

Na prawach rękopisu  
do użytku służbowego

KATEDRA ENERGOELEKTRYKI POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ  
Raport serii SPRAWOZDANIA Nr

LABORATORIUM ELEMENTÓW TECHNIKI STEROWANIA  
INSTRUKCJA LABORATORYJNA

# ĆWICZENIE Nr 1

**SPOSOBY OPISU UKŁADU AUTOMATYKI**  
**STEROWANIE DYSKRETNE OBIEKTEM CIĄGŁYM**  
**MODEL CYFROWY OBIEKTU CIĄGŁEGO**

Mirosław Łukowicz

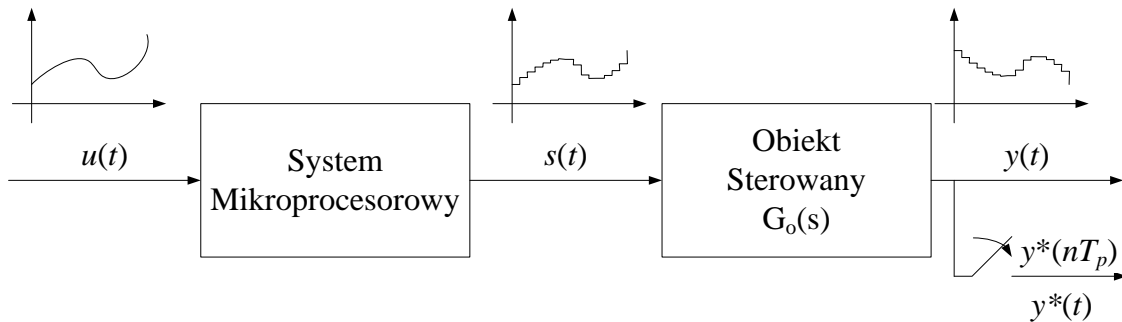
Słowa kluczowe:  
transmitancja, przestrzeń stanów, okres  
próbki, ekstrapolator.

WROCŁAW 2023

## 1. Wstęp

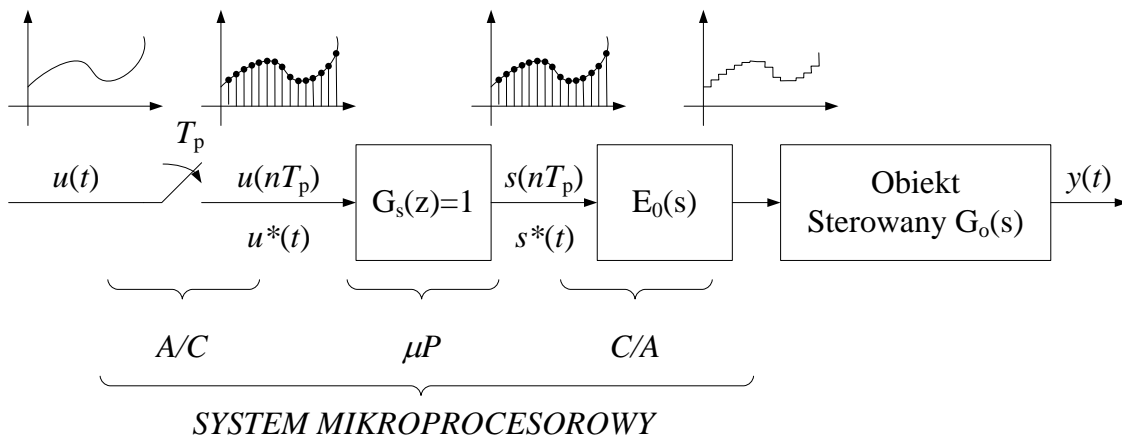
Modelowanie procesu sterowania komputerowego ma swe podwaliny w teorii układów impulsowych. Jest ona z powodzeniem stosowana w syntezie algorytmów sterowania oraz dyskretnej symulacji układów ciągłych.

