# MODELOWANIE UKŁADÓW CIĄGŁYCH I DYSKRETNYCH W PRZESTRZENI ZMIENNYCH STANU

Celem ćwiczenia jest:

- poznanie zasad modelowania liniowych ciągłych i dyskretnych elementów oraz układów regulacji automatycznej,
- poznanie metod otrzymywania modeli stanowych układów ciągłych i dyskretnych w dziedzinie czasu
- symulacja stanów dynamicznych dla wybranych elementów i układów regulacji automatycznej z zastosowaniem programu SIMULINK w pakiecie MATLAB.

## 4.1. Wprowadzenie

Rozpowszechnienie komputerów spowodowało pojawienie się szeregu profesjonalnych programów do symulacji układów dynamicznych. W niniejszym ćwiczeniu stosowany jest program modelowania układów dynamicznych SIMULINK. Symulator ten pozwala na efektywną realizację złożonych zadań z wielu obszarów techniki. Poniżej przedstawia się różne metody modelowania układów opisanych liniowymi równaniami różniczkowymi i transmitancjami. Przy badaniu układów regulacji przyjmuje się w większości przypadków, że przed momentem rozpoczęcia symulacji w układzie nie jest zmagazynowana energia. Tak więc wszystkie warunki początkowe są wtedy zerowe, przez co możliwe jest stosowanie pojęcia transmitancji operatorowej do opisu układu. Jednak w szczególnych przypadkach uwzględnienie niezerowych warunków początkowych może być wymagane. Z tego względu zagadnienie to jest rozważane przy opisie poszczególnych metod modelowania.

## 4.2. Metody modelowania liniowych ciągłych układów regulacji automatycznej

### 4.2.1. Metoda bezpośrednia (ogólna)

Metodę tę stosujemy, gdy równanie różniczkowe opisujące modelowany układ ma postać:

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \mathrm{K} + a_1 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a_0 y = u(t) \tag{4.1}$$

gdzie $n$ - rząd równania, $u(t)$ - funkcja wymuszająca, $y(t)$ - sygnał wyjściowy.

Cechą charakterystyczną równania (4.1) jest to, że jego prawa strona zawiera funkcję wymuszającą bez jej pochodnych.

Kolejne kroki w programowaniu tego równania są następujące:

a) równanie przekształca się tak, by po jego lewej stronie pozostała jedynie pochodna sygnału wyjściowego najwyższego rzędu,
b) zestawia się $n$ szeregowo połączonych integratorów ($n$ - rząd równania) i zakłada się, że na wyjściu ostatniego z nich uzyskuje się rozwiązanie, tj. sygnał $y(t)$,
c) na wejście pierwszego z integratorów doprowadza się sygnał określony przez prawą stronę równania uzyskanego w punkcie a).

*Przykład* 1

Zamodelować układ opisany równaniem różniczkowym:

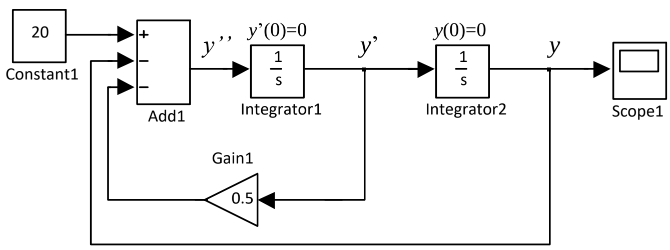
$$y'' + 0.5y' + y = 20$$

z warunkami początkowymi: $y(0) = 10$, $y'(0) = 0$.

Zgodnie z punktem a) programowania według tej metody, zadane równanie różniczkowe przekształca się do postaci:

$$y'' = 20 - 0.5y' - y$$

Po realizacji punktów b) i c) uzyskuje się schemat operacyjny jak na rys. 4.1.




Rys. 4.1. Schemat operacyjny dla przykładu 1

Przy tworzeniu tego schematu zastosowano człony operacyjne dostępne w programie symulacyjnym SIMULINK używanym w niniejszym ćwiczeniu.

*Przykład* 2

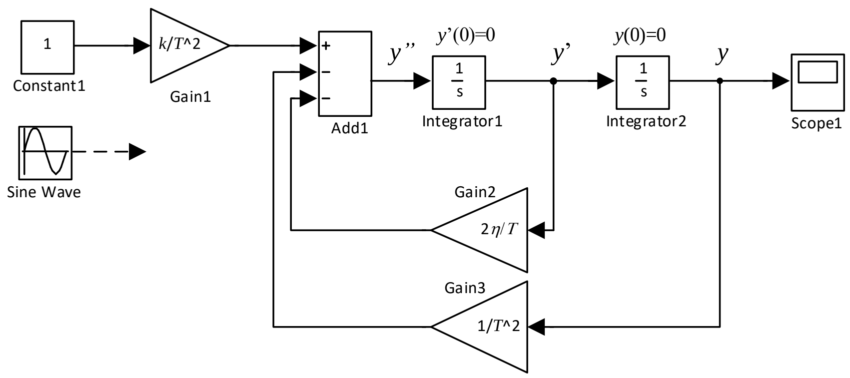
Wyznaczyć model dla elementu rzędu drugiego o funkcji przejścia:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\eta T s + 1}$$

Przy zerowych warunkach początkowych (dla których definiowana jest funkcja przejścia) odwrotne przekształcenie Laplace'a daje następujące równanie różniczkowe drugiego rzędu:

$$T^2 y'' + 2\eta T y' + y = ku$$

Programując powyższe równanie różniczkowe zgodnie z podanymi zasadami (punkty a), b), c)) uzyskuje się schemat operacyjny jak na rys. 4.2.




