Na prawach rękopisu
do użytku służbowego

KATEDRA ENERGOELEKTRYKI POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ
Raport serii SPRAWOZDANIA Nr

LABORATORIUM ELEMENTÓW TECHNIKI STEROWANIA
INSTRUKCJA LABORATORYJNA

# ĆWICZENIE Nr 6

# Optymalne sterowanie dyskretne ciągłym i dyskretnym obiektem dynamicznym (problem deterministyczny)

Mirosław Łukowicz

Słowa kluczowe:
stan układu, otwarty układ sterowania, optymalizacja

WROCŁAW 2022

1. Wyznaczanie sterowania

Niech będzie dany obiekt dyskretny opisany w przestrzeni zmiennych stanu równaniem stanowym

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= Ax_n + Bu_n \\ y_n &= Cx_n + Du_n \end{aligned} \tag{1}$$

gdzie $x_n$ jest wektorem stanu i $u_n$ jest wejściowym wektorem sterującym.

Należy wyznaczyć sterowanie optymalne tym obiektem przeprowadzające go ze stanu początkowego $x_0$ do stanu końcowego $x_N = x^*$ i minimalizujące kryterium

$$Q_N = \sum_{i=0}^{N-1} u_i^2 \tag{2}$$

przy braku ograniczeń na sterowanie.

Zadanie to można rozwiązać korzystając z metody mnożników Lagrange'a (patrz Dodatek). Sprowadza się ono do minimalizacji funkcji Lagrange'a postaci

$$L = \sum_{i=0}^{N-1} u_i^2 + \lambda^T [x_N(u_0 \ldots u_{N-1}) - x^*] \tag{3}$$

gdzie

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix} \tag{4}$$

a $k$ jest rzędem obiektu.

Stosując metodę programowania dynamicznego wylicza się ostatnie sterowania z zależności

$$V_1(x_{N-1}) = \min_{u_{N-1}} [u_{N-1}^2 + \lambda^T (Ax_{N-1} + bu_{N-1} - x^*)] \tag{5}$$

Minimalizacja wyrażenia (5) daje ostatnie sterowanie optymalne

$$u_{N-1}^* = -\frac{1}{2}\lambda^T b \tag{6}$$

dla którego

$$V_1(x_{N-1}) = \lambda^T Ax_{N-1} - \frac{1}{4}(\lambda^T b)^2 \tag{7}$$

Cofając się o krok wyliczamy

$$V_2(x_{N-2}) = \min_{u_{N-2}} [u_{N-2}^2 + V_1(x_{N-1})] = \min_{u_{N-2}} [u_{N-2}^2 + V_1(Ax_{N-2} + bu_{N-2})] =$$
$$= \min_{u_{N-2}} [u_{N-2}^2 + \lambda^T A^2 x_{N-2} + \lambda^T Abu_{N-2} - \frac{1}{4}(\lambda^T b)^2] \tag{8}$$

Minimalizacja wyrażenia (8) daje optymalne sterowanie dla kroku *N*-2

$$u_{N-2}^* = -\frac{1}{2}\lambda^T (Ab) \tag{9}$$

$$V_2(x_{N-2}) = \lambda^T Ax_{N-2} - \frac{1}{4}(\lambda^T Ab)^2 - \frac{1}{4}(\lambda^T b)^2 \tag{10}$$

Cofając się o kolejny krok wyliczamy

$$V_3(x_{N-3}) = \min_{u_{N-3}} [u_{N-3}^2 + V_2(x_{N-2})] = \min_{u_{N-3}} [u_{N-3}^2 + V_2(Ax_{N-3} + bu_{N-3})] =$$
$$= \min_{u_{N-3}} [u_{N-3}^2 + \lambda^T A^3 x_{N-3} + \lambda^T A^2 bu_{N-3} - \frac{1}{4}(\lambda^T Ab)^2 - \frac{1}{4}(\lambda^T b)^2] \tag{11}$$

