sieci Hopfielda odbywa się zgodnie z zależnością:

$$\mathbf{y}(k) = f(\mathbf{W}\mathbf{y}(k-1) + \mathbf{x}) \quad (6.63)$$

gdzie: $\mathbf{W} = \{w_{ij}\}$ – kwadratowa symetryczna macierz współczynników wagowych z zerowymi elementami diagonalnymi, $\mathbf{x} = [x_{10} \ x_{20} \ \dots \ x_{M0}]$ – wektor wejściowych współczynników polaryzujących, M - liczba neuronów, $f(\cdot)$ – funkcja aktywacji neuronów (najczęściej jest to funkcja dwustanowa).

Nauczona sieć, to znaczy sieć z wagami ustalonymi na podstawie wzorców uczących, może być użyta do weryfikacji podobieństwa testów reprezentowanych wektorami \mathbf{x} z zapamiętanym wzorcem. Jest to faza



Rys. 6.31. Struktura sieci Hopfielda

odtworzeniowa, która odbywa się w dwóch etapach. Najpierw na wejścia polaryzujące neuronów podawany jest wektor testowy, a następnie, zgodnie z (6.63) następuje iteracyjne ustalanie się odpowiedzi sieci z warunkiem początkowym $\mathbf{y}(0) = \mathbf{x}$. W przypadku funkcji aktywacji typu sygnum (układ jest wówczas nazywany siecią dyskretną), uzyskany stan ustalony zawiera zakodowaną informację o stopniu przynależności wektora testowego do wzorca. Stan ustalony jest osiągnięty to pewnej liczbie iteracji, jeśli spełniony jest warunek:

$$y_i(k+1) = y_i(k), \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (6.64)$$

W celu analitycznej oceny procesu zbieżności i bieżącego stanu sieci wprowadza się pojęcie funkcji energetycznej (funkcji kryterialnej, funkcji Lapunowa), która w przypadku sieci dyskretnych jest najczęściej definiowana w postaci następującego związku [58], [96]:

$$S(\mathbf{y}) = -\frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{W} \mathbf{y} - \mathbf{x}^T \mathbf{y} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M w_{ij} y_i y_j - \sum_{i=1}^M x_i y_i \quad (6.65)$$

W przypadku sieci ciągłej (w której funkcje aktywacji neuronów są ciągłe), wyrażenie (6.65) jest uzupełniane o składniki, które odzwierciedlają stopień 'nasylenia' stanu poszczególnych neuronów. Funkcja energetyczna jest tak dobierana, aby w procesie iteracyjnego ustalania odpowiedzi, jej wartość nie wzrastała. Stwarza to bardzo dogodną sytuację do analitycznego poszukiwania rozwiązania. W tym celu wystarczy określić

minimum funkcji energetycznej. Jej określenie nie jest jednak proste dla dowolnej konfiguracji sieci [74].

Funkcja przetwarzania sieci (6.63) jest zależnością nieliniową reprezentującą złożoną powierzchnię, często z wieloma punktami minimalnymi, co powoduje, że uzyskane rozwiązanie nie zawsze związane jest z minimum globalnym. Ta niedogodność sprawia, że sieci Hopfielda są zazwyczaj stosowane z różnymi modyfikacjami [11], [33], [73].

Duże możliwości algorytmiczne są związane z sieciami Hopfielda realizowanymi w wersji ciągłej (analogowej). Wówczas dynamika sieci jest reprezentowana przez zależności różniczkowe, co pozwala projektować bardzo efektywne struktury przetwarzania informacji i estymacji parametrów procesu w postaci analogowych układów scalonych [11], [33]. Algorytm poszukiwania minimum funkcji energetycznej, a więc i ustalonego rozwiązania, sprowadza się do rozwiązania następującego równania (przy założeniu liniowej funkcji aktywacji) [11], [58]:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \mathbf{W}\mathbf{y}(t) + \mathbf{x} = -\nabla_{\mathbf{y}} S(\mathbf{y}), \quad (6.66)$$

gdzie: $\nabla_{\mathbf{y}} S(\mathbf{y}) = \frac{\partial S(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} = \left[\frac{\partial S}{\partial y_1} \quad \frac{\partial S}{\partial y_2} \quad \dots \quad \frac{\partial S}{\partial y_M} \right]^T$ – gradient funkcji energetycznej $S(\mathbf{y})$ (6.65).

Różne modyfikacje, zarówno definicji funkcji energetycznej, jak i sposobów rozwiązywania równania dynamiki (6.66), tworzą algorytmy rozwiązywania wielu użytecznych problemów z zakresu optymalizacji, identyfikacji parametrów procesu i rachunku macierzowego [10], [11], [59], [72].

6.4.3 Strategie uczenia sieci neuronowych

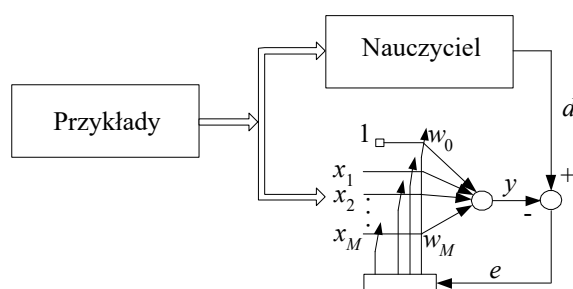
Strategie uczenia (programowania) sieci neuronowych można podzielić na dwie kategorie: uczenie z nauczycielem (ang. *supervised learning*) oraz uczenie bez nauczyciela (ang. *unsupervised learning*).

W celu realizacji uczenia z nauczycielem (nadzorowanego) należy znać poprawny (postulowany) stan sygnałów na wyjściu sieci. Tego typu uczenie odbywa się 'na przykładach', przy czym, każdy przykład zawiera zbiór sygnałów wejściowych sieci oraz odpowiadający mu zbiór sygnałów wyjściowych. Te właśnie sygnały wyjściowe stanowią bazę do odpowiedniej korekcji współczynników wagowych sieci.

Uczenie bez nauczyciela (nienadzorowane) jest stosowane wówczas, gdy nie można korzystać z powyższej zasady (brak wiarygodnych

przykładów uczących) lub syntezę rozpatrywanej sieci można prościej przeprowadzić w inny sposób. Należy zaznaczyć, że brak przykładów nie oznacza, że nie są dostępne sygnały wejściowe. Te ostatnie muszą być znane choćby z warunków i celu zastosowania sieci. Warunkiem skutecznego doboru współczynników wagowych sieci jest w tym przypadku dostępność dostatecznie dużego zbioru danych wejściowych, na podstawie których algorytm uczenia może rozpoznać ich charakterystyczne cechy lub wyodrębnić stosowne wzorce [33], [58]. Odbywa się to poprzez korelację sygnałów uczących lub przez wykorzystanie konkurencji neuronów między sobą [74].

Strategia uczenia jest związana z wybraną strukturą sieci neuronowej. W przypadku sieci jednokierunkowych wielowarstwowych i ich pochodnych, stosowana jest zasada uczenia pod nadzorem. W dalszej części będą rozpatrywane metody uczenia z nauczycielem, które pokrywają większość zagadnień związanych z zastosowaniem sieci neuronowych w automatyce elektroenergetycznej.



Rys. 6.32. Schemat uczenia neuronu z nauczycielem

Struktura procesu uczenia z nauczycielem jest pokazana na rys. 6.32. Prezentowany przykład odnosi się do pojedynczego neuronu ale ten sam schemat można zastosować również do złożonej sieci. Wykorzystywane w fazie uczenia przykłady są zbiorami

par danych wejście-wyjście, które są uzyskane przez rejestrację danych z rzeczywistego procesu lub wygenerowane na drodze symulacyjnej. W tym ostatnim przypadku zakłada się, że znany jest model matematyczny procesu. Proces uczenia polega na iteracyjnej korekcji kolejnych wag neuronu zgodnie z następującą zasadą [33]:

$$w_{ji}(n+1) = w_{ji}(n) + \Delta w_{ji}(n) \quad (6.67)$$

gdzie: $w_{ji}(n)$ i $w_{ji}(n+1)$ przedstawiają poprzednią i nową wartość wagi pomiędzy neuronami i (z warstwy poprzedzającej) oraz j (z rozpatrywanej warstwy), natomiast $\Delta w_{ji}(n)$ reprezentuje wartość bieżącej korekcji.

Algorytm uczenia polega na takim doborze kolejnych poprawek $\Delta w_{ji}(n)$, aby uzyskać zbieżność procesu (6.67). Dla dalszych rozważań zakłada się, że sieć jest jednowarstwowa i z nią związany jest j -ty neuron. Podstawą takiego algorytmu jest obserwacja różnic pomiędzy uzyskanym sygnałem na wyjściu j -tego neuronu: $y_j(n)$, a wartością żądaną przez nauczyciela: $d_j(n)$

$$e_j(n) = d_j(n) - y_j(n), \quad (6.68)$$

które tworzą wektor błędów $\mathbf{e}(n)$. Należy zauważyć, że wektor $\mathbf{e}(n)$ jest funkcją złożoną, zależną od wektora współczynników $\mathbf{w}(n)$ na wejściu do rozpatrywanej warstwy. Sposób uporządkowania współczynników $w_{ji}(n)$ w wektorze $\mathbf{w}(n)$ nie jest tu istotny.

Poprawka w (6.67) może być określona według następującej zależności [33], [58]:

$$\Delta w_{ji}(n) = \eta e_j(n) x_i(n) \quad (6.69)$$

gdzie: x_i jest wymuszeniem pochodzącym z i -tego wejścia, natomiast η jest współczynnikiem określającym szybkość uczenia.

Zależność (6.67) wraz z (6.69) jest nazywana regułą delty lub metodą Widrowa-Hoffa [58], [73]. Z analitycznego punktu widzenia, celem uczenia jest osiągnięcie najmniejszej wartości funkcji błędu (6.68). W przypadku sieci złożonej z L neuronów odpowiednie kryterium można zdefiniować jako poszukiwanie minimalnej wartości funkcji (kryterium najmniejszych kwadratów):

$$S_2(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^L (d_j - y_j)^2 \quad (6.70)$$

W przypadku P par uczących $(\mathbf{x}(n), \mathbf{d}(n))$, $n = 1, 2, \dots, P$, gdzie $\mathbf{x}(n)$, $\mathbf{d}(n)$ są wektorami wymuszeń i żądanych odpowiedzi sieci w n -tej prezentacji, funkcja kryterialna (6.70) ma następującą postać:

$$S_2(\mathbf{w}(n)) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^P \sum_{j=1}^L (d_j(n) - y_j(n))^2. \quad (6.71)$$

Zagadnienie (6.71) jest nieliniowe ze względu na nieliniowość funkcji aktywacji neuronów.