Rys. 4.2. Schemat operacyjny dla przykładu 2.

Przy badaniu odpowiedzi tego elementu na skok jednostkowy ($u(t)$=1($t$)) na wejściu członu wzmacniacza "Gain1" należy zastosować element typu "Constant". Natomiast przy badaniach w dziedzinie częstotliwości na wejście należy podać źródło sygnału sinusoidalnego "Sine Wave".

### 4.2.2. Metoda postaci kanonicznej

W metodzie tej punktem wyjścia jest równanie o postaci:

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n} + \ldots + a_1 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a_0 y = b_m \frac{\mathrm{d}^m u}{\mathrm{d}t^m} + b_{m-1} \frac{\mathrm{d}^{m-1} u}{\mathrm{d}t^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + b_0 u \tag{4.2}$$

przy czym: $u$ - sygnał wejściowy, $y$ - sygnał wyjściowy, $m \le n$.

Kolejne kroki programowania tej metody są następujące:

a) równanie wyjściowe (4.2) przekształca się tak, by po jego lewej stronie pozostała jedynie pochodna najwyższego rzędu dla sygnału wyjściowego,
b) równanie uzyskane w punkcie a) należy $m$ - krotnie scałkować,
c) zestawia się schemat operacyjny odpowiadający równaniu uzyskanemu w punkcie b).

Metodę postaci kanonicznej ilustrują przykłady 3 i 4.

*Przykład* 3

Zaprogramować równanie różniczkowe:

$$0.2y' + y = 2u' + 1.5u$$

z warunkami początkowymi: $y(0) = 0.5$, $u(0) = 0$.

Wyznaczając najwyższą pochodną sygnału wyjściowego (zgodnie z punktem a)) uzyskuje się:

$$y' = 10u' + 7.5u - 5y$$

Po scałkowaniu powyższego równania ($m$ - krotne całkowanie z punktu b) sprowadza się w tym przypadku do jednokrotnego całkowania, bowiem $m$ = 1) otrzymuje się:

$$y = 10u + y_1$$

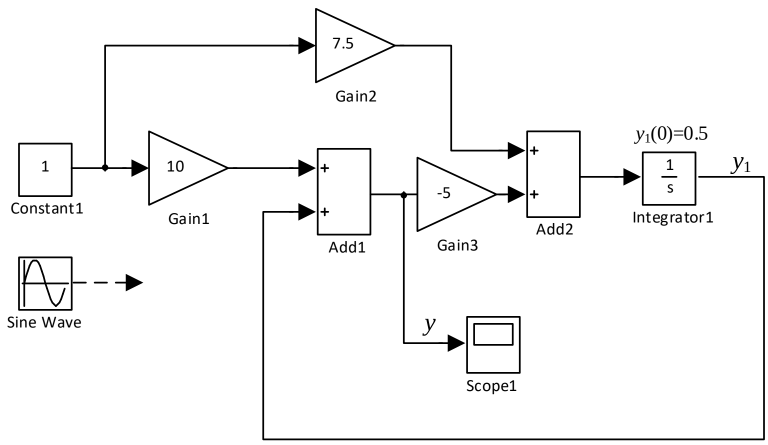
przy czym:

$$y_1 = \int_0^t (7.5u - 5y)dt + y_1(0)$$

Warunek początkowy dla wprowadzonej zmiennej $y_1$ wynosi:

$$y_1(0) = y(0) - 10u(0) = 0.5$$

Na podstawie powyższych równań zestawia się schemat jak na rys. 4.3.




Rys. 4.3. Schemat operacyjny dla przykładu 3.

*Przykład* 4
Wyznaczyć model członu korekcyjnego o funkcji przejścia:

$$G_k(s) = A\frac{T_k s + 1}{\frac{T_k}{\alpha} s + 1}$$

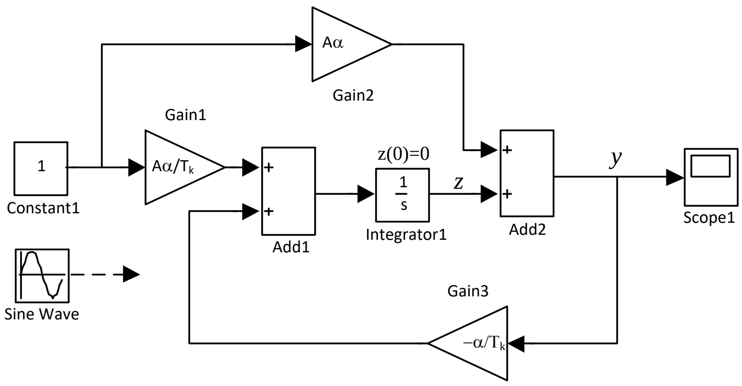
Przy zerowych warunkach początkowych, dla których definiowana jest funkcja przejścia, odwrotne przekształcenie Laplace'a daje następujące równanie różniczkowe:

$$\frac{T_k}{\alpha} y' + y = AT_k u' + Au$$

Po zrealizowaniu kroków programowania a) i b) metody postaci kanonicznej uzyskuje się następujące równanie dla sygnału wyjściowego *y*:

$$y = A\alpha u + \frac{1}{T_k}\int_0^t \left(A\alpha u - \alpha y\right)dt$$

Na podstawie tego równania uzyskuje się schemat operacyjny jak na rys. 4.4.




Rys. 4.4. Schemat operacyjny dla przykładu 4.