Minimalizacja wyrażenia (11) daje optymalne sterowanie dla kroku *N*-3

$$u_{N-3}^* = -\frac{1}{2}\lambda^T (A^2 b) \tag{12}$$

$$V_3(x_{N-3}) = \lambda^T A^3 x_{N-3} - \frac{1}{4}(\lambda^T A^2 b)^2 - \frac{1}{4}(\lambda^T Ab)^2 - \frac{1}{4}(\lambda^T b)^2 \tag{13}$$

**itd.**

Z warunku na stan końcowy i wyliczone ogólnie sterowania otrzymujemy

$$x^* - A^N x_0 = -\frac{1}{2}[(A^{N-1}b)\lambda^T A^{N-1}b + (A^{N-2}b)\lambda^T A^{N-2}b + \quad \dots \quad + b\lambda^T b] \tag{14}$$

co po przekształceniach daje

$$-2(x^* - A^N x_0) = [(A^{N-1}b)(A^{N-1}b)^T + (A^{N-2}b)(A^{N-2}b)^T + \quad \dots \quad + bb^T]\lambda \tag{15}$$

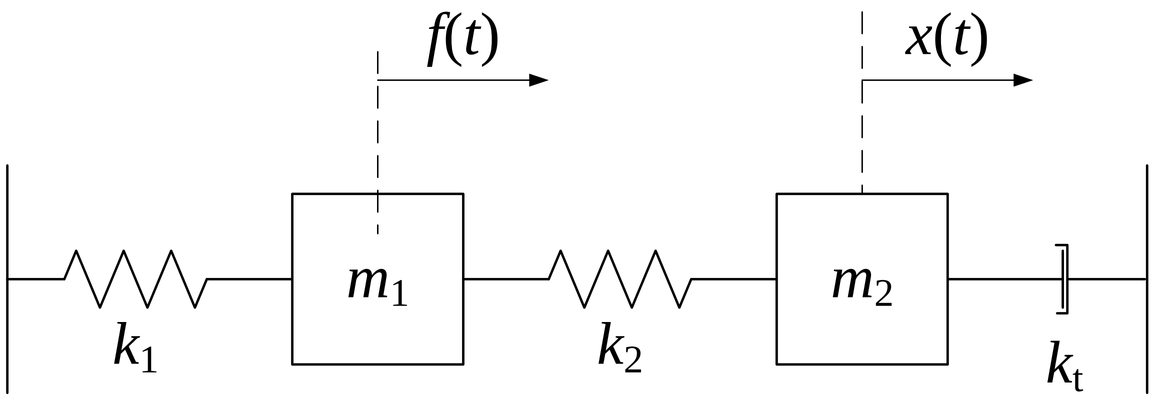
Z wyrażenia (15) wyliczamy mnożniki Lagrange’a.

**Sterowanie optymalne da się znaleźć dla obiektu sterowalnego, gdy *N*=*k*** i **wówczas jest to jedyne możliwe sterowanie przeprowadzające obiekt ze stanu początkowego do stanu zadanego (patrz ćwiczenie poświęcone wyznaczaniu sterowania docelowego).**

**Sterowanie optymalne da się znaleźć dla obiektu sterowalnego, gdy *N>k*, tzn. cel ma być osiągnięty w większej liczbie kroków niż minimalna i jednocześnie wystarczająca liczba kroków równa rzędowi obiektu.**

2. Zadanie do wykonania

Niech dany będzie obiekt przedstawiony na rysunku 1.




Rys. 1. Obiekt sterowania, gdzie $k_1$ jest dniem miesiąca [N/m]. $k_2$ miesiącem roku [N/m], $k_t$ godziną rozpoczęcia zajęć, $m_1$ liczba liter imienia [kg], $m_2$ liczba liter nazwiska [kg].

