Na prawach rękopisu
do użytku służbowego

INSTYTUT ENERGOELEKTRYKI POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ
Raport serii SPRAWOZDANIA Nr

LABORATORIUM TEORII I TEHCNIKI STEROWANIA
INSTRUKCJA LABORATORYJNA

ĆWICZENIE Nr 7

Minimalnoczasowe sterowanie optymalne ciągłym obiektem dynamicznym (problem deterministyczny)

Mirosław Łukowicz

Słowa kluczowe:
stan układu, otwarty układ sterowania, optymalizacja

WROCŁAW 2008

1. Wyznaczanie sterowania

Dany jest obiekt sterowania opisany za pomocą wektora stanu

$$\dot{x} = f(x,u) \tag{1}$$

znajdujący się w stanie początkowym

$$x_0 = x(0) \tag{2}$$

Należy znaleźć optymalny sygnał sterujący $u^*(t)$, który minimalizuje wartość kryterium postaci

$$Q_T = \int_0^T \varphi(x,u)dt \tag{3}$$

Na sterowanie mogą być nałożone ograniczenia postaci

$$\|u(t)\| < M \tag{4}$$

lub

$$\|u^{(i)}(t)\| < M_i \qquad (i = 1,2,\ldots,s) \tag{5}$$

Ograniczenia mogą być tez nałożone na stany tzn. $x(t)$, np. dla sterowania z ustalonym końcem trajektorii wymaganie jest takie

$$x(t) = x^* \tag{6}$$

Warunkiem koniecznym, aby dane sterowanie było optymalne jest spełnienie przez nie tzw. równania Bellmana postaci

$$-\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = \min_u \{\varphi(x,u) + \underset{x}{grad}^T V(x,t) \cdot f(x,u)\} \tag{7}$$

gdzie

$$\underset{x}{grad}^T V(x,t) f(x,u) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} \cdot f_k(x,u,t) \tag{8}$$

oraz

$$V(x,t) = \min_{u(t)} \int_t^T \varphi(x,u)dt \tag{9}$$

Równanie Bellmana można przedstawić w postaci

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = \max_u \{-\varphi(x,u) + \Psi^T f(x,u)\} = \max_u \left[\overline{\Psi}^T \quad \bar{f} \right] \tag{10}$$

gdzie

$$\Psi = -\underset{x}{grad}\, V(x,t) \qquad \bar{f} = \begin{bmatrix} \varphi(x,u) \\ f \end{bmatrix} \qquad \overline{\Psi} = \begin{bmatrix} -1 \\ \Psi \end{bmatrix}$$

Skoro sterowanie optymalne jest równe u*, to musi maksymalizować hamiltonian

$$H \overset{df}{=} \overline{\Psi}^T \bar{f} \tag{11}$$

(stad zasada maksimum).

W takim razie dla sterowania czasooptymalnego $\varphi(x,u) = 1$ i wówczas $V(x,t)$ nie zależy jawnie od t, więc

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = 0 \tag{12}$$

oraz

$$\max_u \Psi^T f = 1 \tag{13}$$

Zmienne $x(t)$, $\Psi(t)$ i $H(x,\Psi,u)$ są związane równaniami

$$\dot{x} = \underset{\Psi}{grad}\, H \tag{14}$$

oraz

$$\dot{\Psi} = -\underset{x}{grad}\, H \tag{15}$$

Dla obiektu liniowego opisanego równaniami stanu

$$\dot{x} = Ax + bu \tag{16}$$

równanie dla wektora sprzężonego przybiera postać

$$\dot{\Psi} = \underset{x}{grad}\, \varphi(x,u) - A^T \Psi \tag{17}$$

a dla sterowania czasowo-optymalnego

$$\dot{\Psi} = -A^T\Psi \tag{18}$$

2. Zadanie do wykonania

Opracować czasooptymalny układ regulacji obiektem o transmitancji

$$G(s) = \frac{k}{s^2} \tag{19}$$

który będzie sprowadzał wyjście obiektu do wartości zero i utrzymywał tę wartość. Na sterowanie nałożone jest ograniczenie

$$|u(t)| \le M \tag{20}$$

Niech układ o transmitancji (19) zostanie opisany równaniami stanu ze zmiennymi

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= (y^* - y) = \varepsilon \\ x^{(2)} &= \dot{x}^{(1)} = \dot{(y^* - y)} = -\dot{y} \\ \dot{x}^{(2)} &= \dot{(0 - \dot{y})} = -\ddot{y} = -ku \end{aligned} \tag{21}$$

gdzie ε jest błędem regulacji, a *y** wartością zadaną.