### 4.3. Metody zmiennych stanu

Zmienne stanu są sygnałami, czyli wielkościami zmiennymi w dziedzinie czasu.

**Stan obiektu -** najmniejszy liczebnie zespół wielkości, znajomość którego w danej chwili wraz ze znajomością wymuszeń $u(k)$ lub $u(t)$ i zakłóceń $z(k)$ lub $z(t)$ począwszy od chwili $k$ ($t_k$) pozwala jednoznacznie określić zachowanie się obiektu w przyszłości, tj. określić przebiegi $x(k)$ i $y(k)$, ($x(t)$ i $y(t)$).

Należy pamiętać, że:

1. Dany układ może mieć nieskończenie wiele modeli stanowych, co oznacza, że opis stanowy nie jest jednoznaczny, ale z punktu widzenia sygnałów wejściowych i wyjściowych wszystkie modele danego układu są sobie równoważne. Oznacza to, że pomimo niejednoznaczności stanu modelu związek między sygnałem wyjściowym a wejściowym jest jednoznaczny między modelami.
2. Zmienne stanu (sygnały w modelu) nie muszą mieć interpretacji fizycznej i nie muszą być związane z fizycznymi wielkościami występującymi w rzeczywistym obiekcie, który jest modelowany.
3. Charakter fizyczny zawsze mają sygnały wejściowe i wyjściowe.

W przypadku ogólnym opis stanowy jest układem równań różniczkowych pierwszego rzędu (w ogólnym przypadku nieliniowych równań różniczkowych) w postaci równań stanu

$$\begin{aligned} &\dot{x}^{(i)} = f_i\left(x^{(1)},\ x^{(2)} \ldots\ x^{(k)}; u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(p)}\right) \\ &\text{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, k \end{aligned} \tag{4.3}$$

Zmienne stanu można intepretować jako sygnały pośrednie, które w sposób dynamiczny wiążą wejścia z wyjściami modelu. Tzn. sygnały wejściowe oddziałują na zmienne stanu, a zmienne stanu w odpowiedni sposób formują wartości sygnałów wyjściowych modelu, przy czym nie jest wykluczony bezpośredni związek sygnałów wyjściowych $y(t)$ z sygnałami wejściowymi $u(t)$. W związku z tym sygnały wyjściowe są opisywane za pomocą zmiennych stanu w ogólnej postaci równań wyjścia:

$$\begin{aligned} & y^{(i)} = h_i\left(x^{(1)},\ x^{(2)} \ldots\ x^{(k)}; u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(p)}\right) \\ & \text{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, l \end{aligned} \tag{4.4}$$

Należy cały czas mieć na uwadze, że $y = y(t), \quad x^{(n)} = x^{(n)}(t), \quad \dot{x}^{(n)} = \dot{x}^{(n)}(t) \quad itd.$

Powyższe równania można zapisać w skrócie następująco:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u) \\ y &= h(x,u) \end{aligned} \tag{4.5}$$

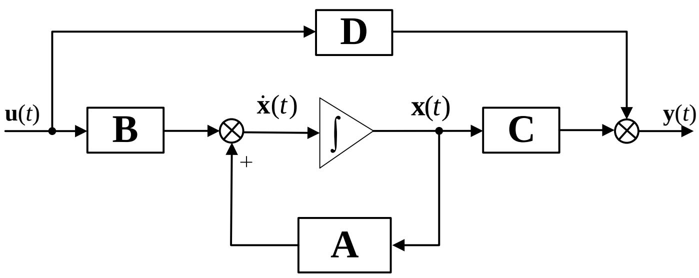
W szczególnym przypadku układu, np. liniowego, postać równań stanu jest następująca:

$$\begin{aligned} & \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ & \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \\ & \text{gdzie} \quad \mathbf{A}^{k\times k}, \quad \mathbf{B}^{k\times p}, \quad \mathbf{C}^{l\times k}, \mathbf{D}^{l\times p} \end{aligned} \tag{4.6}$$

gdzie macierz **A** nazywana jest macierzą stanową lub stanu, **B** – macierzą wejściową, **C** – macierzą wyjściową, a **D** – macierzą bezpośredniego sprzężenia wyjścia z wejściem, $k$ – jest rzędem układu (rzędem równania różniczkowego opisującego układ), $p$ – liczbą wejść, $l$ – liczbą wyjść, **u**, **x** i **y zapisane boldem** należy rozumieć jako wektory kolumnowe.

$x(t)$ – **wektor stanu** - element $k$-wymiarowej przestrzeni parametrów (wartości zmiennych stanu) zwanej przestrzenią stanów

Powyższemu układowi równań różniczkowych pierwszego rzędu odpowiada schemat stanowy jak na rys. 4.5.




Rys. 4.5. Schemat macierzowego modelu stanowego ciągłego układu liniowego

**Zmienne stanu** – są rzutami wektora stanu na osie współrzędnych.

**Wyjścia** – w układzie liniowym są liniową kombinacją zmiennych stanu; mogą być zmiennymi stanu, lecz nie muszą.

Model stanowy (model w przestrzeni stanów) należy traktować jako opis najdokładniejszy rzeczywistego układu.