Należy wykonać następujące zadania:

Przygotować model ciągły i dyskretny z poprzednich zajęć laboratoryjnych lub w wykonać punkty 1-3.

1. Zamodelować obiekt w przestrzeni zmiennych stanu.

2. W Simulinku zaobserwować odpowiedź obiektu na skok jednostkowy.

3. Zamodelować cyfrowo w Simulinku obiekt w przestrzeni zmiennych stanu dobierając uprzednio odpowiedni okres próbkowania.

4. Znaleźć sterowanie dyskretne obiektem ciągłym w układzie zamkniętym, które przeprowadzi obiekt ze stanu początkowego (nie zmieniać stanu początkowego w dalszych punktach ćwiczenia) do stanu $\bar{0}$. Zakładamy, że zmienne stanu obiektu ciągłego są mierzalne. Zamodelować to sterowanie w Simulinku z jednoczesnym pomiarem wskaźnika jakości sterowania.

5. Wyznaczyć sterowanie optymalne dla 5-ięciu i np. 38 kroków sterowania. Sterowanie zrealizować na modelu dyskretnym i obiekcie ciągłym. Odczytać wartość wskaźnika jakości sterownia. Zaobserwować przebieg sygnału sterującego.

6. Spróbować wyznaczyć sterowanie optymalne dla 3 i 4-rech kroków sterowania. Policzyć wartości wskaźników jakości sterownia i odczytać stany końcowe dla tych sterowań.

7. Dla wybranego stanu początkowego sporządzić wykres zależności wartości wskaźnika jakości $Q$ sterowania od liczby kroków sterowania (horyzontu czasowego sterowania).

8. Dla wybranego stanu początkowego sporządzić wykres zależności wartości maksymalnej wartości bezwzględnej ciągów sterujących od liczby kroków sterowania (horyzontu czasowego sterowania).

Dodatek

**Poszukiwanie ekstremum warunkowego funkcji *f*(*x*) przy warunku *g*(*x*)=0.**

Przy rozwiązywaniu programów nieliniowych o postaci kanonicznej znajduje zastosowanie tzw. metoda mnożników Lagrange'a. Tok postępowania można tu podzielić na dwa etapy:

1. Sprawdzamy, czy funkcja celu *f(x)* ma ekstremum bezwarunkowe. Jeżeli tak, to czy spełnia ono warunki ograniczające, a więc czy jest równocześnie ekstremum warunkowym.
Szukanie ekstremum bezwarunkowego polega na obliczeniu pochodnych cząstkowych funkcji celu względem poszczególnych zmiennych decyzyjnych i przyrównaniu tych pochodnych do zera.

Warunkiem wystarczającym na istnienie minimum funkcji $f(x)$ w punkcie $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ jest to, aby w tym punkcie wyznacznik macierzy utworzonej z pochodnych cząstkowych drugiego rzędu funkcji był dodatni, tzn.:

$$\det B = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix} > 0$$

oraz aby wartości wszystkich minorów głównych tej macierzy (brane w punktach stacjonarnych) były dodatnie. Jeżeli ekstremum bezwarunkowe spełnia warunki ograniczające, to zadanie jest już rozwiązane.

2. Jeżeli ekstremum bezwarunkowe nie spełnia ograniczeń, funkcję celu przekształcamy w funkcję Lagrange'a:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i g_i(x)$$

przy czym $\lambda_i$ , to nieoznaczone mnożniki Lagrange'a.

W ten sposób zastępujemy szukanie ekstremum warunkowego funkcji *f(x)* szukaniem ekstremum bezwarunkowego funkcji Lagrange'a. Obliczamy pochodne cząstkowe funkcji *L* względem poszczególnych zmiennych decyzyjnych $x_j$ oraz względem mnożników Langrange'a $\lambda_i$ a następnie przyrównujemy te pochodne do zera. Rozwiązanie otrzymanego układu równań jest na ogół rozwiązaniem optymalnym.