Znanych jest wiele metod minimalizacji funkcji (6.71). W przypadku dyskretnego algorytmu, wektor współczynników wagowych \mathbf{w} jest poprawiany iteracyjnie na wzór (6.67):

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \Delta\mathbf{w}(n), \quad (6.72)$$

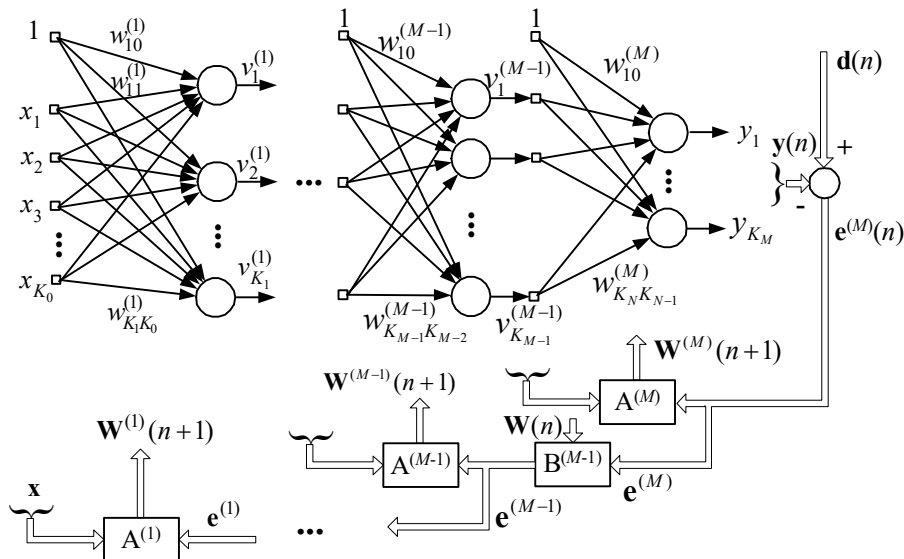
gdzie poprawka $\Delta\mathbf{w}(n)$ jest określana różnymi metodami gradientowymi. Ogólnie:

$$\Delta\mathbf{w}(n) = \eta\mathbf{p}(\mathbf{w}(n)), \quad (6.73)$$

gdzie: $\mathbf{p}(\mathbf{w}(n))$ jest wektorem kierunku minimalizacji w n -tym kroku algorytmu. W najprostszym przypadku, elementy wektora $\Delta\mathbf{w}(n)$ mogą być określone zgodnie z (6.69).

W sieci wielowarstwowej korekcje wag należy prowadzić zaczynając od warstwy ostatniej, dla której znane są wartości żądanych wyjść. W tym celu można najpierw określić wektor odchyłek $\mathbf{e}^{(M)}(n)$, gdzie M jest numerem warstwy wyjściowej (rys. 6.33). Elementy tego wektora są obliczane zgodnie z (6.68). Wektor poprawek $\Delta\mathbf{w}^{(M)}(n)$, stosowany do korekcji wag na wejściu do ostatniej warstwy można obliczyć zgodnie z (6.69), gdzie wymuszenia $x_i = v_i^{(M-1)}$ $i = 1, 2, \dots, K_{M-1}$ są sygnałami wyjściowymi neuronów warstwy poprzedniej (rys. 6.33). Z kolei, wektor błędów ostatniej warstwy $\mathbf{e}^{(M)}(n)$ można przenieść na warstwę poprzednią z uwzględnieniem relacji wynikających z istnienia połączeń poprzez współczynniki wagowe. Jest to określone następującą relacją:

$$e_i^{(M-1)}(n) = \sum_{j=1}^{K_M} e_j^{(M)}(n) w_{ji}^{(M)}(n), \quad i = 1, 2, \dots, K_{M-1}. \quad (6.74)$$



Rys. 6.33. Struktura algorytmu propagacji wstecznej

Na podstawie błędów (6.74) można określić wektor poprawek $\Delta \mathbf{w}^{(M-1)}(n)$ i skorygowana wartość wektora $\mathbf{w}^{(M-1)}(n+1)$. Proces ten jest powtarzany dla kolejnych warstw aż do osiągnięcia pierwszej warstwy ukrytej. W blokach oznaczonych na rys. 6.33 literami A wykonywane są operacje korekcji wag, natomiast wektory błędów dla niższych warstw są obliczane w blokach B. Ze względu na sposób obliczania i przekazywania błędów pomiędzy kolejnymi warstwami sieci, metoda ta nazywa się *algorytmem propagacji wstecznej* (ang. *back propagation*). W skrócie przedstawia ją następujący opis.

Algorytm 6.1. *Uczenie sieci metodą propagacji wstecznej.*

- Przyjąć początkowe wartości wag sieci. Wielkości te określa się w sposób losowy, przyjmując niewielkie wartości. Określić początkową wartość kroku algorytmu $n = 1$.
- Wybrać parę wektorów $(\mathbf{x}(n), \mathbf{d}(n))$ związanych z kolejnym zbiorem uczącym i podać wymuszenie $\mathbf{x}(n)$ na wejście sieci.
- Określić wektor błędów $\mathbf{e}^{(M)}(n)$ zgodnie z (6.68), wektor poprawek $\Delta \mathbf{w}^{(M)}(n)$ (6.69) i skorygowany wektor wag $\mathbf{w}^{(M)}(n+1)$.
- Powtórzyc poprzedni krok dla kolejnych warstw: $M-1, M-2, \dots, 1$, przy czym, wektory błędów należy obliczać zgodnie z (6.74).
- Zwiększyć wartość: $n := n+1$ i przejść do wyboru kolejnego zbioru uczącego. □

Przedstawiony algorytm jest najprostszą, dyskretną wersją metody propagacji wstecznej. Jego zbieżność jest kontrolowana poprzez wybór odpowiedniej wartości współczynnika uczenia η (6.69). Pod względem numerycznym jest w nim odwzorowana metoda prostej iteracji, stosowana do rozwiązań zagadnień nieliniowych, która zazwyczaj jest bardzo wolno zbieżna. Przyczyną tego jest pominięcie w algorytmie nieliniowych funkcji aktywacji neuronów.

Funkcje te można uwzględnić przez przyjęcie ciągłego modelu sieci. Analogowym odpowiednikiem dyskretnej zależności (6.72) jest równanie różniczkowe o postaci [11]:

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \mu \mathbf{p}(\mathbf{w}), \quad (6.75)$$

gdzie: μ , podobnie jak η w (6.73) jest współczynnikiem uczenia.

W charakterze kierunku minimalizacji można wybrać ujemny gradient funkcji kryterialnej:

$$\mathbf{p}(\mathbf{w}) = -\nabla S_2(\mathbf{w}). \quad (6.76)$$

Najprostszym sposobem uwzględnienia zależności pochodzących od modelu ciągłego sieci w przedstawionym powyżej algorytmie jest obliczanie błędu przekazywanego do poprzedniej warstwy z uwzględnieniem funkcji aktywacji [11]:

$$e_i^{(M-1)}(n) = \frac{\partial f(\varphi_i^{(M-1)})}{\partial \varphi_i^{(M-1)}} \sum_{j=1}^{K_M} e_j^{(M)}(n) w_{ji}^{(M)}(n), \quad i = 1, 2, \dots, K_{M-1}, \quad (6.77)$$

gdzie: $\varphi_i^{(M-1)}$ jest sygnałem będącym ważoną sumą pobudzeń i -tego neuronu w warstwie $M - 1$.

Istnieje wiele odmian algorytmu propagacji wstecznej, w których zakłada się różne strategie obliczania nowych wartości macierzy wagowych (szeregowo, jak w przedstawionym algorytmie, lub równoległe, po zakończeniu całego etapu) oraz określania gradientu (6.76) [11], [33], [58], [73]. Ich modyfikacje są również stosowane do uczenia sieci rekursywnych [33], [70].

Strategia uczenia odnosi się również do sposobu prezentacji wzorców uczących. W celu wyeliminowania przypadkowych tendencji w zbiorze tych wzorców, stosuje się zazwyczaj ich wybór losowy. Stopień 'nauczenia' sieci może być oceniony przez wielkość poprawek w kolejnych krokach uczenia. Liczba niezbędnych kroków (a więc i wielkość zbioru uczącego) zależy od wielkości sieci i jej struktury, a także od rodzaju zadania. Niekiedy rozmiar zbiorów uczących osiąga wartość wielu tysięcy przykładów. Poprawność samego procesu uczenia, jak i wyboru określonej konfiguracji sieci, mogą być ocenione na podstawie badania błędów działania sieci przy wymuszeniach testowych. Zbiór testowy jest częścią (kilka procent) zbioru przygotowanego do syntezy sieci, który jednak nie był stosowany w procesie uczenia.

6.4.4 Przykłady zastosowań

W automatyce elektroenergetycznej SSN mają zastosowanie do pomiarów wielkości kryterialnych, wygładzania danych pomiarowych, podejmowania decyzji w członach logicznych przekaźników zabezpieczeniowych, a także jako regulatory lub układy selekcji informacji o zaistniałych awariach. Poniżej przedstawiono kilka przykładów wybranych zastosowań sieci neuronowych.

Pomiar składowych ortogonalnych sygnału

Identyfikacja parametrów sygnału elektrycznego jest problemem numerycznym. Do tego celu można stosować przedstawione w Rozdziale 3 metody wywodzące się z kryterium najmniejszych kwadratów w wersji liniowej lub nieliniowej, w zależności od przyjętego modelu sygnałowego. Rozwój teorii adaptacyjnego przetwarzania sygnałów [97] oraz sztucznych sieci neuronowych dał możliwość formułowania i realizacji algorytmów opartych także na innych kryteriach aproksymacji. Jednym z nich jest tzw. odporne kryterium najmniejszych kwadratów (ang. *robust least squares criterion*), w którym funkcja kryterialna (3.87) jest definiowana następująco [10],[11]:

$$S_{12}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\gamma} \sum_{m=0}^{M-1} \ln(\cosh(\gamma e_m(\mathbf{x}))), \quad (6.78)$$

gdzie: $\gamma > 0$ jest stałym współczynnikiem, \mathbf{x} przedstawia wektor poszukiwanych parametrów (3.84), natomiast $e_m(\mathbf{x})$ jest różnicą pomiędzy rzeczywistą realizacją procesu (sygnałem wejściowym) y_m a jego modelem sygnałowym (estymatą) $\hat{y}_m = h_m$ (3.147).

Podobnie jak w przypadku MNK, należy określić procedurę minimalizacji funkcji kryterialnej (6.78). Można tu skorzystać z faktu, że w stanie ustalonym, w punkcie minimalnym nieliniowej funkcji (6.78) zachodzi następująca równość [10], [11], [72]:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = -\frac{1}{\tau} \nabla S_{12}(\mathbf{x}), \quad (6.79)$$

gdzie: $\tau > 0$ jest stałą czasową całkowania oraz

$$\nabla S_{12}(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial S_{12}(\mathbf{x})}{\partial X_1} \quad \frac{\partial S_{12}(\mathbf{x})}{\partial X_2} \quad \dots \quad \frac{\partial S_{12}(\mathbf{x})}{\partial X_L} \right]^T, \quad (6.80)$$

L – liczba poszukiwanych parametrów.