Rozważmy hipotetyczny system mikroprocesorowy, którego zadaniem jest powielenie ciągłego sygnału wejściowego na wyjście, przy czym sygnał wyjściowy będzie dyskretyzowany w czasie, oraz będzie ciągły w poziomie, tzn. będzie mógł przyjmować dowolne wartości ze zbioru liczb rzeczywistych. Ogólny schemat takiego systemu przedstawiony jest na rys. 1.



Rys. 1. Dyskretno sterowanie obiektem ciągłym ze sterownikiem o transmitancji  $G(z)=1$ .

W syntezie algorytmu sterowania wymagana jest często znajomość modelu dyskretnego obiektu ciągłego, w którym uwzględniony jest proces formowania sygnału wyjściowego z przetwornika C/A. W takich rozważaniach pomocny może być rys. 2, w którym przedstawiono kolejno procesy przetwarzania sygnału wejściowego.



Rys. 2. Model matematyczny procesu dyskretnego sterowania obiektem ciągłym ze sterownikiem o transmitancji  $G(z)=1$ .

Ciągły sygnał wejściowy jest próbkowany przez impulsator, którego model matematyczny opisany jest następującą zależnością:

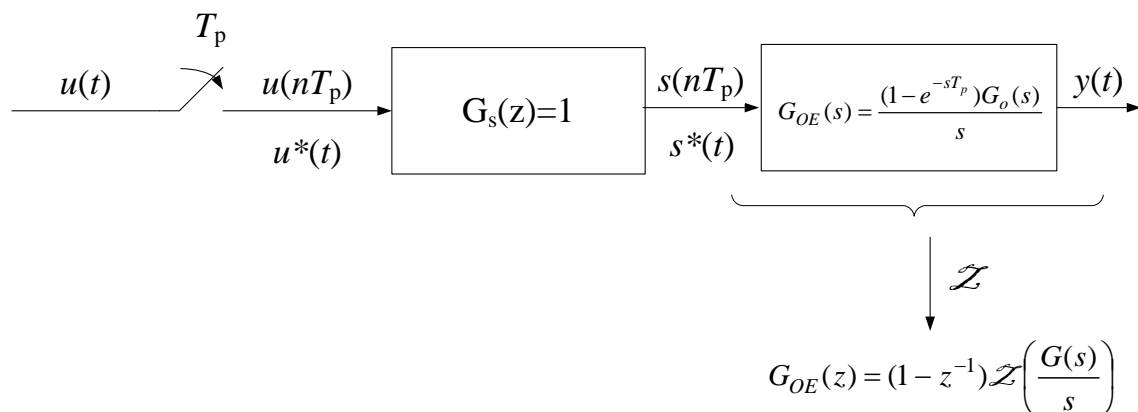
$$u^*(t) = u(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT_p) = \sum_{n=0}^{\infty} u(nT_p) \delta(t - nT_p) \quad (1)$$

Z zależności tej wynika, że sygnał za impulsatorem jest zestawieniem impulsów Dirac'a, czyli impulsów o nieskończonej wysokości i nieskończenie krótkim czasie trwania oraz polach powierzchni pod wykresami impulsów równym współczynnikom  $u(nT_p)$ . Pomędzy impulsami sygnał przyjmuje wartość zero. W związku z tym informacja w tym sygnale ukryta jest w postaci pól powierzchni poszczególnych impulsów Diraca generowanych przez impulsator. Współczynniki te są następnie przetwarzane przez mikroprocesor a właściwie algorytm (program w nim pracujący) reprezentowany przez odpowiednią transmitancję impulsową  $G_s(z)$ . Sygnał wyjściowy algorytmu przetwarzającego ma taką samą naturę, jak sygnał wejściowy, tzn. jest ciągiem impulsów Diraca, ale o zmienionych przez ten algorytm współczynnikach, czyli polach powierzchni pod impulsami.