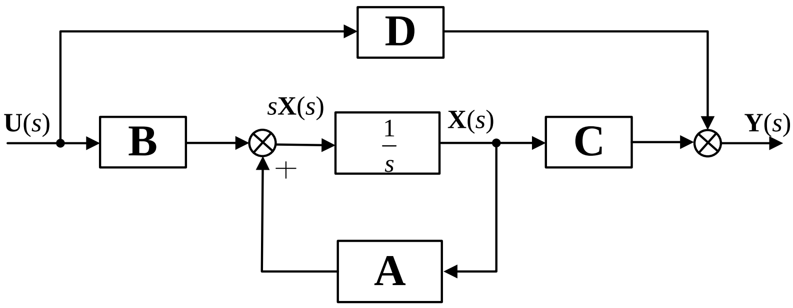
1. Umożliwia on analizę układu w dziedzinie czasu tak analitycznie jak i cyfrowo (również na analogowej maszynie obliczeniowej).
2. Umożliwia badanie pewnych cech układu takich jak sterowalność, obserwowalność.
3. Umożliwia łatwiejszą syntezę systemu regulacji w układach wielowymiarowych.

**Operatorowy zapis równań zmiennych stanu**

Jeżeli obie strony macierzowego równania stanowego podda się transformacji Laplace'a to otrzyma się operatorowy zapis modelu stanowego:

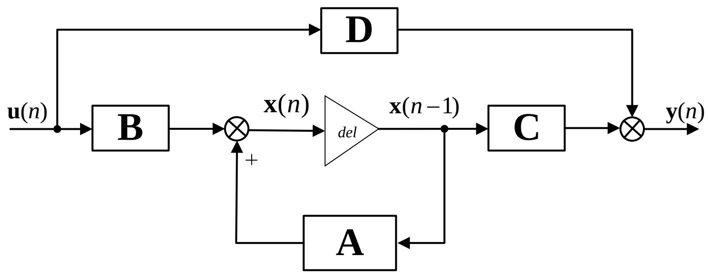
$$\left.\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax}+\mathbf{Bu}\\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx}+\mathbf{Du}\end{aligned}\right\}/\mathcal{L}$$
$$\Downarrow \tag{4.7}$$
$$\begin{aligned} s\mathbf{X}(s) &= \mathbf{AX}(s)+\mathbf{BU}(s)\\ \mathbf{Y}(s) &= \mathbf{CX}(s)+\mathbf{DU}(s)\end{aligned}$$

Schemat takiego modelu przedstawia rysunek 4.6

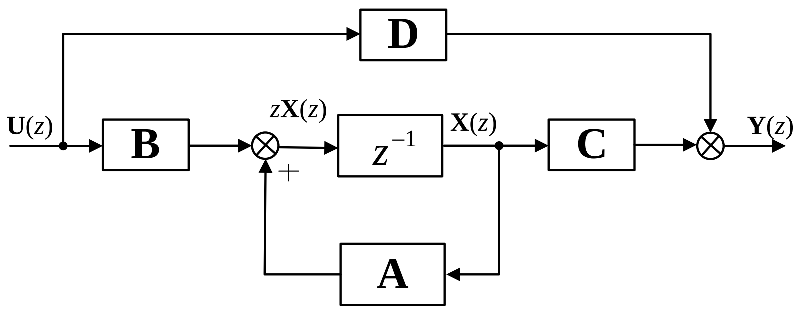



Rys. 4.6. Schemat macierzowego operatorowego modelu stanowego ciągłego układu liniowego

Modele stanowe tworzy się również dla układów impulsowych przy czym operacji całkowania w modelu impulsowym odpowiedna opóźnienie o jeden krok próbkowania a operatorowi całkowania czyli 1/s operator opóźnienia, czyli $z^{-1}$ o jeden krok próbkowania. Wówczas schematowi z rys. 4.5 odpowiada schemat z rys. 4.7, a z rys. 4.6 schemat przedstawiony na rys. 4.8.




Rys.4.7. Schemat macierzowego modelu stanowego impulsowego układu liniowego




Rys. 4.8. Schemat macierzowego operatorowego modelu stanowego impulsowego układu liniowego

**Uwaga!!!** Należy być świadomym tego, że macierze **A**, **B**, **C**, **D** z rysunków 4.5 i 4.6 nie są tożsame z macierzami z rys. 4.7 i 4.8.

### **4.3.1.** Metoda bezpośrednia (fazowa) otrzymywania modelu stanowego

Sposób postępowania dla tej metody ilustrują przykłady 5 i 6.

*Przykład* 5

Wyznaczyć model stanowy dla układu opisanego równaniem różniczkowym:

$$y'' + 0.5y' + y = 0.5u' + u$$

z warunkami początkowymi: $u(0) = 0$, $y(0) = 0.5$, $y'(0) = 0.5$.

Zakładając na wstępie zerowe warunki początkowe umożliwia się stosowanie transmitancji operatorowej dla rozważanego układu. Następnie, po uzyskaniu schematu operacyjnego wprowadza się odpowiednie warunki początkowe dla zmiennych stanu. Wyjściowemu równaniu różniczkowemu (przy założonych zerowych warunkach początkowych) odpowiada więc następująca transmitancja operatorowa:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{0.5s + 1}{s^2 + 0.5s + 1}$$

Po podzieleniu licznika i mianownika tej transmitancji przez $s^2$ (w ogólnym przypadku przez najwyższą potęgę operatora $s$ w mianowniku transmitancji) uzyskuje się:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{0.5s^{-1} + s^{-2}}{1 + 0.5s^{-1} + s^{-2}}$$