Dla rozpatrzenia ogólnego przypadku zakłada się, że model sygnału jest przedstawiony w postaci sumy kolejnych K harmonicznych (3.5), w którym pulsacja $\omega = \omega' \omega_1$ jest również nieznana (podobnie, jak w p. 3.4.4). Sygnał wejściowy jest próbkowany równomiernie N razy w znamionowym okresie podstawowej harmonicznej, a kąt pomiędzy próbkami wynosi $a_\omega = \omega' 2\pi/N$. Odchyłka $e_m(\mathbf{x})$ w (6.78) określona dla k -tej próbki sygnału odpowiadającej czasowi t_k jest następująca:

$$e_m(\mathbf{x}) = y_m - \sum_{l=1}^K (X_{cl} \cos(l\omega t_k) - X_{sl} \sin(l\omega t_k)). \quad (6.81)$$

Można zauważyć, że w modelu występuje $2K + 1$ nieznanymi parametrami.

Po uwzględnieniu (6.81) w (6.78), składowe gradientu (6.80) mają następującą postać:

$$\frac{\partial S_{12}(\mathbf{x})}{\partial X_{cl}} = - \sum_{m=0}^{M-1} (\operatorname{tgh}(\gamma e_m(\mathbf{x}) \cos(ml\omega t_k))), \quad l = 1, 2, \dots, K, \quad (6.82a)$$

$$\frac{\partial S_{12}(\mathbf{x})}{\partial X_{sl}} = \sum_{m=0}^{M-1} (\operatorname{tgh}(\gamma e_m(\mathbf{x}) \sin(ml\omega t_k))), \quad l = 1, 2, \dots, K, \quad (6.82b)$$

$$\frac{\partial S_{12}(\mathbf{x})}{\partial \omega} = \sum_{m=0}^{M-1} \left(m \operatorname{tgh}(\gamma e_m(\mathbf{x})) \sum_{l=1}^K (X_{cl} \sin(ml\omega t_k) + X_{sl} \cos(ml\omega t_k)) \right). \quad (6.82c)$$

Ostatecznie, zgodnie z (6.79) można napisać następujące równania różniczkowe, które określają zależność pomiędzy próbkami sygnału y w oknie pomiarowym o szerokości M próbek, z których ostatnia odnosi się do bieżącej, k -tej próbki ($y(k - M + 1), \dots, y(k - 1), y(k)$), a parametrami sygnału:

$$\frac{dX_{cl}(k)}{dt} = \mu \sum_{m=0}^{M-1} (\operatorname{tgh}(\gamma e_m(\mathbf{x}) \cos(mla_{\omega}k))), \quad l = 1, 2, \dots, K, \quad (6.83a)$$

$$\frac{dX_{sl}(k)}{dt} = -\mu \sum_{m=0}^{M-1} (\operatorname{tgh}(\gamma e_m(\mathbf{x}) \sin(mla_{\omega}k))), \quad l = 1, 2, \dots, K, \quad (6.83b)$$

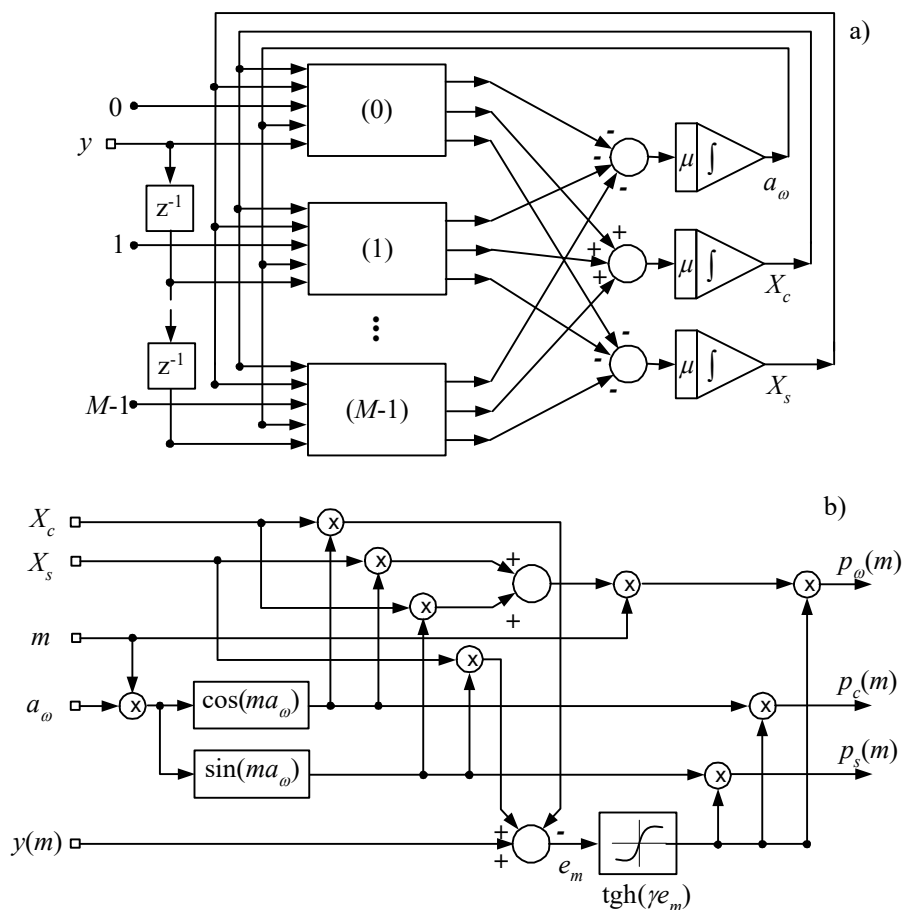
$$\frac{da_{\omega}(k)}{dt} = -\mu \sum_{m=0}^{M-1} \left(m \operatorname{tgh}(\gamma e_m(\mathbf{x})) \sum_{l=1}^K (X_{cl} \sin(mla_{\omega}k) + X_{sl} \cos(mla_{\omega}k)) \right), \quad (6.83c)$$

gdzie: $a_{\omega}k = \omega t_k$, μ – współczynnik odpowiadający parametrowi τ w (6.79).

Należy odróżnić czas t w (6.83) od czasu t_k w (6.82), który wyznacza chwile próbkowania sygnału wejściowego, określone przez indeks k . Upływ czasu t wyznacza dynamikę równoważenia procesu (6.83), który jest wymuszany przez kolejne próbki sygnału wejściowego podawanego z okresem próbkowania T . Jest to podstawowa cecha, która odróżnia powyższy algorytm od nieliniowej metody najmniejszych kwadratów,

przedstawionej w p. 3.4.4. Stosowanie metody określonej przez równania (6.33) jest możliwe wówczas, gdy $T > t_{ust}$, gdzie t_{ust} jest maksymalnym okresem ustalania się procesu (6.83).

Równania (6.83) podają równocześnie przepis na budowę odpowiedniej sieci obliczeniowej. Czytelnicy znający zasady programowania analogowych maszyn obliczeniowych lub programu symulacyjnego SIMULINK [89] nie będą mieli problemu z określeniem odpowiedniego schematu obliczeniowego. Kluczowymi elementami takiego schematu są integratory, na wyjściu których występują poszukiwane zmienne z poszczególnych równań (6.83). Schemat sieci dla przypadku modelu sygnałowego ograniczonego do jednej harmonicznej ($K=1$) jest pokazany na rys. 6.34. W każdym z M bloków schematu (rys. 6.34b) następuje



Rys. 6.34. Schemat sieci do pomiaru składowych ortogonalnych sygnału: ogólna struktura (a) oraz schemat m -tego bloku (b).

przetwarzanie sygnałów zgodnie z zależnościami występującymi pod znakami sumowania w (6.83):

$$p_{cm} = \operatorname{tgh}(\gamma e_m \cos(ma_\omega)), \quad (6.84a)$$

$$p_{sm} = \operatorname{tgh}(\gamma e_m \sin(ma_\omega)), \quad (6.84b)$$

$$p_{\omega m} = m \operatorname{tgh}(\gamma e_m (X_c \sin(ma_\omega) + X_s \cos(ma_\omega))), \quad (6.84c)$$

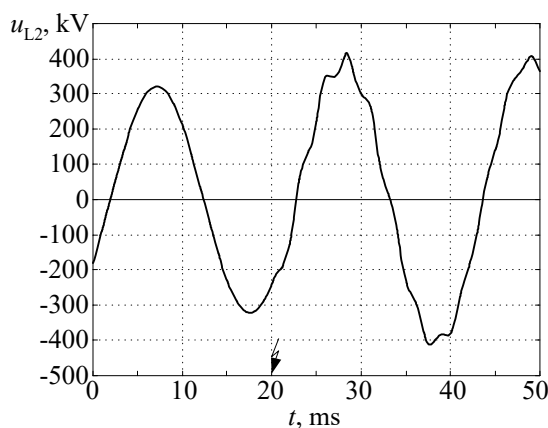
przy czym, na podstawie (6.81)

$$e_m = y(m) - X_{cl} \cos(ma_\omega) + X_{sl} \sin(ma_\omega). \quad (6.84d)$$

Przedstawiony układ ma strukturę zbliżoną do sieci Hopfielda, przy czym, współczynniki wagowe nie są określane w drodze uczenia sieci lecz powstają w wyniku syntezy odpowiedniej metody numerycznej. Właściwości algorytmu oraz jego cechy dynamiczne można kształtować przez odpowiedni dobór parametrów γ oraz μ . Szczegóły implementacji metody ilustruje poniższy przykład.

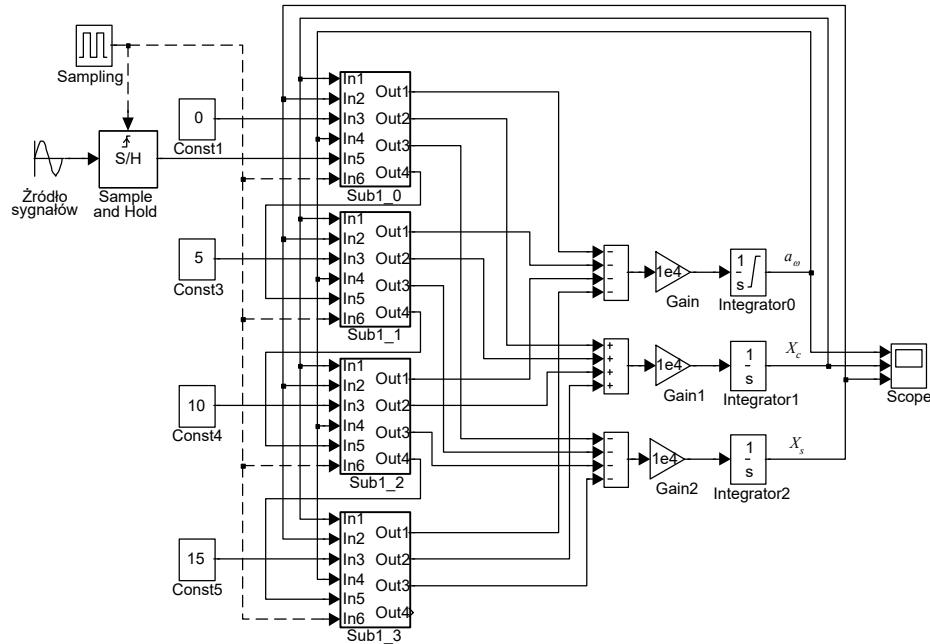
Przykład 6.7. Zastosować powyższy algorytm do pomiaru amplitudy i częstotliwości napięcia uzyskanego z modelu fragmentu systemu elektroenergetycznego przedstawionego w Przykładzie 1.1 (rys. 1.3).