W rzeczywistym układzie regulacji obiekt ciągły jest sterowany najczęściej sygnałem schodkowym wyprowadzanym z systemu  $\mu P$  poprzez przetwornik C/A. Proces ten można zamodelować, podając impulsy Diraca napływające z algorytmu sterowania na ekstrapolator zerowego rzędu, którego transmitancja ciągła jest następująca:

$$G_{E0}(s) = \frac{1 - e^{-sT_p}}{s} \quad (2)$$

Interpretacja działania ekstrapolatora zerowego rzędu jest taka, że wydobywa on informację zawartą w polach powierzchni pod impulsami w procesie całkowania ciągłego. Ponieważ interesuje nas sterowanie sygnałem o wartości zakodowanej w ostatnim impulsie, należy ten impuls scałkować i odjąć wynik wszystkich całkowań poprzednich. Należy być świadomym, że jest to model matematyczny procesu, który przebiega w przetworniku C/A i musi być uwzględniony podczas procesu syntezy algorytmu sterowania. Proces ten mógłby być pominięty, gdyby obiekt ciągły był sterowany z komputera impulsami Diraca, a tak w rzeczywistości nie jest. Ponieważ ekstrapolator zerowego rzędu jest w swej naturze ciągły, można jego transmitancję połączyć z transmitancją rozpatrywanego obiektu jak na rys. 3.



Rys. 3. Model matematyczny procesu dyskretnego. Sterowanie obiektem ciągłym ze sterownikiem o transmitancji  $G(z)=1$ .

Model dyskretny obiektu i ekstrapolatora zerowego rzędu otrzymuje się przez bezpośrednie znalezienie transformaty  $\mathcal{Z}$  szeregowego połączenia ekstrapolatora i obiektu, co daje w efekcie zależność:

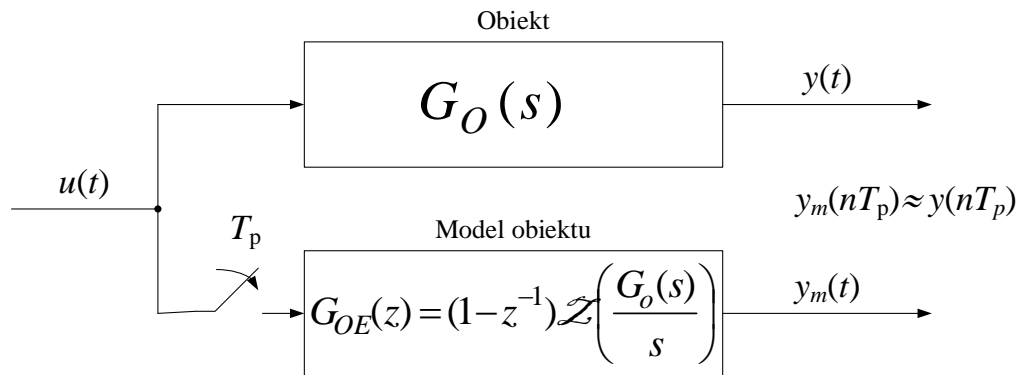
$$G_{OE}(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left( \frac{G_O(s)}{s} \right) \quad (3)$$

gdzie transformatę  $\mathcal{Z} \left( G(s) = \frac{G_O(s)}{s} \right)$  można policzyć np. z metody residuów zgodnie z następującą formułą:

$$G(z) = \sum_{k=1}^{n_b} \frac{1}{(r_k - 1)!} \left\{ \frac{d^{r_k - 1}}{ds^{r_k - 1}} \left[ (s - s_k)^{r_k} G(s) \frac{z}{z - e^{sT_p}} \right] \right\} \Bigg|_{s=s_k} \quad (4)$$

gdzie  $n_b$  jest liczbą różnych biegunów  $G(s)$ , przy czym wielokrotność poszczególnych biegunów jest równa  $r_k$ , z czego wynika, że  $n = \sum_{k=1}^{n_b} r_k$ .

