

Na prawach rękopisu
do użytku służbowego

KATEDRA ENERGOELEKTRYKI POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ
Raport serii SPRAWOZDANIA Nr

LABORATORIUM TEORII STEROWANIA
INSTRUKCJA LABORATORYJNA

ĆWICZENIE Nr 6

Sterowanie optymalne dyskretnym obiektem dynamicznym (problem probabilistyczny)

Mirosław Łukowicz

Słowa kluczowe:
stan układu, zamknięty układ sterowania,
zmiennie losowe, zakłócenia stacjonarne

WROCŁAW 2024

1. Wyznaczanie sterowania dyskretnym obiektem deterministycznym w obecności zakłóceń stacjonarnych.

Dany jest obiekt sterowania (rys. 1) opisany za pomocą wektora stanu

$$x_{n+1} = f(x_n, u_n, z_n) \quad (1)$$

znajdujący się w stanie początkowym

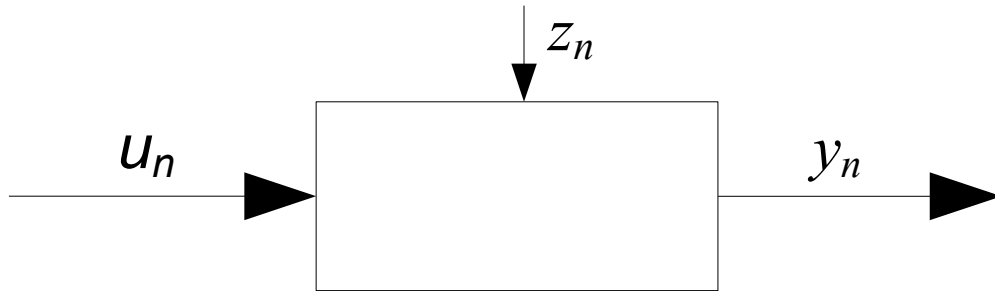
$$x_0 = x(0) \quad (2)$$

oraz kryterium optymalności

$$Q = E\left[\sum_{n=1}^N \varphi(x_n, u_{n-1})\right] = E_{\substack{\bar{z}_0 \dots \bar{z}_{N-1} \\ n=0}} \left[\sum_{n=0}^{N-1} g(x_n, u_n, z_n) \right], \quad (3)$$

gdzie

$$g(x_n, u_n, z_n) \stackrel{df}{=} \varphi[f(x_n, u_n, z_n), u_n] \quad (4)$$



Rys. 1. Obiekt sterowany w obecności zakłóceń stacjonarnych

Należy znaleźć sterowanie optymalne w układzie zamkniętym postaci

$$u_n^* = \Psi_n(x_n). \quad (5)$$

Sterowania będą wyznaczone rekurencyjnie dla stanów x_n od $N-1$ do 0 z zależności

$$V_{N-n}(x_n) = \min_{u_n, \dots, u_{N-1}} \left\{ E_{\bar{z}_n} [g(x_n, u_n, z_n)] + E_{\substack{\bar{z}_{n+1}, \dots, \bar{z}_{N-1} \\ i=n+1}} \left[\sum_{i=n+1}^{N-1} g(x_i, u_i, z_i) \mid x_n \right] \right\} \quad (6)$$

gdzie dla $n=N-1$

$$V_1(x_{N-1}) = \min_{u_{N-1}} \int_Z g(x_{N-1}, u_{N-1}, z) f_z(z) dz \quad (7)$$

Minimalizacja (7) względem u_{N-1} daje ostatnie sterowanie postaci

$$u_{N-1}^* = \Psi_{N-1}(x_{n-1}) \quad (8)$$

Dla $N-2$ będzie

$$V_2(x_{N-2}) = \min_{u_{N-2}} \int_Z \{g(x_{N-2}, u_{N-2}, z) + V_1[f(x_{N-2}, u_{N-2}, z)]\} f_z(z) dz \quad (9)$$

co daje

$$u_{N-2}^* = \Psi_{N-2}(x_{N-2}) \quad (10)$$

itd.

Ogólnie sterowanie będzie wyznaczane z zależności

$$V_{N-n}(x_n) = \min_{u_n} \int_Z \{g(x_n, u_n, z_n) + V_{N-n-1}[f(x_n, u_n, z)]\} f_z(z) dz$$

gdzie $n = N-1, N-2, \dots, 0$. $V_0 = 0$.