Przyjęto, że częstotliwość systemu jest obniżona i wynosi 48 Hz. W czasie $t_z = 0,02$ s następuje zwarcie L1-G w stacji A (rys. 1.3). Do pomiaru wybrano napięcie w fazie L2, którego przebieg jest pokazany na rys. 6.35 (sygnał wejściowy został wygładzony w filtrze odcinającym, $f_c = 400$ Hz). Obserwowany sygnał jest próbkowany z częstotliwością 1000 Hz ($N = 20$ próbek w okresie).



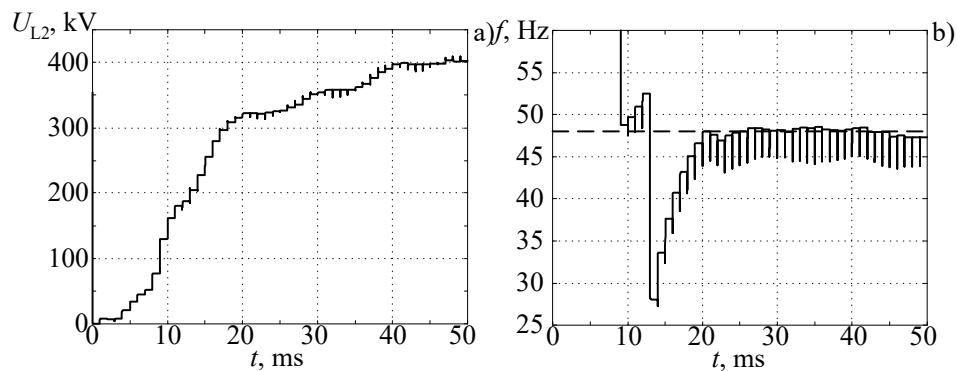
Rys. 6.35. Przebieg analizowanego napięcia

Do symulacji algorytmu pomiarowego został wybrany program SIMULINK [89]. Ogólny schemat sieci jest pokazany na rys. 6.36. Na wejściu sygnał ciągły (w rzeczywistości, zapisany w postaci cyfrowej z dużą częstotliwością próbkowania) jest próbkowany z okresem $T = 1$ ms. Na wejściu układu sygnał jest skalowany tak, aby jego wartości mieściły się w zakresie $(-1, 1)$. Linia przerywana odnosi się do sygnału sterującego próbkowaniem.



Rys. 6.36. Schemat modelu SIMULINK do symulacji algorytmu

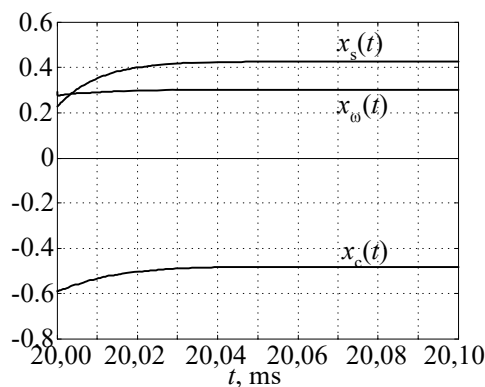
W celu uproszczenia obsługi programu, wprowadzono hierarchiczną strukturę schematu tak, że $N = 20$ podstawowych bloków operacyjnych (rys. 6.34) zostało zgrupowanych w widoczne na rys. 6.36 cztery grupy, po pięć w każdej z nich. Przyjęto następujące wartości stałych parametrów algorytmu: $\gamma = 5$ oraz $\mu = 1 \cdot 10^4$. Wyniki pomiaru amplitudy i częstotliwości sygnału są pokazane na rys. 6.37. Widoczne są przedziały szybko ustalających się wyników, wyznaczone przez okresy próbkowania. Algorytm został uruchomiony na początku przedziału odpowiadającego zarejestrowanemu przebiegowi: w ciągu pierwszych 20 ms trwa jego stan przejściowy chwili (do zapełnienia się okna pomiarowego). W



Rys. 6.37. Przebieg zmierzonej amplitudy (a) i częstotliwości (b) sygnału

dalszej części przebiegów widoczna jest odpowiedź algorytmu na zakłócenie występujące w przebiegu wejściowym. Można zauważyć niewielkie błędy estymacji częstotliwości (linia przerywana na rys. 6.37b pokazuje rzeczywistą wartość częstotliwości). Jest to związane z tym, że model sygnału został ograniczony tylko do pierwszej harmonicznej, natomiast przebieg sygnału wejściowego jest bardziej złożony.

Pokazane przebiegi mają charakter ciągły, co wynika z przyjętego algorytmu. W rzeczywistości jednak pomiar jest cyfrowy i do dalszego przetwarzania wartości



Rys. 6.38. Stan przejściowy estymacji

pokazanych przebiegów będą pobierane w każdym przedziale próbkowania, po ich ustaleniu się. Sposób ustalania się trzech estymowanych parametrów sygnału jest pokazany na rys. 6.38. Przebieg odpowiada wymuszeniu w końcu pierwszego okresu zarejestrowanego napięcia (amplituda sygnału jest zredukowana). Widać, że w każdej próbce poprawny wynik uzyskuje się już po okresie $50\mu\text{s}$. □

Właściwości powyższej metody mogą być modyfikowane przez zmianę parametru γ w funkcji kryterialnej (6.78). Dla dużych wartości γ , funkcja $\text{tgh}(\gamma e_m)$ w bloku wzmocnienia błędu e_m (rys. 6.34) jest bardzo stroma, dążąc przy wzroście tego parametru do funkcji signum. Kryterium (6.78) przekształca się wówczas w kryterium wartości absolutnej błędu z funkcją kryterialną o postaci

$$S_1(\mathbf{x}) = \sum_{m=0}^{M-1} |e_m(\mathbf{x})|, \quad (6.85)$$

co odpowiada normie L_1 wektora $\mathbf{e}(\mathbf{x})$ [11], [73].

Cechą takiego algorytmu jest możliwość filtracji dużych chwilowych zakłóceń sygnału wejściowego. Przy małych wartościach parametru γ , funkcja $\text{tgh}(\gamma e_m)$ jest niemal liniowa, co prowadzi do kryterium średniokwadratowego (z normą L_2) [10].

Zaletą prezentowanej metody jest możliwość jej implementacji z zastosowaniem elektronicznych układów analogowych o wysokiej skali integracji. Wówczas, jej stosunkowo duża złożoność obliczeniowa nie jest

istotną przeszkodą w zastosowaniach praktycznych. Numeryczne metody rozwiązywania zagadnienia (6.83) są bowiem znacznie trudniejsze.

Zaprezentowana metoda syntezy algorytmu estymacji parametrów sygnału może być stosowana także do innych zagadnień estymacji i optymalizacji z wykorzystaniem również innych kryteriów minimalizacji błędu [11].

Kompensacja błędów pojemnościowego przekładnika napięciowego

Problemy związane ze stosowaniem *PPN* zostały przedstawione w p. 1.6.2. Ze względu na dużą pojemność dzielnika napięcia w tym przekładniku (rys. 1.33), jego odpowiedź na gwałtowną zmianę mierzonego napięcia (na przykład, przy bliskim zwarciu) jest zakłócona, co uniemożliwia dokładny i szybki pomiar wielkości kryterialnych stosowanych w automatyce elektroenergetycznej [38], [99]. Efektywny numeryczny algorytm korekcyjny dla przypadku liniowego przekładnika został zaproponowany w pracy [37]. W celu syntezy korektora korzysta się tam z założenia, że transmitancja zastępcza szeregowo połączonych: przekładnika napięciowego i korektora powinna być równa jedności. Transmitancja zaproponowanego korektora ma następującą postać:

$$G_{CVT}(s) = \frac{a_3 s^3 + a_2 s^2}{b_4 s^4 + b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}, \quad (6.86)$$

przy czym, współczynniki a , b zależą od parametrów schematu zastępczego przekładnika.

Transmitancja (6.86), wskutek ograniczeń jej realizowalności, nie jest dokładnie równa odwrotnej transmitancji zastępczej przekładnika, przy czym, synteza prowadzona jest według klasycznej teorii układów dynamicznych. Odpowiednią procedurę numerycznej korekcji można łatwo uzyskać po przekształceniu (6.86) do postaci transmitancji \mathcal{Z} [37]. Należy zauważyć, że do syntezy filtru korekcyjnego niezbędna jest pełna znajomość tego modelu analizowanego obiektu, tj. jego struktury i parametrów.

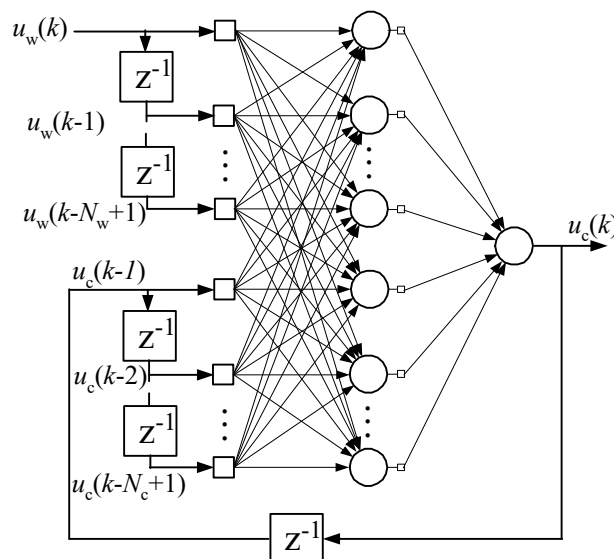
W przeciwieństwie do takiego podejścia, sieć neuronowa może zostać zaprojektowana jedynie w oparciu o ogólną wiedzę na temat procesu i posiadany zbiór przykładów uczących. W celu syntezy korektora neuronowego należy wybrać strukturę sieci neuronowej, określić jej rozmiary oraz przygotować zbiór uczący. Szczegóły objaśnia poniższy przykład.

Przykład 6.8. Opracować neuronowy korektor stanu przejściowego pojemnościowego przekładnika napięciowego i zbadać jego właściwości.

Określenie odpowiedniej struktury sieci neuronowej do realizacji określonego zadania nie jest, na ogół, zadaniem prostym [33], [74]. W podejściu heurystycznym struktura sieci zostaje określona w drodze analizy postawionego problemu (złożoność zagadnienia, wpływ nieliniowości) i kolejnych przybliżeń.

W rozpatrywanym przypadku rozważane były dwa rodzaje sieci rekurencyjnych: jedno- i dwuwarstwowe. Po przeprowadzeniu szczegółowej analizy i badaniach eksperymentalnych, do realizacji korektora wybrano dwuwarstwową sieć rekurencyjną o strukturze jak na rys. 6.39 z sigmoidalnymi funkcjami aktywacji neuronów. W odróżnieniu od sieci jednowarstwowej, ta ostatnia pozwala także uwzględniać nieliniowości występujące w przekładniku. Założenie o liniowości układu zastępczego przekładnika nie zawsze jest dopuszczalne, o czym decydują warunki pracy transformatora pośredniczącego Tr z rdzeniem magnetycznym (rys. 1.33).