Po wprowadzeniu wielkości pomocniczej $E(s)$ zdefiniowanej jako:

$$E(s) = \frac{U(s)}{1 + 0.5s^{-1} + s^{-2}}$$

otrzymuje się układ równań:

$$E(s) = U(s) - 0.5s^{-1}E(s) - s^{-2}E(s)$$

$$Y(s) = 0.5s^{-1}E(s) - s^{-2}E(s)$$

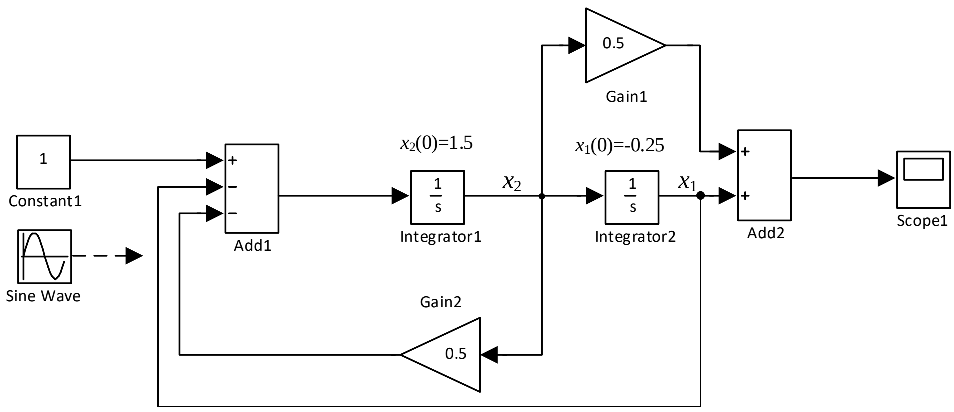
Na podstawie tych równań uzyskuje się schemat jak na rys. 4.9. Wyjścia integratorów z tego schematu określają zmienne stanu $x_1(t)$ oraz $x_2(t)$. Wprowadzenie warunków początkowych dla poszczególnych zmiennych stanu dokonuje się po rozwiązaniu układu równań:

$$y(0) = x_1(0) + 0.5x_2(0)$$

$$y'(0) = x_1'(0) + 0.5x_2'(0)$$

$$x_1'(0) = x_2(0)$$

$$x_2'(0) = -x_1(0) - 0.5x_2(0) + u(0)$$




Rys. 4.9. Schemat operacyjny dla przykładu 5.

W układzie tym pierwsze równanie powstało z zapisu równania wyjścia dla $t = 0$, a po jego zróżniczkowaniu uzyskano drugie z równań. Równania trzecie i czwarte przedstawiają zapis pochodnych zmiennych stanu dla $t = 0$ (sygnały wejściowe obu integratorów). W wyniku rozwiązania tego układu równań uzyskuje się następujące zależności na warunki początkowe dla obu zmiennych stanu (w funkcji zadanych na wstępie warunków początkowych - $u(0)$, $y(0)$, $y'(0)$):

$$x_1(0) = u(0) + 0.5y(0) - y'(0) = -0.25$$

$$x_2(0) = -2u(0) + y(0) + 2y'(0) = 1.5$$

**4.3.2.** Metoda zmodyfikowana

Sposób modelowania według tej metody ilustruje przykład 6.

*Przykład* 6
Rozważmy równanie różniczkowe z przykładu 5.
Zakładając początkowo (jak poprzednio w przykładzie 5) zerowe warunki początkowe umożliwia się stosowanie pojęcia transmitancji operatorowej:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{0.5s + 1}{s^2 + 0.5s + 1}$$

W metodzie tej z transmitancji operatorowej wyznacza się $Y(s)$:

$$Y(s) = s^{-1}\left[0.5U(s) - 0.5Y(s) + s^{-1}\left(U(s) - Y(s)\right)\right].$$

Równanie to prowadzi do schematu jak na rys. 4.10.
W celu określenia warunków początkowych dla wprowadzonych zmiennych stanu $x_1$, $x_2$, będących sygnałami wyjściowymi integratorów, należy rozwiązać następujący układ równań:

$$y(0) = x_2(0)$$

$$y'(0) = x_2'(0)$$

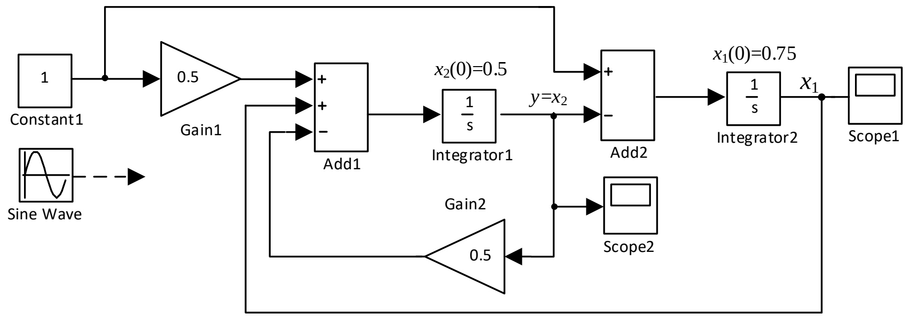
$$x_2'(0) = x_1(0) - 0.5x_2(0) + 0.5u(0)$$

W powyższym układzie, zapisanym dla chwili $t = 0$, pierwsze z równań jest równaniem wyjścia, a drugie uzyskano po zróżniczkowaniu pierwszego. Trzecie z równań określa pochodną tej zmiennej stanu, która bezpośrednio określa sygnał wyjściowy.
W wyniku rozwiązania tego układu równań uzyskuje się następujące warunki początkowe dla obu zmiennych stanu, wprowadzane w obu integratorach schematu operacyjnego:

$$x_1(0) = -0.5u(0) + 0.5y(0) + y'(0) = 0.75$$

$$x_2(0) = y(0) = 0.5$$

W uzyskanym schemacie operacyjnym według tej metody (rys. 4.6) sygnał wyjściowy $y$ jest stanowiony bezpośrednio przez jedną ze zmiennych stanu ($x_2$), a nie jak poprzednio (rys. 4.5) jako liniowa kombinacja zmiennych stanu.