Równania stanu przyjmują więc postać następującą

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^{(1)} \\ \dot{x}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -k \end{bmatrix} u(t) \tag{22}$$

Zadanie sterowania czasooptymalnego zostanie rozwiązane z wykorzystaniem zasady maksimum Pontriagina.

Hamiltonian dla sterowania czasooptymalnego ma dla tego zadania postać następującą

$$H = -1 + \psi^T Ax + (\psi^T b)u \tag{23}$$

Maksymalizacje hamiltonianu otrzymuje się dla sterowania postaci

$$u^* = \begin{cases} M & \text{dla} \quad \psi^T b \ge 0 \\ -M & \text{dla} \quad \psi^T b < 0 \end{cases} \tag{24}$$

co można zapisać w innej formie następująco

$$u^* = \mathrm{sign}(\psi^T b) \cdot M \tag{25}$$

Widać, że znak sterowania zależy od znaku funkcji ψ, która powinna spełniać zależność

$$\dot{\psi}^* = -\underset{x}{grad}\, H(x^*, u^*, \Psi^*) \tag{26}$$

co daje

$$\dot{\psi}^* = -A^T \psi^* \tag{27}$$

Wynika z tego, że są to funkcje czasu, które muszą spełniać układ równań różniczkowych postaci

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi}_1 \\ \dot{\Psi}_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix} \tag{28}$$

widać stąd, że

$$\begin{aligned} &\dot{\psi}_1 = 0 \quad \text{czyli} \quad \psi_1 = const = -C_1 \\ &\dot{\psi}_2 = -\psi_1 = C_1 \ \text{czyli} \psi_2 = C_1 * t + C_2 \end{aligned} \tag{29}$$

Argument funkcji sign zależy tylko od zmiennej ψ_2 i zmieni znak najwyżej jeden raz. Wartości stałych w (29) zależą od stanu początkowego.

Ponieważ

$$\dot{x}^{(2)} = -ku \quad \text{oraz} \qquad \text{jesli} \qquad u(t) = +M \tag{30}$$

to

$$x^{(2)} = -kMt + x_0^{(2)} \tag{31a}$$

$$x^{(1)} = -\frac{kMt^2}{2} + x_0^{(2)} t + x_0^{(1)} \tag{31b}$$

Wyznaczamy czas t z (31a) i podstawiamy do (31b). Wówczas otrzymamy

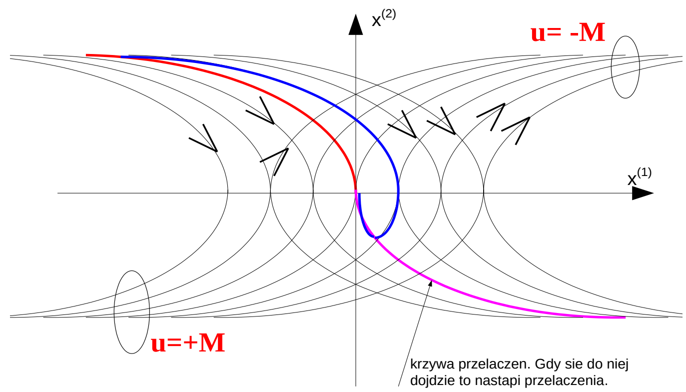
$$\begin{aligned} &x^{(1)} = -\frac{kM}{2}\left[\frac{x^{(2)} - x_0^{(2)}}{kM}\right]^2 - x_0^{(2)} \frac{x^{(2)} - x_0^{(2)}}{kM} + x_0^{(1)} \ \text{- równanie paraboli} \\ &\text{dla } u = M \qquad x^{(1)} = -\frac{1}{2kM}(x^{(2)})^2 + W(x_0^{(1)}, x_0^{(2)}) \\ &\text{dla } u = -M \qquad x^{(1)} = \frac{1}{2kM}(x^{(2)})^2 - W(x_0^{(1)}, x_0^{(2)}) \end{aligned} \tag{32}$$

gdzie *W* jest wyrazem wolnym.