Wielkości N_w i N_c na rys. 6.39 określają szerokość okna pomiarowego, odpowiednio na wejściu sieci oraz w sprzężeniu zwrotnym. Wartości tych stałych są parametrami konstrukcyjnymi układu i powinny być tak dobrane, aby zapewnić najlepszą zbieżność procesu uczenia sieci. Odwołując się do podobieństwa pomiędzy strukturą sieci neuronowej i filtra cyfrowego można zauważyć, że parametry N_w i N_c są odpowiednio powiązane z rzędem transmitancji korektora (6.86).

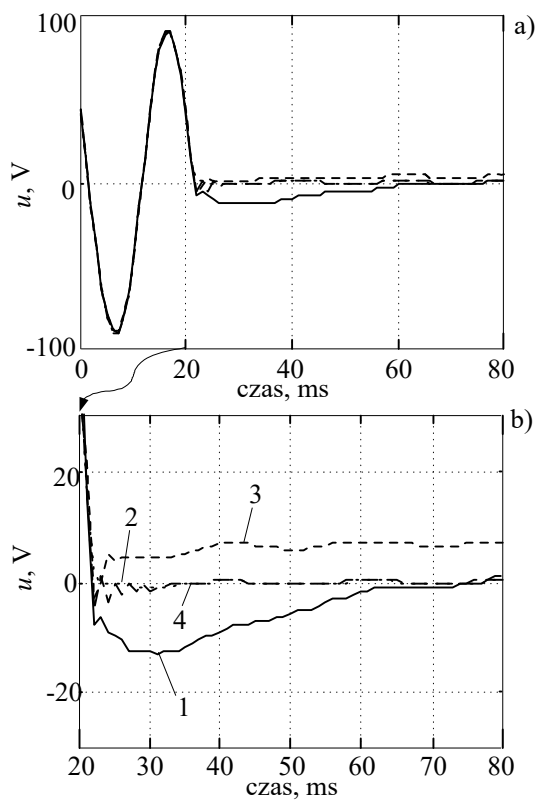


Rys. 6.39. Struktura neuronowego korektora napięcia

Zbiór sygnałów treningowych oraz odpowiadających im sygnałów wzorcowych (z pożądanymi odpowiedziami na wyjściu projektowanego korektora) został utworzony w wyniku symulacji stanów przejściowych we fragmencie systemu elektroenergetycznego 400 kV (rys 1.3) wraz z modelem trójfazowego układu PPN. Symulacje prowadzono z wykorzystaniem programu ATP-EMTP [27]. W torach pomiarowych umieszczono również analogowe filtry dolnoprzepustowe o częstotliwości odcięcia 400 Hz. Sygnały wejściowe były próbkowane z częstotliwością 1 kHz, co odpowiada 20 próbkom w okresie podstawowej harmonicznej.

Dla osiągnięcia dużej różnorodności generowanych przebiegów napięciowych, zmieniane były następujące parametry symulacji: impedancje zastępcze systemów po obu stronach linii (moduły oraz kąty), odległość do miejsca zwarcia, rezystancja zwarcia, rodzaj zwarcia (jednofazowej, dwufazowe - z udziałem ziemi i bez, trójfazowe oraz kąt napięcia w momencie powstania zwarcia. Ogółem, zbiór danych testowych liczył 672 przebiegi [65]. Proces uczenia sieci neuronowej prowadzono z wykorzystaniem pakietu obliczeniowego MATLAB [1].

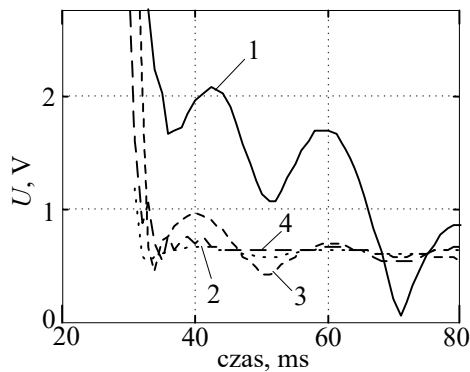
Do realizacji algorytmu korekcyjnego wybrano sieć (5-1) (pięć neuronów w warstwie ukrytej i jeden neuron wyjściowy) o strukturze wejść: $N_w = 4$, $N_c = 4$. Przy



Rys. 6.40. Przebiegi napięć spowodowane na stronie wtórnej PPN: obraz ogólny (a) oraz powiększony fragment (b); 1 - napięcie wtórne bez korekcji, 2 - spowodowane napięcie pierwotne, 3 - wynik korekcji numerycznej, 4 - wynik korekcji neuronowej

zmniejszaniu długości rejestrów wejściowych zauważa się narastanie błędów korekcji [62].

Efekt korekcji mierzonego napięcia podczas zwarcia bezpośrednio na szynach stacji, w której odbywa się pomiar, przez rezystancję $R_F = 0,01\Omega$ jest pokazany na rys. 6.40. Widać, że na wyjściu korektora neuronowego uzyskuje się przebieg najbardziej zbliżony do napięcia pierwotnego na wejściu przekładnika (wszystkie przebiegi są przeskalowane do tej samej wartości). Ponadto, sieć neuronowa



Rys. 6.41. Rezultaty pomiaru amplitudy napięcia (oznaczenia, jak na rys. 6.40)

nie wymaga dodatkowych informacji o warunkach początkowych w chwili zwarcia. Takie dane są natomiast potrzebne do rozwiązania równań różniczkowych w metodzie numerycznej.

Na rys. 6.41 są pokazane wyniki estymacji amplitudy napięcia na podstawie pełnookresowego algorytmu Fouriera z wykorzystaniem przebiegów jak na rys. 6.40. Również tutaj można zauważyć efekty stosowania korektora neuronowego. □

Korekcja prądu wtórnego przekładnika prądowego

W rozpatrywanym przekładniku napięciowym dynamiczne błędy transformacji są wywołane głównie przez gwałtowną zmianę amplitudy napięcia wejściowego, przy czym, nieliniowe parametry obwodu mają tu niewielki udział. Zupełnie przeciwny obraz występuje w przekładniku prądowym (*PP*) z rdzeniem magnetycznym. Tutaj podstawowym źródłem błędów dynamicznych transformacji jest nieliniowa charakterystyka magnesowania rdzenia (rys. 1.30).

Uchyb transformacji zależy od wielu czynników, jak: amplituda oraz kształt przebiegu prądu pierwotnego (zwłaszcza występowanie składowej aperiodycznej o długim czasie zanikania), parametry przekładnika (charakterystyka magnesowania, impedancja wewnętrzna) oraz impedancja obciążenia, przy czym, istotna jest zarówno wartość modułu, jak i charakter tej impedancji.

Jeśli dostępny jest tylko przebieg prądu wyjściowego *PP*, to korekcja błędów dynamicznych nie jest w tym przypadku prosta. W klasycznym podejściu wykorzystuje się model przekładnika w celu odwzorowania

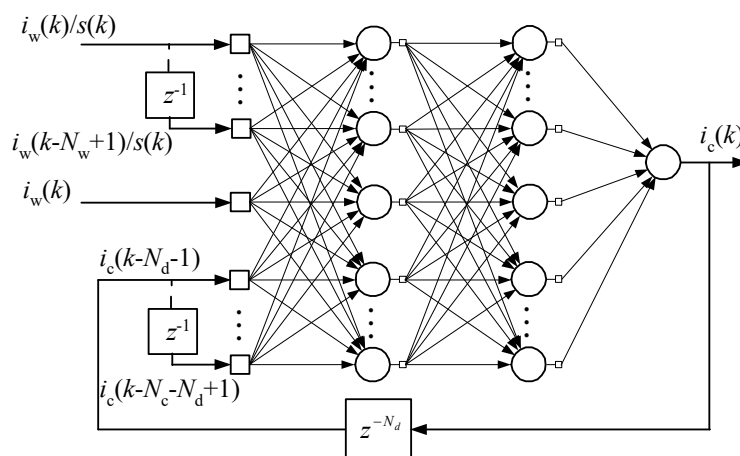
strumienia magnetycznego. Można również bezpośrednio mierzyć strumień, jednak wymaga to zmian konstrukcyjnych przekładnika [99].

U podstaw neuronowego korektora prądu wtórnego przekładnika leży założenie, że sieć neuronowa może realizować zadania filtracji i predykcji sygnału, odwzorowując jednocześnie model przekładnika wraz z połączonym z nim obwodem. Współczynniki wagowe takiej sieci są ustalone w procesie uczenia na podstawie zbioru danych, uzyskanych na drodze symulacyjnej. Ilustruje to poniższy przykład.

Przykład 6.9. Zaprojektować sieć neuronową do korekcji błędów dynamicznych przekładnika prądowego.

W charakterze przykładu wybrano przekładnik 3000/1 A/A zainstalowany w linii przesyłowej 400 kV jak na rys. 1.3. Pomiar cyfrowy odbywał się zgodnie z warunkami określonymi w poprzednim przykładzie. Przebieg prądu w zwartej fazie jest pokazany na rys. 6.43a: krzywa 1 - prąd na wyjściu PP, krzywa 2 - prąd pierwotny (sprowadzony na stronę wtórną przekładnika). Widać, że w wyniku dużej amplitudy prądu zwarcioowego i występowania składowej aperiodycznej, rdzeń przekładnika ulega nasyceniu, co powoduje wzrost prądu magnesującego i_μ (rys. 1.29). W rezultacie, obserwowany prąd wyjściowy ulega znacznemu odkształceniu. Uchyb maleje w kolejnych okresach w miarę zanikania składowej aperiodycznej.

W rezultacie wielu eksperymentów, do korekcji prądu wtórnego przekładnika wybrano sieć neuronową jak na rys. 6.42. Jej struktura jest zbliżona do rozpatrywanej powyżej sieci korektora PPN, z tym, że dodana została jeszcze jedna warstwa ukryta neuronów. Na wejście sieci podawane są kolejne próbki prądu wtórnego przekładnika $i_w(k)$ po uprzednim przeskalowaniu w stosunku określonym



Rys. 6.42. Struktura neuronowego korektora prądu

przez współczynnik $s(k)$. Parametr ten jest określany zgodnie z następującą zależnością:

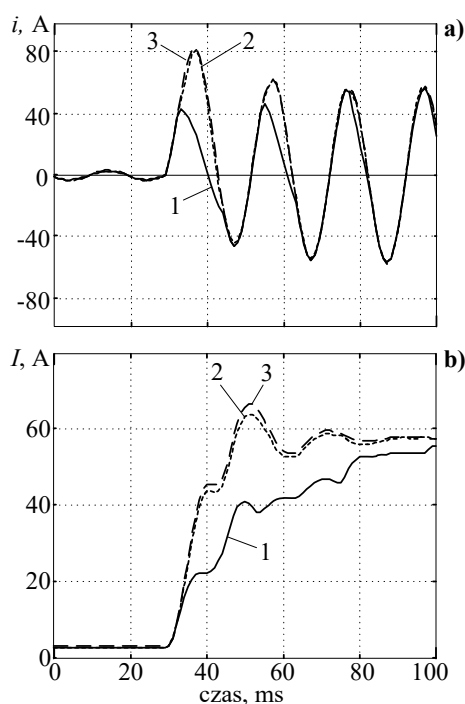
$$s(k) = \max(|i_w(k)|, |i_w(k-1)|, \dots, |i_w(k-N_s-1)|),$$

gdzie przyjęto: $N_s = N/2 = 10$, co odpowiada połowie okresu obserwowanego przebiegu prądu.