Rys. 4.10. Schemat operacyjny dla przykładu 6.

### **4.3.3.** Metoda iteracyjna (szeregowa)

W metodzie tej schemat operacyjny uzyskuje się w rezultacie szeregowego połączenia modeli dla wyodrębnionych elementarnych układów składowych, uzyskanych po zapisaniu transmitancji operatorowej rozważanego układu w postaci iloczynu ułamków prostych. Metodę tę ilustruje następujący przykład.

*Przykład* 7

Zamodelować układ opisany równaniem różniczkowym

$$y'' + 5y' + 6y = 10u' + 40u$$

z warunkami początkowymi: $u(0) = 0$, $y(0) = 0.5$, $y'(0) = 0.5$.

Zakładając na wstępie zerowe warunki początkowe umożliwia się stosowanie transmitancji operatorowej dla rozważanego układu. Następnie, po uzyskaniu schematu operacyjnego wprowadzi się odpowiednie warunki początkowe dla zmiennych stanu. Wyjściowemu równaniu różniczkowemu (przy założonych zerowych warunkach początkowych) odpowiada więc następująca transmitancja operatorowa:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10s+1}{s^2+5s+5} = \frac{10}{s+2}\,\frac{s+4}{s+3}$$

Schemat operacyjny uzyskuje się więc w wyniku szeregowego połączenia modeli dla członów:

$$G_1(s) = \frac{10}{s+2}$$

$$G_1(s) = \frac{s+4}{s+3}$$

Stosując bezpośrednią metodę zmiennych stanu do określenia modeli dla tych elementarnych członów i zestawiając je w szereg uzyskuje się schemat operacyjny jak na rys. 4.11.

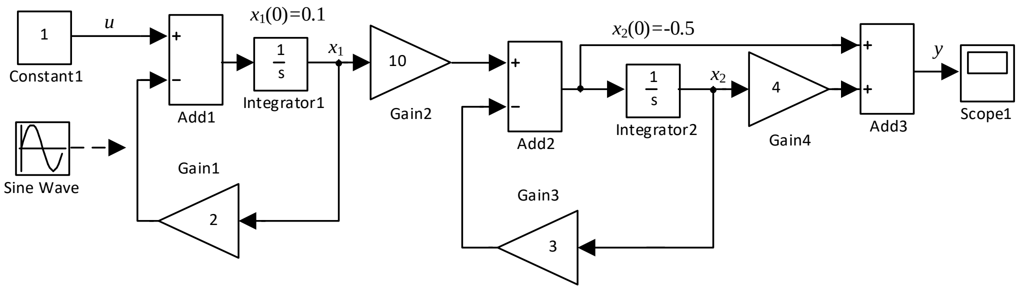
W celu określenia warunków początkowych dla wprowadzonych zmiennych stanu $x_1$, $x_2$, będących sygnałami wyjściowymi integratorów (rys. 4.7), należy rozwiązać następujący układ równań:

$$y(0) = 4x_2(0) + x_2'(0)$$

$$y'(0) = 40x_1(0) + 10x_1'(0) - 3y(0)$$

$$x_2'(0) = 10x_1(0) - 3x_2(0)$$

$$x_1'(0) = -2x_1(0) - u(0)$$




Rys. 4.11. Schemat operacyjny dla przykładu 7.

W powyższym układzie zapisanym dla chwili $t$=0 poszczególne równania oznaczają:

a) pierwsze równanie przedstawia równanie określające sygnał wyjściowy $y$,

b) drugie równanie jest zapisem dla fragmentu schematu z rys. 4.11 pomiędzy sygnałami $x_1$oraz $y$, który jest opisany transmitancją:

$$\frac{Y(s)}{X_1(s)} = 10\frac{s+4}{s+3}$$

c) równania trzecie i czwarte stanowią zapis dla pochodnych zmiennych stanu (sygnały wejściowe obu integratorów).

W wyniku rozwiązania powyższego układu równań uzyskuje się następujące warunki początkowe dla obu zmiennych stanu:

$$x_1(0) = 0.15y(0) + 0.05y'(0) - 0.5u(0) = 0.1$$

$$x_2(0) = -0.5y(0) - 0.5y'(0) + 5u(0)$$

#### 4.3.4. Metoda równoległa

W metodzie tej schemat operacyjny uzyskuje się w rezultacie równoległego połączenia modeli dla wyodrębnienia elementarnych układów składowych, uzyskanych po zapisaniu transmitancji operatorowej rozważanego układu w postaci sumy ułamków prostych. Metodę tę ilustruje następujący przykład.

*Przykład* 8

Zamodelować układ z przykładu 7.