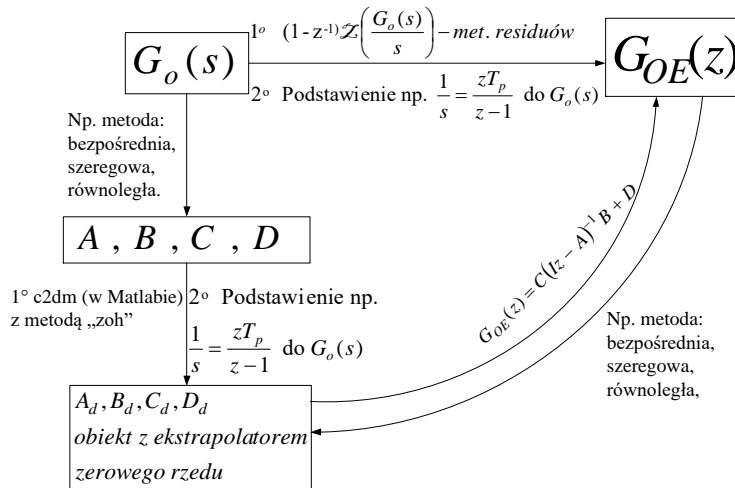
Podanie sygnału na wejście obiektu oraz tak zaprojektowanego modelu obiektu powinno dać na wyjściu obiektu sygnał ciągły, natomiast na wyjściu modelu sygnał ciągły o wartościach w przybliżeniu równych wartościom sygnału wyjściowego z obiektu (rys 4). W przypadku zastosowania ekstrapolacji zerowego rzędu idealna równość wartości tych sygnałów występuje tylko w momentach próbkowania, gdy sygnał wejściowy obu układów ma charakter schodkowy (stały między momentami próbkowania).



Rys. 4. Odpowiedź obiektu i jego modelu na pobudzenie dowolnym sygnałem wejściowym.

Skoro odpowiedzi obiektu i jego modelu są w przybliżeniu takie same, to algorytm sterowania zaprojektowany dla modelu impulsowego powinien równie dobrze pracować dla obiektu ciągłego. W związku z tym korzystnie jest posługiwać się podczas syntezy algorytmu sterowania dyskretnym modelem obiektu np. w postaci równań stanu.

Różne sposoby otrzymania dyskretnego modelu stanowego i dyskretniej transmitancji obiektu ciągłego reprezentowanego transmitancją  $G_O(s)$  i sterowanego z ekstrapolatora zerowego rzędu przedstawiono na rys. 5.



Rys. 5. Drogi przejścia z transmitancji ciągłej obiektu na dyskretne równania stanu i transmitancję impulsową modelu obiektu z ekstrapolatorem zerowego rzędu.

Najprostszym sposobem otrzymania dyskretnego modelu stanowego obiektu jest znalezienie najpierw modelu stanowego ciągłego, a następnie przejście na model stanowy dyskretny korzystając z odpowiedniej funkcji w Matlabie, np. `c2dm` („continuous to discrete transformation with method”, gdzie metoda „zoh” czyli „zero-order-hold” odpowiada zastosowaniu ekstrapolacji zerowego rzędu).

Model stanowy ciągły można zaprojektować korzystając z jednej z metod wyszczególnionych na rys. 5. Dla przypomnienia poniżej zestawiono kroki działania w metodzie bezpośredniej.