W zbiorze danych wejściowych jest także bieżąca próbka prądu bez skalowania. Skalowanie względem największej bezwzględnej wartości prądu w półokresie ma na celu ułatwienie oceny dynamiki śledzonego przebiegu, niezależnie od amplitudy prądu. Należy zauważyć, że w odróżnieniu od napięcia, amplituda prądu w linii może się zmieniać w dużych granicach, w zależności od stanu obciążenia i rodzaju zwarcia.

Na drodze eksperymentalnej określono rozmiar sieci: (8-8-1). Wielkości N_w , N_c oraz N_d są parametrami projektowymi korektora. Ich wartości można określić w drodze następującej analizy [63]:

- szerokość okna pomiarowego N_w powinna uwzględniać minimalny okres li-



Rys. 6.43. Kompensacja prądu w PP: przebiegi prądów (a) oraz odpowiadające im estymaty amplitudy (2); 1 - prąd na wyjściu PP, 2 - prąd pierwotny, 3 - prąd skompensowany

niowej pracy przekładnika (około 1/6 okresu);

-szerokość okna sprzężenia zwrotnego N_c powinna uwzględniać możliwy czas trwania nasycenia, tak, aby w tym czasie odtwarzać przebieg na podstawie jego historii, (około 2/3 okresu); ze względu na występujące sprzężenie zwrotne, okno wyznaczone przez parametr N_c może być o połowę krótsze,

-wielkość opóźnienia N_d powinna odpowiadać stałej czasowej nasycenia przekładnika, która może się zmieniać w granicach (0,2 - 3,0) ms (większa wartość odnosi się do indukcyjnościowego obciążenia przekładnika).

Na podstawie tej analizy przyjęto następujące parametry korektora ($N = 20$ próbek w okresie): $N_w = 4$, $N_c = 8$, $N_d = 2$. Wynik korekcji jest pokazany na rys. 6.43a (krzywa 3). Na rys. 6.43b wyniki estymacji amplitudy prądu, które ilustrują wpływ

korekcji na pomiar wielkości kryterialnych. □

Przedstawione powyżej neuronowe korektory napięcia i prądu mają strukturę rekurencyjnych sieci neuronowych. Należy zauważyć, że w sieciach ze sprzężeniem zwrotnym mogą wystąpić problemy z ich stabilnością [33], [63]. Problem ten nasila się wraz ze wzrostem rozmiaru sieci. Niekiedy zatem należy zrezygnować z dokładności korekcji na korzyść pewności stabilnej pracy korektora.

6.5 Podsumowanie

Zainteresowanie metodami sztucznej inteligencji w automatyce elektroenergetycznej wynika z ograniczeń jakie są związane z wykorzystaniem w tej dziedzinie tradycyjnych technik przetwarzania sygnałów i podejmowania decyzji. Zaawansowane metody cyfrowego przetwarzania sygnałów i estymacji parametrów modelu procesu, w tym również transformacja falkowa, na ogół pozwalają dobrze określić cechy oddzielnych zjawisk. Ich agregacja za pomocą omówionych powyżej metod umożliwiła jednoczesne uwzględnienie wielu czynników mających wpływ na stan obserwowanego procesu.

Podane w tym rozdziale przykłady zastosowania metod sztucznej inteligencji daleko nie wyczerpują znanych z literatury propozycji rozwiązywania problemów związanych z automatyką elektroenergetyczną. W ostatnich latach obserwuje się duże zainteresowanie ośrodków akademickich i czołowych producentów urządzeń automatyki tą właśnie dziedziną. W odniesieniu do automatyki elektroenergetycznej można wyróżnić następujące główne kierunki potencjalnych zastosowań.

- podstawowe funkcje regulacyjne (wzbudzenie generatorów, stabilizatory systemowe, kontrola stabilności dynamicznej) [21], [25], [61];
- automatyka SPZ, w tym również wykrywanie zwarc łukowych [2], [30], [104];
- zabezpieczenia linii elektroenergetycznych przesyłowych [4], [9], [12], [15], [32], [54], [88] i rozdzielczych [80], a także problematyka wykrywania zwarć z dużą impedancją przejścia [54], [56];
- analiza działania zabezpieczeń [5], [54], [100];
- lokalizacja miejsca zwarcia w liniach przesyłowych [3], [8], [71] i rozdzielczych [39];
- detekcja i klasyfikacja rodzaju zwarcia [14], [29], [53], [64], [80], [86], [87], [91], [94];
- kompensacja błędów przejściowych w przekładnikach [48];

- zabezpieczenie transformatorów.

Podane w tym rozdziale przykłady ilustrują podstawowe cechy omawianych algorytmów w zastosowaniu do zabezpieczeń przekaźnikowych.

6.6 Literatura

- [1] Afzalian A., Linkens D.A.: *Training of neurofuzzy power system stabilizers using genetic algorithms*. Electric Power & Energy Systems 22 (2000) ss. 93-102.
- [2] Aggarwal R.K., Johns, A.T., Song, Y.H.; Dunn, R.W., Fitton, D.S.: *Neural-network based adaptive single-pole autoreclosure technique for EHV transmission systems*. IEE Proceedings-C, Vol. 141, No. 2, March 1994, ss. 155-160.
- [3] Aggarwal R.K., Joorabian M., Song Y.H.: *Fuzzy neural network approach to accurate transmission line fault location*. Engineering Intelligence Systems for Electrical Engineering and Communications, Vol. 4, November 1997, ss. 251-256.
- [4] Bastard P., Meunier M., Régál H.: *Neural network-based algorithm for power transformer differential relays*. IEE Proc.-Gener. Transm. Distrib., Vol 142, No 4, July 1995, ss. 386-392.
- [5] Bell S.C., McArthur S.D.J., McDonald J.R., Burt G.M., Mather R., Burt S.M.: *On-line protection performance analysis using intelligent systems*. Engineering Intelligence Systems for Electrical Engineering and Communications, Vol. 4, November 1997, ss. 235-243.
- [6] Bubnicki Z.: *Wstęp do systemów ekspertowych*. PWN. Warszawa 1990.
- [7] Cederblad L., Gjerde P.O.: *A knowledge-based system for automatic evaluation of disturbance recordings*. CIGRE 1992 Session, 30 August - 5 September, paper 34-204.
- [8] Chen Z., Maun J.C.: *Artificial neural network approach to single-ended fault locator for transmission lines*. IEEE Transaction on Power Systems, Vol. 15, No 1, February 2000, ss. 370-375.
- [9] Cho K.R., Kang Y.C., Kim S.S., Park J.K., Kang S.H., Kim K.H.: *An ANN based approach to improve the speed of a differential equation based distance relaying algorithm*. IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 14, No 2, April 1999, ss. 349-355.
- [10] Cichocki A., Łobos T.: *Adaptive analogue network for real-time estimation of basic waveforms of voltages and currents*. IEE Proceedings-C, Vol. 139, No. 4 July 1992, ss. 343-350.
- [11] Cichocki A., Unbehauen R.: *Neural network for optimization and signal processing*. John Wiley & Sons Ltd. & B.G. Teubner, Stuttgart, 1993.
- [12] Coury D.V., Oleskovicz M.: *Multi-layer neural networks applied to distance relaying*. Electric Power & Energy Systems, Vol. 20, No 8, 1998, ss. 539-542.

- [13] Dash P.K., Liew A.C., Swain D.P., Mishra B.: *Fast tracking of transient power system signals using fuzzy LMS algorithm*. Electric Power & Energy Systems, Vol. 20, No 8, 1998, ss. 555-561.
- [14] Dash P.K., Mishra S., Salama M.A., Liew A.C.: *Classification of power system disturbances using a fuzzy expert system and a Fourier linear combiner*. IEEE Transaction On Power Delivery, Vol. 15, No 2, April 2000, ss. 472-477.
- [15] Dash P.K., Pradhan A.K., Panda G.: *A novel fuzzy neural network based distance relaying scheme*. IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 15, No 3, July 2000, ss. 902-907.
- [16] Demuth H., Beale M.: *Neural Network Toolbox for use with MATLAB Users guide*. The MathWorks, Inc, 1996.
- [17] Dijk H.E., Van de Water C.J., Van der Touw C.B.: *An expert system approach for protection engineering*. CIGRE 1992 Session, 30 August - 5 September, paper 34-205.
- [18] Dillon T.S., Laughton M.A.: *Expert system application in power systems*. Prentice Hall 1990.
- [19] Dillon T.S., Niebur D. (ed.): *Neural networks application in power systems*. CRL Publishing Ltd. London 1996.
- [20] Djukanovic M.B., Dobrijevic D.M., Calovic M.S., Novicevic M., Šobajić D.J.: *Coordinated stabilizing control for the exciter and governor loops using fuzzy set theory and neural nets*. Electric Power & Energy Systems, Vol. 19, No 8, 1997, ss. 489-499.
- [21] do Bomfim A.L.B., Taranto G.N., Falcão D.M.: *Simultaneous tuning of power system damping controllers using genetic algorithms*. IEEE Transaction on Power Systems, Vol. 15, No 1, February 2000, ss. 163-169.
- [22] Driankov D., Hellendoorn H., Reinfrank M.: *Wprowadzenie do sterowania rozmytego*. WNT. Warszawa 1996.
- [23] Duch W., Korbicz J., Rutkowski L., Tadeusiewicz R. (red.), *Sieci neuronowe*. T. 6 monografii: Biocybernetyka i Inżynieria Biomedyczna pod red. Nałęcza M. Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT. Warszawa 2000.
- [24] Eickhoff F., Handschin E., Hoffmann W.: *Knowledge based alarm handling and fault location in distribution networks*. IEEE Transaction on Power Systems, Vol. 7, No 2, May 1992, ss. 770-776.
- [25] El-Metwally K.A., Rao N.D., Malik O.P., Ramakrishna G.: *Application of a neural network as an integrated excitation controller*. Electric Power Systems Research, 42 (1997), ss. 121-126.
- [26] El-Sharkawi M., Niebur D. (ed.): *Artificial Neural Networks with application to power systems*. IEEE Tutorial Course. IEEE 96TP112-0, 1996.
- [27] *EMTP Rule book*. Leuven EMTP Center, July 1987.
- [28] Englert H., Stenzel J.: *Design of classification system for power quality disturbance*. Proceedings of the 12th International Conference on Power