Otrzymujemy w ten sposób dwie rodziny charakterystyk (parabol) dla dwóch sterowań o przeciwnych znakach i dla różnych stanów początkowych. Analiza zachowania się obiektu na płaszczyźnie fazowej z rys. 1. pozwala opracować algorytm sterowania realizujący postawione zadanie

$$x^{(1)} = -\mathrm{sign}(x^{(2)}) \cdot \frac{1}{2kM}(x^{(2)})^2 \Leftrightarrow x^{(1)} = -\frac{x^{(2)}\left|x^{(2)}\right|}{2kM} \tag{33}$$

$$u = M \cdot \mathrm{sign}(x^{(1)} + \frac{x^{(2)}\left|x^{(2)}\right|}{2kM}) \tag{36}$$

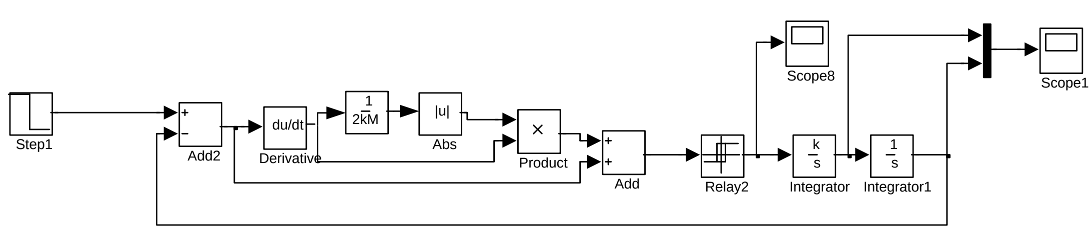


Rys. 1. Płaszczyzna fazowa z rodzinami trajektorii dla sterowań +M i –M.

Należy zwrócić uwagę, że sterowanie w tym algorytmie nie jest bezpośrednią funkcja czasu, lecz zależy od aktualnego stanu obiektu.

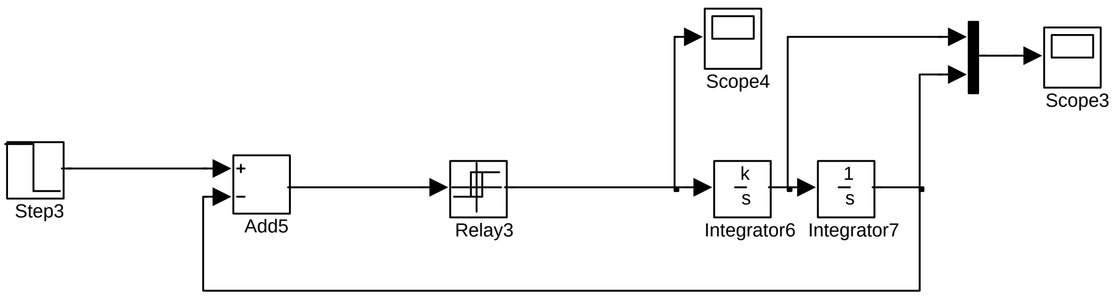
ZADANIA

1. Należy zamodelować układ sterowania zgodny z podanym wzorem jak na rys. 2 i oszacować czas sterowania dla wybranego stanu początkowego.



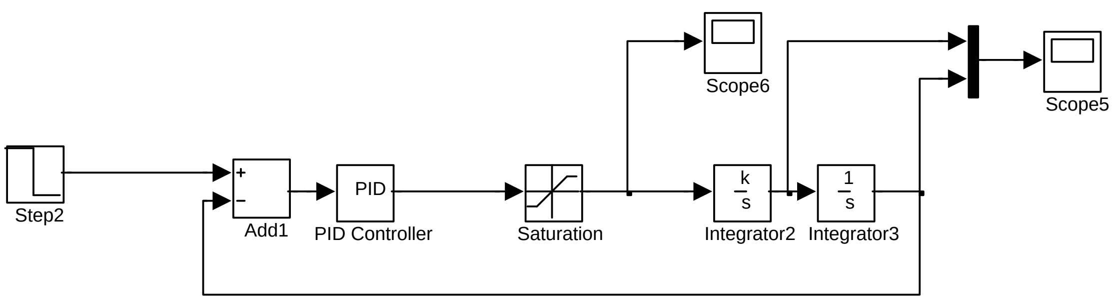
Rys. 2. Optymalny układ regulacji obiektu podwójnie całkującego.

2. Należy zamodelować układ sterowania z regulatorem dwupozycyjnym (przekaźnik) z sygnałem wyjściowym +M, -M jak na rys. 3 i oszacować czas sterowania dla wybranego stanu początkowego z punktu 1.



Rys. 3. Niepoprawna realizacja regulacji obiektu podwójnie całkującego.

3. Należy zamodelować układ sterowania z regulatorem PID z sygnałem wyjściowym ograniczonym w przedziale (+M, -M) jak na rys. 4 i oszacować czas sterowania dla wybranego stanu początkowego z punktu 1.



Rys. 4. Nieoptymalna realizacja regulacji obiektu podwójnie całkującego.

Uwaga!!!!!

M=liczba liter imienia,   k=(liczba liter nazwiska / 10)   !!!!!! .