Niech będzie dana transmitancja obiektu, dla którego należy znaleźć opis w przestrzeni zmiennych stanu

$$G(s) = \frac{b_l s^l + b_{l-1} s^{l-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad l < n \quad (5)$$

Podzielmy licznik i mianownik przez  $s^n$ . Wówczas otrzymamy

$$G(s) = \frac{b_l s^{l-n} + b_{l-1} s^{l-n-1} + \dots + b_1 s^{1-n} + b_0 s^{-n}}{1 + a_{n-1} s^{-1} + \dots + a_1 s^{1-n} + a_0 s^{-n}} = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (6)$$

Wprowadzamy nową funkcję  $E(s)$  o następującej postaci

$$Y(s) = \underbrace{\frac{U(s)}{1 + a_{n-1} s^{-1} + \dots + a_1 s^{1-n} + a_0 s^{-n}}}_{E(s)} (b_l s^{l-n} + b_{l-1} s^{l-n-1} + \dots + b_1 s^{1-n} + b_0 s^{-n}) \quad (7)$$

Wówczas sygnał wyjściowy jest równy

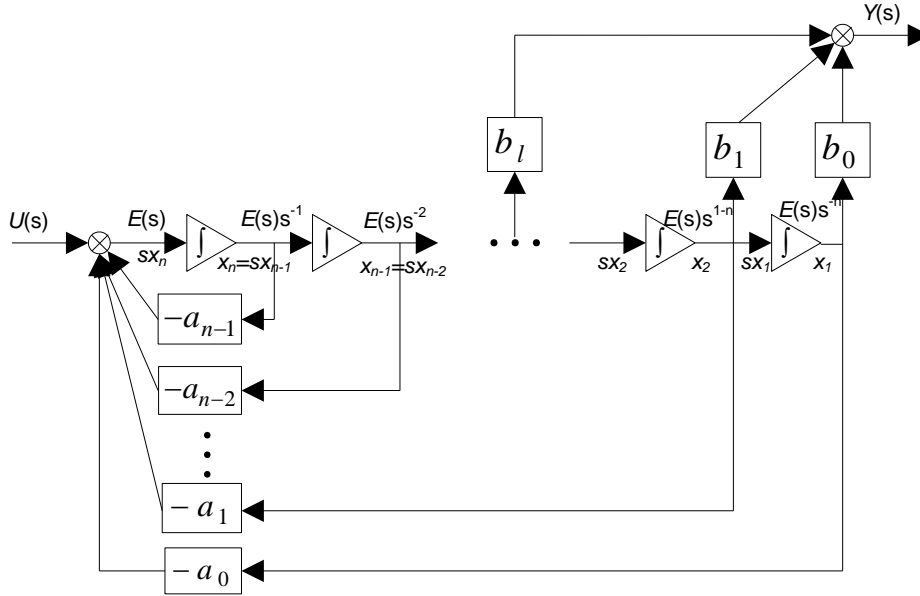
$$Y(s) = E(s)(b_l s^{l-n} + b_{l-1} s^{l-n-1} + \dots + b_1 s^{1-n} + b_0 s^{-n}) \quad (*) \quad (8)$$

i obowiązują zależności jak następuje:

$$E(s)(1 + a_{n-1} s^{-1} + \dots + a_1 s^{1-n} + a_0 s^{-n}) = U(s) \quad (9a)$$

$$E(s) = U(s) - E(s)(a_{n-1} s^{-1} + \dots + a_1 s^{1-n} + a_0 s^{-n}) \quad (**) \quad (9b)$$

Na podstawie równań (\*) i (\*\*) można sporządzić schemat blokowy modelu w przestrzeni zmiennych stany jak na rys. 6.



Rys. 6. Schemat blokowy modelu obiektu w przestrzeni stanu otrzymany metodą bezpośrednią.