- System Protection PSP 2000, Bled, Slovenia, 27-29 September 2000, ss. 167-172.
- [29] Ferrero A., Sangiovanni S., Zappitelli E.: *A fuzzy-set approach to fault-type identification in digital relaying*. IEEE Transaction on Power Delivery, Vol. 10, No 1, January 1995, ss. 169-175.
- [30] Fitton D.S., Dunn R.W., Aggarwal R.K., Johns A.T., Bennett A.: *Design and implementation of an adaptive single pole autoreclosure technique for transmission lines using artificial neural networks*. IEEE Transaction on Power Delivery, Vol. 11, No 2, April 1996, ss. 748-755.
- [31] Handschin E., Hoffmann W., Reyer F., Stephanblome Th., Schlücking U., Westermann D., Ahmed S.S.: *A new method of excitation control based on fuzzy set theory*. IEEE Transaction on Power Systems, Vol. 9, No 1, February 1994, ss. 533-539.
- [32] Handschin E., Kuhlan D., Westermann D.: *ANN-based measuring algorithms for power system protection*. Engineering Intelligence Systems for Electrical Engineering and Communications, Vol. 4, November 1997, ss. 205-211.
- [33] Haykin S.: *Neural networks. A comprehensive foundation*. Macmillan College Publishing Company, Inc. Englewood Cliffs, NJ, 1994.
- [34] Helt P., Parol M., Piotrowski P.: *Metody sztucznej inteligencji w elektroenergetyce*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej. Warszawa, 2000.
- [35] Hertz J., Krogh A., Palmer R.G.: *Wstęp do obliczeń neuronowych*. WNT. Warszawa 1993.
- [36] IEEE Working Group D-10 Report: *Application of Expert Systems to Power System Protection*. IEEE PES Summer Meeting, paper 93, SM 384-8 PWRD.
- [37] Iżykowski J., Kasztenny B., Rosołowski E., Saha M.M., Hillstrom B.: *Dynamic Compensation of Capacitive Voltage Transformers*. IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 13, No 1, January 1998, ss. 116-122.
- [38] Iżykowski J.: *Impedancyjne algorytmy lokalizacji zwarć w liniach przesyłowych*. Prace Naukowe Instytutu Energoelektryki Politechniki Wrocławskiej Nr 92. Wydawnictwo Pol. Wr. Wrocław 2001.
- [39] Järventausta P., Verho P., Kärenlampi M., Partanen J.: *AI methods for fault location in MV networks*. Engineering Intelligence Systems for Electrical Engineering and Communications, Vol 4, November 1997, ss. 265-271.
- [40] Kacprzyk J.: *Wieloetapowe sterowanie rozmyte*. WNT. Warszawa 2001.
- [41] Kacprzyk J.: *Introduction to fuzzy sets and fuzzy systems*. W: Mielczarski W. (ed.): *Fuzzy logic techniques in power systems*. Physica-Verlag. A Springer-Verlag Company. Heidelberg 1998, ss. 8-42.
- [42] Kamwa I., Grondin R., Sood V.K., Gagnon C., Nguyen V.T., Mereb J.: *Recurrent neural networks for phasor detection and adaptive identification in power system control and protection*. IEEE Transaction on Instrumentation and Measurement, Vol. 45, No 2, April, 1996, ss. 657-664.

- [43] Karnavas Y.L., Papadopoulos D.P.: *Excitation control of a power-generating system based on fuzzy logic and neural networks*. ETEP, Vol. 10, No 4, July/August 2000, ss. 233-241.
- [44] Kasztenny B.: *An artificial neural networks approach to power system protection*. Proceedings of ISAP'94, Montpellier, September 1994, ss. 665-672.
- [45] Kasztenny B.: *Digital relaying in power system using fuzzy set theory*. Archives of Control Systems, Vol. 4 (XL), 1995, No 1-2, ss. 113-127.
- [46] Kasztenny B., Rosołowski E., Saha M.M., Hillstrom B.: *A comparative analysis of protection principles for multi-criteria power transformer relaying*. Proceedings of the 12th Power Systems Computation Conference, Dresden, Germany, August 19-23, 1996, ss. 107-113.
- [47] Kasztenny B., Rosołowski E., Saha M.M., Hillstrom B.: *Fuzzy sets and logic in power system protection*. Engineering Intelligence Systems for Electrical Engineering and Communications, Vol. 4, November 1997, ss. 193-203.
- [48] Kasztenny B., Rosołowski E., Łukowicz M., Iżykowski J.: *Current related relaying algorithms immune to saturation of current transformers*. Developments in Power System Protection, 25-27th March 1997, Conference Publication No 434, IEE, 1997, ss. 365-366.
- [49] Kasztenny B., Łukowicz M., Rosołowski E.: *Differential protection for power transformers based on artificial neural network*. Archives of Electrical Engineering, Vol. XLVI, No 2, 1997, ss. 219-237.
- [50] Kasztenny B., Rosołowski E., Saha M.M., Hillstrom B.: *A Self-Organizing Fuzzy Logic Based Protection Relay - An Application to Power Transformer Protection*. IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 12, No 3, July 1997, ss. 1119-1126.
- [51] Kasztenny B., Rosołowski E., Iżykowski J., Saha M.M., Hillstrom B.: *Fuzzy logic controller for on-load transformer tap changer*. IEEE Transaction On Power Delivery, Vol. 13, No 1, January 1998, ss. 164-170.
- [52] Kezunović M., Watson K., Russel B.D., Heller P., Aucoin M.: *Expert system application to protection, substation control and related monitoring functions*. Electric Power Systems Research, 28 (1993), ss. 67-79.
- [53] Kezunović M., Rikalo I, Šobajić D.J.: *High-speed fault detection and classification with neural nets*. Electric Power Systems Research, 34 (1995), ss. 109-116.
- [54] Kezunović M.: *A survey of neural net applications to protective relaying and fault analysis*. Engineering Intelligence Systems for Electrical Engineering and Communications, Vol. 4, November 1997, ss. 185-192.
- [55] Kezunović M., Hertz A., Sabato M.V.G., Tsujikura Y.: *Practical intelligent system application to protection, and substation monitoring and control*. CIGRE, Session 1998, 34-104.
- [56] Kim C.J., Russel B.D.: *Classification of faults and switching events by inductive reasoning and Expert System methodology*. IEEE Transaction on Power Delivery, Vol. 4, No 3, July 1989, ss. 1631-1637.

- [57] Kim C.J., Russell D. B.: *A learning method for use in intelligent computer relays for high impedance faults*. IEEE Transaction on Power Delivery, Vol. 6, No 1, January 1991, ss. 109-115.
- [58] Korbicz J., Obuchowicz A., Uciński D.: *Sztuczne sieci neuronowe. Podstawy i zastosowania*. Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ. Warszawa 1994.
- [59] Kostyła P.: *Adaptacyjne sieci neuronowe w zastosowaniu do identyfikacji stanu układów elektrycznych*. Praca doktorska. Wydział Elektryczny Politechniki Wrocławskiej. Wrocław 1996.
- [60] Li K.K., Lai L.L., David A.K.: *Stand alone intelligent digital distance relay*. IEEE Transaction on Power Systems, Vol. 15, No 1, February 2000, ss. 137-142.
- [61] Lubośny Z.: *Self-organizing controllers of generating unit in electric power system*. Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej. Gdańsk 1999.
- [62] Łukowicz M.: *Zastosowanie sztucznych sieci neuronowych do identyfikacji sygnałów i podejmowania decyzji w automatyce elektroenergetycznej*. Praca doktorska. Instytut Energoelektryki Politechniki Wrocławskiej. Wrocław 1996.
- [63] Łukowicz M., Rosołowski E.: *Artificial neural network based dynamic compensation of current transformer errors*. 8th International Symposium on Short-Circuit Currents in Power Systems. Brussels, 8-10 October 1998, ss. 19-24.
- [64] Łukowicz M., Rosołowski E.: *Fault type classification in high voltage power systems using artificial neural networks*. Proceedings of the 11th International Conference on Power System Protection PSP'98, Bled, Slovenia, 30 Sept. - 2. Oct. 1998, ss. 141-146.
- [65] Łukowicz M., Rosołowski E., Iżykowski J.: *Zastosowanie sztucznych sieci neuronowych do kompensacji błędów pojemnościowych przekładników napięciowych*. Przegląd Elektrotechniczny, R. LXXV 9/1999, ss. 224-229.
- [66] Mańdziuk J.: *Sieci neuronowe typu Hopfielda. Teoria i zastosowania*. Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT. Warszawa 2000.
- [67] Megahed A.I., Malik O.P.: *Artificial neural network based modules for generator stator winding internal fault classification*. Engineering Intelligence Systems for Electrical Engineering and Communications, Vol. 4, November 1997, ss. 229-234.
- [68] Mendel J.M.: *Fuzzy logic systems for engineering: a tutorial*. Proceedings of the IEEE, Vol. 83, No 3, March 1995, ss. 345-377.
- [69] Nebendahl D. (ed.): *Expert systems. Introduction to the technology and applications*. Siemens Aktiengesellschaft, John Wiley & Sons Ltd., 1986.
- [70] Ngia L.S.H., Sjöberg J.: *Efficient training of neural nets for nonlinear adaptive filtering using a recursive Levenberg-Marquardt algorithm*. IEEE Transaction On Signal Processing, Vol. 48, No 7, July 2000, ss. 1915-1927.
- [71] Novosel D., Saha M.M.: *Locating faults on series compensated lines using intelligent methods*. Engineering Intelligence Systems for Electrical Engineering and Communications, Vol. 4, November 1997, ss. 259-264.

- [72] Osowski S.: *Neural network for estimation of harmonic components in a power system*. IEE Proc. Pt. C, No 2, Vol. 139, 1992, ss. 129-135.
- [73] Osowski S.: *Sieci neuronowe w ujęciu algorytmicznym*. WNT. Warszawa 1996.
- [74] Osowski S.: *Sieci neuronowe do przetwarzania informacji*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej. Warszawa 2000.
- [75] Pedrycz W.: *Fuzzy control and fuzzy systems*. John Willey & Sons. New York 1989.
- [76] Peiris H.J.C., Annakkage U.D., Pahalawatha N.C.: *Generation of fuzzy rules to develop fuzzy logic modulation controllers for damping of power system oscillation*. IEEE Transaction on Power Systems, Vol. 14, No 4, November 1999, ss. 1440-1445.
- [77] Perez L.G., Flechsig A.J., Meador J.J., Obradovic Z.: *Training an artificial neural network to discriminate between magnetizing inrush and internal faults*. IEEE Transaction on Power Delivery, Vol. 9, No 1, January 1994, ss. 434-441.
- [78] Pihler J., Grčar B., Dolinar D.: *Improved operation of power transformer protection using artificial neural network*. IEEE Transaction on Power Delivery, Vol. 12, No 3, July 1997, ss. 1128-1136.
- [79] Rutkowska D., Piliński M., Rutkowski L.: *Sieci neuronowe, algorytmy genetyczne i systemy rozmyte*. Wydawnictwo Naukowe PWN. Warszawa 1997.
- [80] Ruz F., Quesada A.B., Quijano A.: *Fuzzy logic applied to high impedance fault detection in compensated neutral grounding MV power systems*. Proceedings of 12th International Conference on Power System Protection - PSP 2000. Bled, September 2000, ss. 105-109.
- [81] Sachdev M. (coord.): *Advancements in microprocessor based protection and communication*. IEEE Tutorial Course. IEEE 97TP120-0, 1997.
- [82] Saha M.M., Kasztenny B.: *AI methods in power system protection*. Engineering Intelligence Systems for Electrical Engineering and Communications, Vol. 4, November 1997, ss. 183-184.
- [83] Saha M.M., Kasztenny B.: *Application of Fuzzy Logic in Power System Protection*. International Conference: "Modern Trends in the Protection Schemes of Electric Power Apparatus and Systems", New Delhi, India, 28-30 October 1998, paper IX-1.
- [84] Saha M.M., Hillstrom B., Kasztenny B., Rosołowski E.: *Fuzzy logic application to power transformer protection*. ABB Review 1/1998, ss. 41-46.
- [85] Saha M.M., Kasztenny B.: *Application of fuzzy logic in power system protection*. International Conference 'Modern Trends in the Protection Schemes of Electric Power Apparatus and Systems', New Delhi, India, 28-30 October 1998, ss. V-50-61.
- [86] Sanaye-Pasand M., Malik O.P.: *Performance of a recurrent neural network-based power transmission line fault directional module*. Engineering