W rezultacie otrzymuje się algorytm sterowania w układzie zamkniętym

$$u_n^* = \Psi_n(x_n) \quad (11)$$

2. Zadanie

Dany jest jednowymiarowy dyskretny obiekt sterowania o równaniu

$$x_{n+1} = ax_n + u_n z_n, \quad (12)$$

gdzie z_n zmienia się w sposób przypadkowy stacjonarny. Stosując metodę programowania dynamicznego należy wyznaczyć optymalny algorytm sterowania w układzie zamkniętym dla następujących danych:

\underline{z} – zmienna losowa,

z_n – realizacja zmiennej losowej \underline{z} w n -tym momencie sterowania,

$E[z] = \mu_z$ - wartość oczekiwana (średnia) zmiennej losowej \underline{z} ,

$D^2[z] = \sigma_z^2$ – wariancja zmiennej losowej \underline{z} .

Przyjmujemy następujący wskaźnik jakości sterowania

$$Q_N = E \left[\sum_{n=1}^N x_n^2 \right] \quad (13)$$

gdzie horyzont sterowania będzie równy N .

Rozwiązanie

Podstawiając równanie obiektu do wskaźnika jakości sterowania otrzymuje się

$$Q_N = E \left[\sum_{n=0}^{N-1} (a^2 x_n^2 + u_n^2 z_n^2 + 2ax_n u_n z_n) \right] \quad (14)$$

Stosując procedurę rekurencyjną i zaczynając od $n=N-1$ otrzymuje się

$$\begin{aligned} q_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1}) &= E[a^2 x_{N-1}^2 + u_{N-1}^2 z_{N-1}^2 + 2ax_{N-1} u_{N-1} z_{N-1}] = \\ &= a^2 x_{N-1}^2 + u_{N-1}^2 E(z^2) + 2ax_{N-1} u_{N-1} \mu_z \end{aligned} \quad (15)$$

Różniczkując (15) względem u_{N-1} i przyrównując do zera mamy

$$u_{N-1}^* = \frac{-ax_{N-1} \mu_z}{E[z^2]} = \frac{-ax_{N-1} \mu_z}{\mu_z^2 + \sigma_z^2}, \quad (16)$$

ponieważ

$$E[x^2] = D^2[x] + E^2[x] \quad (17)$$

Mając ostatnie sterowanie optymalne, wyznacza się minimalną wartość funkcji celu dla tego sterowania, wstawiając u_{N-1} do $q_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1})$

$$\begin{aligned} V_1(x_{N-1}) &= a^2 x_{N-1}^2 + \frac{a^2 x_{N-1}^2 \mu_z^2}{E[z^2]} - \frac{2a^2 x_{N-1}^2 \mu_z^2}{E[z^2]} = \\ &= a^2 x_{N-1}^2 \left(1 - \frac{\mu_z^2}{\mu_z^2 + \sigma_z^2} \right) = x_{N-1}^2 * c \end{aligned} \quad (18)$$

gdzie

$$c = a^2 \left(1 - \frac{\mu_z^2}{\mu_z^2 + \sigma_z^2} \right). \quad (19)$$

Widać teraz, że

$$q_{N-2} = x_{N-1}^2 + V_1(x_{N-1}) = x_{N-1}^2 (1+c) \quad (20)$$

ma postać analogiczną z q_{N-1} , więc podobnie jak poprzednio optymalne sterowanie będzie takie

$$u_{N-2}^* = \frac{-ax_{N-2}\mu_z}{E[z^2]} = \frac{-ax_{N-2}\mu_z}{\mu_z^2 + \sigma_z^2} \quad (21)$$

Wynika z tego, że wszystkie sterowania powinny mieć postać następującą.

$$u_n^* = \frac{-ax_n\mu_z}{E[z^2]} = \frac{-ax_n\mu_z}{\mu_z^2 + \sigma_z^2} \quad (22)$$

Algorytm sterowania jest więc liniowy i stacjonarny. Do jego wyznaczenia nie jest potrzebna znajomość rozkładu zmiennej losowej z . Wystarczy znajomość wartości oczekiwanej oraz wariancji zmiennej losowej z .

ZADANIE DO WYKONANIA W TRAKCIE LABORATORIUM

W MATLABIE zamodelować optymalny ze względu na kryterium optymalizacyjne (13) (z horyzontem N – iloczyn liczby liter imienia i nazwiska) zamknięty układ sterowania obiektem

$$x_{n+1} = ax_n + u_n z_n \quad (23)$$

gdzie a – odwrotność liczby liter imienia, x_0 - liczba liter nazwiska, z_n – realizacja zmiennej losowej z .

Wersja 1.

Założyć, że zmienna losowa z ma rozkład równomierny o wartości średniej $\mu_z=1$ i odchyleniu standardowym $\sigma=0.02$ (na temat rozkładu równomiernego patrz Dodatek A).