Po postawieniu  $E(s)=sx_n$  można sformułować kolejno równania stanu w następującej postaci

$$\begin{aligned} sx_1 &= x_2 \\ sx_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ sx_{n-1} &= x_n \\ sx_n &= U(s) - a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - a_{n-1} x_n \end{aligned} \quad (10)$$

oraz równanie wyjściowe:

$$Y(s) = b_0 x_1 + b_1 x_2 + \dots + b_l x_{l+1} \quad (11)$$

Stosując metodę bezpośrednią otrzymujemy macierze modelu o stałej formie jak następuje:

Macierz stanowa (stanu):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Macierz wejściowa:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Macierz wyjściowa

$$C = [b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_l \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad (14)$$

oraz macierz bezpośredniego sprzężenia wyjścia z wejściem (zwykle zerowa)

$$D = [0]. \quad (15)$$

### PROGRAM ĆWICZENIA

1. W Simulinku zarejestrować odpowiedź obiektu o transmitancji

$$G_o(s) = \frac{1}{(Ns + 1)(Is + 1)} \quad (16a)$$

$$G_o(s) = \frac{1}{(s + N + jI)(s + N - jI)} \quad (16b)$$

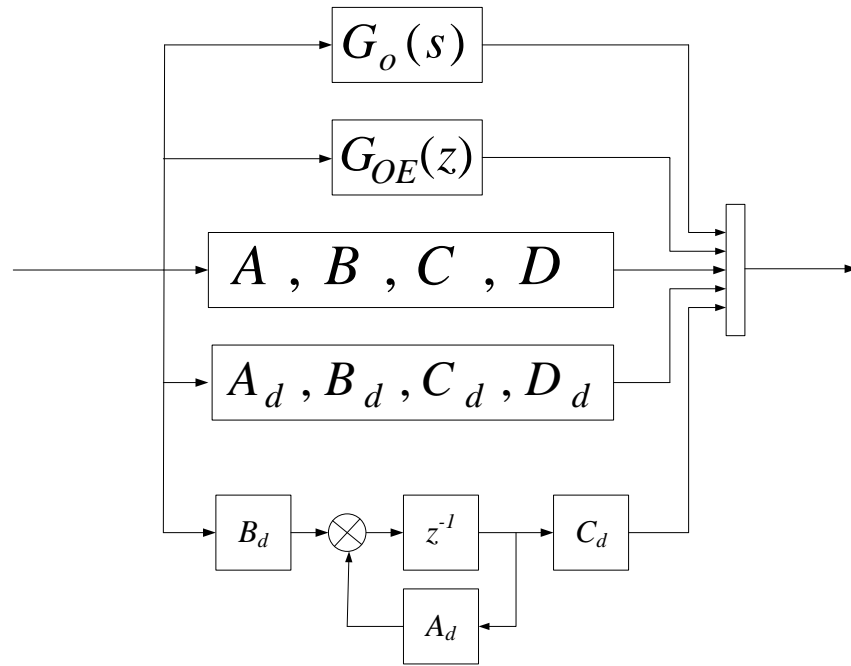
na skok jednostkowy, gdzie  $N$  jest liczbą liter w nazwisku, a  $I$  w imieniu. O typie transmitancji zadecyduje prowadzący tzn. dokona wyboru między 16a i 16b.

2. Zakładając, że obiekt ten będzie sterowany dyskretnie w czasie, dobrać odpowiedni okres próbkowania i znaleźć transmitancję dyskretną  $G_{oE}(z)$  obiektu z ekstrapolatorem.
3. Znaleźć model obiektu ciągłego w przestrzeni zmiennych stanu.
4. Znaleźć model dyskretny obiektu i ekstrapolatora w przestrzeni zmiennych stanu.
5. Zarejestrować odpowiedź modelu dyskretnego korzystając z odpowiedniego bloczka w Simulinku oraz zamodelować ten układ korzystając z sumatorów, bloku opóźnienia i odpowiednich wzmocnień macierzowych jak przedstawiono na rys. 7 w ostatnim wariancie.

Uwagi!

1. W sprawozdaniu zamieścić wszelkie obliczenia i wyprowadzenia.
2. Wszystkie kroki w wyprowadzeniach powinny być opisane i uzasadnione „słownie”.

3. Koniecznie podać wnioski.



Rys. 7. Wzór schematu do realizacji w Simulinku.