Zakładając na wstępie zerowe warunki początkowe umożliwia się stosowanie transmitancji operatorowej dla rozważanego układu. Następnie, po uzyskaniu schematu operacyjnego wprowadzi się odpowiednie warunki początkowe dla zmiennych stanu. Wyjściowemu równaniu różniczkowemu (przy założonych zerowych warunkach początkowych) odpowiada więc następująca transmitancja operatorowa:

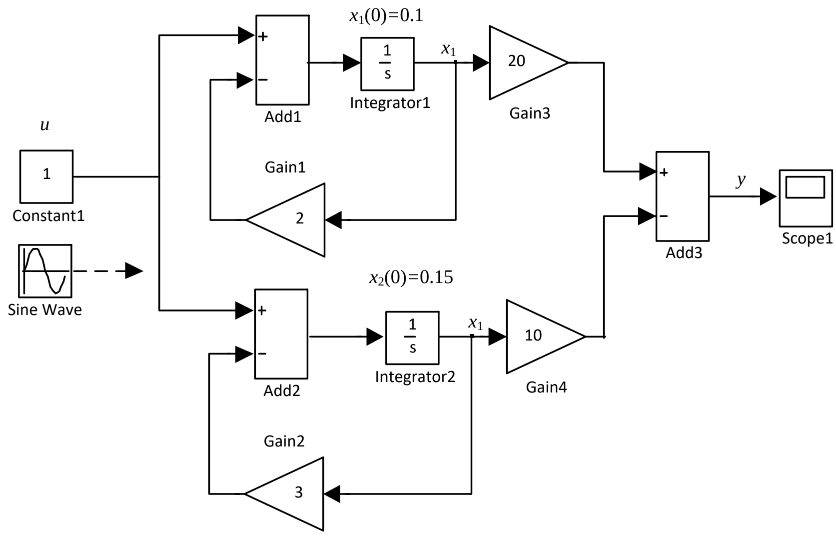
$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{10s+40}{s^2+5s+6}=\frac{20}{s+2}+\frac{-10}{s+3}$$

Schemat operacyjny uzyskuje się więc w wyniku równoległego połączenia modeli dla elementarnych członów:

$$G_1(s)=\frac{20}{s+2}$$

$$G_2(s)=\frac{-10}{s+3}$$

Stosując bezpośrednią metodę zmiennych stanu do określenia modeli dla tych elementarnych członów i zestawiając je równolegle uzyskuje się schemat operacyjny jak na rys. 4.12.




Rys. 4.12. Schemat operacyjny dla przykładu 8.

W celu określenia warunków początkowych dla wprowadzonych zmiennych stanu $x_1$, $x_2$, będących sygnałami wyjściowymi integratorów (rys. 4.12), należy rozwiązać następujący układ równań:

$$y(0)=20x_1(0)-3x_2(0)$$

$$y'(0) = 20x_1'(0) + 10x_2'(0)$$

$$x_1'(0) = -2x_1(0) + u(0)$$

$$x_2'(0) = -3x_2(0) + u(0)$$

W powyższym układzie zapisanym dla chwili $t$=0 poszczególne równania oznaczają:

a) pierwsze równanie przedstawia równanie wyjścia określające sygnał wyjściowy y,
b) drugie równanie jest uzyskane po zróżniczkowaniu pierwszego,
c) równania trzecie i czwarte stanowią zapis dla pochodnych zmiennych stanu (sygnały wejściowe obu integratorów).

W wyniku rozwiązania powyższego układu równań uzyskuje się następujące warunki początkowe dla obu zmiennych stanu:

$$x_1(0) = 0.15y(0) + 0.05y'(0) - 0.5u(0) = 0.1$$

$$x_2(0) = 0.2y(0) + 0.1y'(0) - u(0) = 0.15$$

### 4.4. Modelowanie strukturalne

Modelowanie strukturalne charakteryzuje się tym, że przy modelowaniu złożonego układu punktem wyjściowym nie jest opis wiążący w sposób bezpośredni sygnały wejściowe i wyjściowe (równanie różniczkowe zawierające sygnały wejściowe i wyjściowe wraz z ich pochodnymi, czy też transmitancja wypadkowa pomiędzy wejściem i wyjściem). Natomiast modeluje się oddzielnie poszczególne elementy składowe rozważanego układu, a następnie zestawia tak uzyskane modele cząstkowe, stosownie do schematu blokowego całego układu. Przy czym do modelowania elementów składowych może być zastosowana dowolna z metod, jak też poszczególne elementy te mogą być modelowane przy użyciu różnych metod. W rezultacie modelowania strukturalnego uzyskuje się możliwość obserwacji nie tylko sygnałów wejściowego i wyjściowego ale również sygnałów wewnętrznych układu. Ilustrują to przykłady 9 i 10

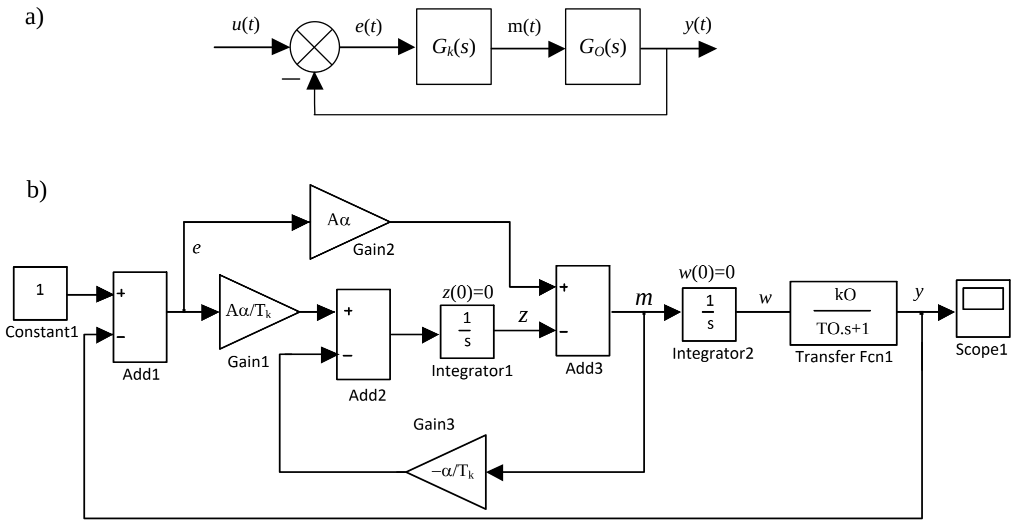
*Przykład* 9

Zamodelować układ regulacji automatycznej (rys. 4.13a), w którym korektor oraz obiekt są określone przez następujące funkcje przejścia:

$$G_k(s) = A\frac{T_k s + 1}{\frac{T_k}{\alpha}s + 1}$$

$$G_o(s) = \frac{k_o}{s(T_o s + 1)}$$

Model winien zapewniać możliwość obserwacji sygnałów: błędu - $e$, wielkości sterującej - $u$, oraz wielkości wyjściowej - $y$. Jako sygnał wejściowy układu zastosować skok jednostkowy ($u(t)=\mathbf{1}(t)$).




Rys. 4.13. Przykład 9: a) schemat blokowy modelowanego układu, b) schemat operacyjny.

Modelując oddzielnie korektor (metoda postaci kanonicznej - jak w przykładzie 4), obiekt (metoda szeregowa - integrator w szereg z członem inercyjnym) oraz węzeł sumacyjny, uzyskuje się schemat operacyjny jak na rys. 4.13b. Umożliwia on prowadzenie analizy stanów dynamicznych układu, np. eksperymentalnej optymalizacji (na drodze kolejnych symulacji) parametrów korektora, uprzednio dobranego na podstawie znanych metod analitycznych (patrz ćwiczenie *Korekcja analogowa liniowych układów regulacji*).

*Przykład* 10

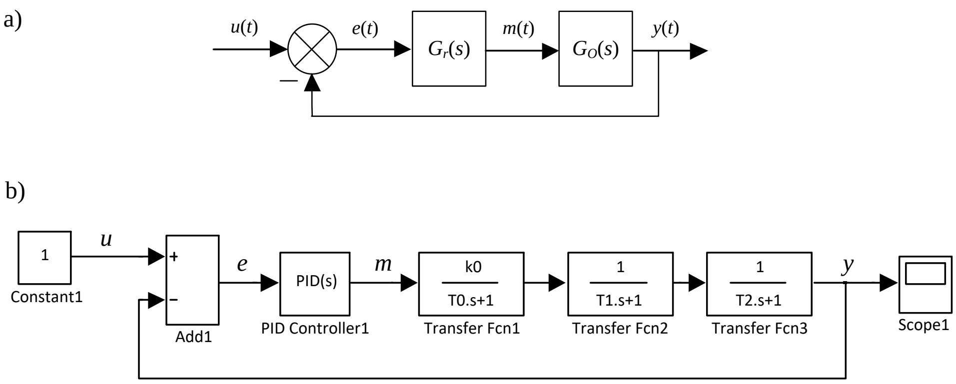
Zamodelować układ regulacji automatycznej (rys. 4.10a), w którym regulator PID oraz obiekt są określone przez następujące funkcje przejścia:

$$G_r(s) = k_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{Ts+1}\right)$$

$$G_r(s) = \frac{k_o}{(T_o s+1)(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$$

Na rys. 4.14 b przedstawiono schemat operacyjny dla analizowanego układu regulacji przy podaniu na wejście skoku jednostkowego. Regulator o powyższej funkcji można znaleźć w bibliotece ”Extras” w Simulinku.

Przedstawiony na rys. 4.14b model pozwala na eksperymentalny dobór nastaw regulatora PID, przy określonych parametrach obiektu ($k_0$, $T_0$, $T_1$, $T_2$). Stosując metodę Zieglera - Nicholsa należy wtedy nastawić regulator PID na działanie tylko proporcjonalne (uzyskuje się to przez zadanie: $T_\mathrm{i}$ > 1E10, $T_d = 0$, $T$ - dowolne). Zmieniając wzmocnienie $k_p$ należy przeprowadzić szereg symulacji w celu określenia granicznej wartości $k_p = k_{gr}$, przy której układ znajdzie się na granicy stabilności (wzbudzone oscylacje są niegasnące). Na podstawie $k_\mathrm{gr}$ oraz okresu tych oscylacji $T_\mathrm{osc}$, dobiera się nastawy regulatora jako:




Rys. 4.14. Przykład 10: a) schemat blokowy modelowanego układu, b)schemat operacyjny.

$$k_p = 0.6k_{gr}$$

$$T_i = 0.5T_{\mathrm{osc}}$$

$$T_d = 0.12T_{\mathrm{osc}}$$

$$T = \frac{T_d}{k_d}$$

gdzie $k_d$ – współczynnik z zakresu 6 – 15

Po wprowadzeniu tak dobranych nastaw można prowadzić ich dalszą optymalizację, ze względu na określoną cechę uzyskiwanych przebiegów przejściowych (np. zapewnienie najkrótszego czasu do pierwszego maksimum oscylacyjnej odpowiedzi układu na skok jednostkowy, itp.).

## 4.5. Program ćwiczenia

W ramach ćwiczenia należy zamodelować zadany przez prowadzącego liniowy układ regulacji automatycznej (opisany przez równania różniczkowe , różnicowe lub transmitancje operatorowe ciągłe lub impulsowe) z zastosowaniem wskazanych metod modelowania w przestrzeni zmiennych stanu.