1. Wygenerować i **zapamiętać** zakłócenia dla chwil $n=0$ do $N-1$. Skorzystać z funkcji „rand” w Matlabie.
2. Wyznaczyć sterowanie optymalne.
3. Wykreślić wykres wskaźnika jakości dla $n=0$ do N dla sterowania optymalnego. Wskaźnik musi być uśredniony po odpowiednio licznych zbiorze realizacji sterowania.
4. Wyznaczyć sterowanie nieoptymalne postaci

$$u_n = -ax_n \quad (24)$$

5. Wykreślić wykres wskaźnika jakości dla $n=0$ do N dla sterowania nieoptymalnego.

6. Wykreślić przykładowe wykresy funkcji x_n dla $n=0$ do N wygenerowane dla takiego samego stanu początkowego i identycznych zakłóceń, ale otrzymane dla sterowania optymalnego i nieoptymalnego.

Wersja 2.

Założyć, że zmienna losowa z ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej $\mu_z=1$ i odchyleniu standardowym $\sigma=0.02$ (na temat rozkładu normalnego patrz Dodatek B).

1. Wygenerować i **zapamiętać** zakłócenia dla chwil $n=0$ do $N-1$. Skorzystać z funkcji „randn” w Matlabie.
2. Wyznaczyć sterowanie optymalne.
3. Wykreślić wykres wskaźnika jakości dla $n=0$ do N dla sterowania optymalnego. Wskaźnik musi być uśredniony po odpowiednio licznych zbiorze realizacji sterowania.
4. Wyznaczyć sterowanie nieoptymalne postaci

$$u_n = -ax_n \quad (25)$$

5. Wykreślić wykres wskaźnika jakości dla $n=0$ do N dla sterowania nieoptymalnego.
6. Wykreślić przykładowe wykresy funkcji x_n dla $n=0$ do N wygenerowane dla takiego samego stanu początkowego i identycznych zakłóceń, ale otrzymane dla sterowania optymalnego i nieoptymalnego.

Uwaga! Warunkiem koniecznym stabilności (zbieżności) procesu sterowania optymalnego (22) jest, aby

$$\left| a \frac{\sigma_z^2}{\mu_z^2 + \sigma_z^2} \right| < 1 \quad \text{oraz} \quad \left| a \frac{\mu_z \sigma_z}{\mu_z^2 + \sigma_z^2} \right| < 1 \quad (26)$$

Uwaga! Warunkiem koniecznym stabilności (zbieżności) procesu sterowania nieoptymalnego (24, 25) jest, aby

$$\left| a(1 - \mu_z) \right| < 1 \quad \text{oraz} \quad \left| a\sigma_z \right| < 1 \quad (27)$$

Dodatek A)

Rozkład równomierny jest to rozkład z funkcją gęstości prawdopodobieństwa

$$f_z(z) = \begin{cases} 0 & z > b \text{ lub } z < a \\ \frac{1}{b-a} & a \leq z \leq b \end{cases} \quad (28)$$

dla którego wartość oczekiwana (średnia)

$$E[\bar{z}] = \frac{a+b}{2} \quad (29)$$

oraz wariancja

$$D^2[\bar{z}] = \frac{(b-a)^2}{12} \quad (30)$$

Oczywiście obowiązuje zależność

$$\sigma_{\bar{z}} = \sqrt{D^2[\bar{z}]} = \frac{(b-a)}{2\sqrt{3}} \quad (31)$$

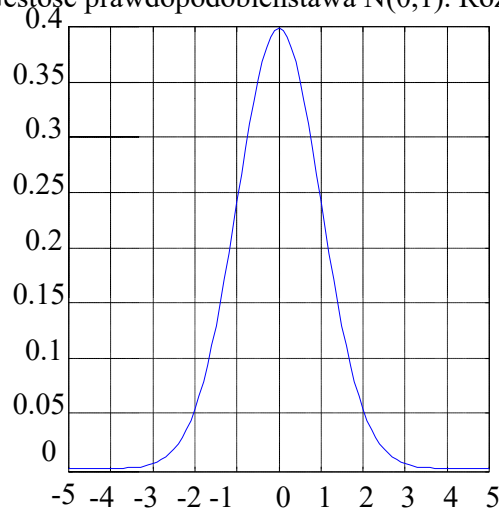
Dodatek B)

Standardowy rozkład normalny z funkcją gęstości prawdopodobieństwa

$$f_z(z) = \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma_z^2}\right) = N(\mu_z, \sigma_z) \quad (32)$$

to rozkład o f. gęstości (24), gdzie $\mu_z=0$ oraz $\sigma_z=1$. Wykres $f_z(z)$ zamieszczono na rys. 2.

Gęstość prawdopodobieństwa $N(0,1)$. Rozkład Gaussa



Rys. 2. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa standardowego rozkładu normalnego