- Intelligence Systems for Electrical Engineering and Communications, Vol. 4, November 1997, ss. 221-226.
- [87] Sidhu T.S., Singh H., Sachdev M.S.: *Design, implementation and testing of an artificial neural network based fault direction discriminator for protecting transmission lines*. IEEE Transaction on Power Delivery, Vol. 10, No 2, April 1995, ss. 697-706.
- [88] Sidhu T.S.: *Transmission line protection using ANNs: proposed applications, advantages and roadblocks to acceptance*. Engineering Intelligence Systems for Electrical Engineering and Communications, Vol. 4, November 1997, ss. 213-220.
- [89] SIMULINK. *Dynamic simulation for MATLAB. Using Simulink*. The Math-Works, Inc, 1999.
- [90] Soliman S.A., Helal I., Al-Kandari A.M.: *Fuzzy linear regression for measurement of harmonic components in a power system*. Electric Power Systems Research, 50 (1999), ss. 99-105.
- [91] Song Y.H., Xuan Q.X., Johns A.T.: *Comparison studies of five neural network based fault classifiers for complex transmission lines*. Electric Power Systems Research, 43 (1997), ss. 125-132.
- [92] Tadeusiewicz R.: *Sieci neuronowe*. Akademicka Oficyna Wydawnicza RM. Warszawa, 1993.
- [93] Ungrad H., Winkler W., Wiszniewski A.: *Protection techniques in electrical energy systems*, Marcel Dekker, Inc. New York, 1995.
- [94] Wang H., Keerthipala W.W.L.: *Fuzzy-neuro approach to fault classification for transmission line protection*. IEEE Transaction on Power Delivery, Vol. 13, No 4, October 1998, ss. 1093-1103.
- [95] Warwick K., Ekwue A., Aggarwal R. (ed.): *Artificial intelligence techniques in power systems*. IEE Power Engineering Series 22, The Institution of Electrical Engineers, London 1997.
- [96] Wasserman P.: *Neural computing. Theory and practice*. Van Nostrand Reinhold. New York, 1989.
- [97] Widrow B., Stearns S.D.: *Adaptive signal processing*. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, 1985.
- [98] Winkler W., Wiszniewski A.: *Automatyka zabezpieczeniowa w systemach elektroenergetycznych*. WNT. Warszawa 1999.
- [99] Wiszniewski A.: *Przekładniki w elektroenergetyce*. WNT. Warszawa, 1992.
- [100] Wiszniewski A., Kasztenny B.: *Primary protective relays with elements of expert systems*. CIGRE, General Conference 1992, 34-202.
- [101] Wiszniewski A., Kasztenny B.: *Fuzzy sets approach to transformer differential relay*. Developments in Power System Protection, 1993, Conference Publication No 368, IEE, 1993, ss. 169-172.
- [102] Wiszniewski A., Kasztenny B.: *A multi-criteria differential transformer relay based on fuzzy logic*. IEEE Transaction on Power Delivery, Vol. 10, No 4, October 1995, ss. 1786-1792.

- [103] Yager R.R., Filev D.P.: *Podstawy modelowania i sterowania rozmytego*. WNT. Warszawa 1995.
- [104] Yu I.K., Song Y.H.: *Development of novel adaptive single-pole autoreclosure schemes for extra high voltage transmission system using wavelet transform analysis*. *Electric Power Systems Research*, 47 (1998), ss. 11-19.
- [105] Zahra F., Jeyasurya B., Quaiocoe J.E.: *High-speed transmission line relaying using artificial neural networks*. *Electric Power Systems Research*, 53 (2000), ss. 173-179.
- [106] Zhang J., Walter G.G, Miao Y., Lee W.N.W.: *Wavelet neural networks for function learning*. *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 43, No 6, June 1995, ss. 1485-1497.
- [107] Zheng T., Makram E.B., Girgis A.A.: *Power system transient and harmonic studies using wavelet transform*. *IEEE Transaction on Power Delivery*, Vol. 14, No 4, October 1999, ss. 1461-1466.
- [108] Zieliński J.S.: *Systemy ekspertowe w elektroenergetyce*. *Energetyka*, nr 2, luty 1991.
- [109] Zimmermann H.J.: *Fuzzy sets, decision making and expert systems*. Kluwer Academic Publisher. Dordrecht, 1987.

Skorowidz

A

algorytm Fouriera
dwustanowy, 178
pełnookresowy, 157
- charakterystyka częstotliwościowa,
237
- rekursywny, 165
półookresowy, 163
- charakterystyka częstotliwościowa,
163
trójstanowy, 180
algorytm genetyczny, 343
algorytm Walsh
pełnookresowy, 170
półookresowy, 171
autokorelacja, 127
automatyczne powtarzane załączenie, 18

B

błąd estymacji, 333
błędy pomiarowe, 154
błędy reprezentacji zmiennych stanu, 154

C

charakterystyka czasowo-
częstotliwościowa, 139
charakterystyka magnesowania, 298, 415
częstotliwość
Nyquista, 81
próbkowania, 81
próbkowania, 20
próbkowania, 81
znamionowa, 273

E

elektroenergetyczna automatyka
zabezpieczeniowa, 16
zadania, 29
estymator
amplitudy, 150, 236
- charakterystyka częstotliwościowa,
237
impedancji, 256
mocy
- biernej, 251
- czynnej, 251
składowych ortogonalnych, 180, 234,
235, 239, 331
wartości skutecznej, 228
estymator nieobciążony, 163

F

filtr cyfrowy, 98
charakterystyka częstotliwościowa, 99
- amplitudy, 99
- fazy, 99
nierekursywny, 100
NOI, 100, 112
- aproksymacja Butterwortha, 114
- aproksymacja Czebyszewa, 115
- aproksymacja eliptyczna, 118
- projektowanie, 112
- prototypowy filtr analogowy, 112
opóźnienie
- fazowe, 99
- grupowe, 99
rekursywny, 100
SOI, 100
-projektowanie, 104
stabilność, 98
filtr Kalmana, 212
rozszerzony, 219
filtr medianowy, 308

filtr odcinający, 84
 filtr uśredniający, 307
 funkcja
 impulsowa, 86
 kryterialna, 175
 okna, 92

K

komparator, 37
 kryterium działania zabezpieczenia, 36

L

liczba rozmyta, 358
 linia z szeregową kompensacją pojemnościową, 21
 logika dwuwartościowa, 37, 350
 logika rozmyta, 350

M

macierz kowariancji pomiarów, 175
 macierz pseudoodwrotna, 176
 metoda najmniejszych kwadratów, 173
 algorytm nierekursywny, 176, 177, 186
 algorytm rekursywny, 186
 - współczynnik zapominania, 189
 nieliniowy, 195
 metody sztucznej inteligencji, 343
 model sygnałowy
 nierekursywny, 152
 Prony'ego, 282
 rekursywny, 152
 zmiennych stanu, 153

N

nakładanie się widm, 82

O

obserwator stanu, 200
 charakterystyka częstotliwościowa, 201
 niestacjonarny, 205, 207
 stacjonarny, 197
 okno przetwarzania, 78, 101
 oscylacje Gibbsa, 78

P

pętla zwarciowa, 17

program EMTP, 20
 przekaźnik zabezpieczeniowy, 32
 bezzwłoczny, 35
 struktura, 32
 układ decyzyjny, 33
 układ pomiarowy, 33
 układ wejść analogowych, 33
 układ wyjściowy, 34
 ultra szybki, 36
 zwłoczny, 35
 przekładnik napięciowy, 55
 indukcyjny, 56
 pojemnościowy, 56
 przekładnik prądowy, 51
 przekształcenie biliniowe, *patrz*
 transformacja dwuliniowa
 przekształcenie Fouriera, 69
 dyskretne, 76
 szybkie, 78
 właściwości, 79
 przekształcenie Laplace'a, 84
 przekształcenie składowych $0, \alpha, \beta, 18,$
 263
 przekształcenie składowych
 symetrycznych, 18, 263
 przekształcenie \neq , 89

R

rejestracja zakłóceń, 30

S

sieć elektroenergetyczna
 przesyłowa, 19
 rozdzielcza, 22
 sieć neuronowa
 algorytm propagacji wstecznej, 404
 Hopfielda, 398
 rekurencyjna, 397
 wielowarstwowa, 397
 składowa aperiodyczna, 20, 54, 316
 model, 199
 składowe symetryczne
 algorytm estymacji, 268
 model stanowy, 269
 splot kołowy, 93
 stan przejściowy
 elektromagnetyczny, 16
 elektromechaniczny, 15
 sygnał harmoniczny, 98
 sygnał impulsowy, 79

sygnał zespolony, 70, 150
system ekspertowy, 346
 baza wiedzy, 346
 maszyna wnioskująca, 347
system rozmyty
 baza wiedzy, 353
 blok rozmywania, 352
 blok wyostrzania, 353
 maszyna wnioskująca, 353
 zmienna lingwistyczna, 350
system zabezpieczeń, 30
szereg Fouriera, 72

T

transformacja dwuliniowa, 95
transformata falkowa
 ciągła, 135
 dyskretna, 139
 falka podstawowa, 135, 140
 odwrotna, 140

U

układ cyfrowy, 67
układ dyskretny, 67

W

wariancja zmiennej, 14, 148
wartość oczekiwana, 148
wektor przestrzenny, 266
wielokryterialny przekąźnik rozmyty, 370

Z

zabezpieczana strefa, 31
zabezpieczenie
 bezpieczeństwo funkcjonowania, 34, 35
 czułość, 36
 kryterium działania, 36
 - admitancyjne, 47
 - falowe, 47
 - kierunkowe, 39
 - nadmiarowe, 37
 - nad napięciowe, 40
 - nadprądowe, 37
 - nadprądowe zwłoczne, 38
 - niedmiarowe, 37
 - niedomiarowe, 37
 - podimpedancyjne, 43, 44
 - podnapięciowe, 40
 - różnicowoprądowe, 40
niezawodność, 34
pewność działania, 34
podstawowe, 31
rezerwowe, 31
szybkość działania, 35
zbiór rozmyty, 354
 funkcja przynależności, 354
 podstawowe operacje, 356
zespolona amplituda, 150
zwarcie
 doziemne, 23
 małoprądowe, 18
 przemijające, 18
 trwałe, 18
 w maszynie elektrycznej, 24
 wielkoprądowe, 18